УДК 550.34.013+517.4

И. Н. Бернштейн. М. Л. Гервер

УСЛОВИЕ РАЗЛИЧИМОСТИ МЕТРИК ПО ГОДОГРАФАМ

ВВЕДЕНИЕ

В статье доказывается теорема, из которой следуют все известные в настоящее время результаты о единственности и устойчивости в обратной кинематической задаче сейсмики и в задаче интегральной геометрии для семейства геодезических.

1. Пусть G — область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей Γ. Будем считать, что замкнутая область $\overline{G} = G \cup \Gamma$ диффеоморфна замкнутому шару.

Предположим, что в $\overline{G}$ задана риманова метрика M. Назовем *годографом метрики* M функцию $l_M(x, y)$, где $x, y \in \Gamma$; l_M — расстояние между точками x и y в метрике M. Мы хотим выяснить, при каких условиях метрика M восстанавливается по своему годографу.

В общем случае такое восстановление, конечно, невозможно. Действительно, если сделать диффеоморфизм области $\overline{G}$ на себя, тождественный на Γ, то метрика M перейдет в другую метрику M', вообще говоря, отличную от M, в то время как годограф M не изменится (т. е. $l_{M'} = l_M$). Значит, метрику M надо искать в каком-то специальном классе метрик. Например, в геофизике обычно рассматривается класс изотропных метрик, т. е. метрик вида $n(x)ds$, где $x \in \overline{G}$, а ds — стандартная евклидова метрика в $\overline{G}$.

Особенно подробно изучен в геофизике случай, когда $\overline{G}$ — шар, а функция $n(x)$ зависит только от расстояния r до центра этого шара. Оказывается, и в этом случае нет единственности, если в среде имеются волноводы (с точки зрения римановой геометрии это означает, что в $\overline{G}$ имеются геодезические метрики M, не выходящие на поверхность Γ). Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что метрика M *не имеет волноводов* (все геодезические обоими концами выходят на поверхность Γ).

Кроме того, наложим на метрику M дополнительное условие *отсутствия фокусировок*, заключающееся в том, что любые две точки области $\overline{G}$ соединяются ровно одной геодезической, гладко зависящей от этих точек. Хотя в нашем изложении это условие очень существенно, его, по-видимому, можно ослабить. Метрики без волноводов и фокусировок будем называть *регулярными.*

2. В § 1 мы введем для любой пары метрик M_1, M_2 *различитель метрик* $\mathscr{D}(M_1, M_2)$; это число, которое получается при интегрировании некоторого локального выражения, построенного по метрикам M_1 и M_2. Если метрики M_1 и M_2 совпадают, то $\mathscr{D}(M_1, M_2) = 0$. Если метрики M_1 и M_2 различны, то различитель $\mathscr{D}(M_1, M_2)$ может, вообще говоря, иметь любой знак; однако в некоторых классах метрик $\mathscr{D}(M_1, M_2) > 0$, если $M_1 \neq M_2$, например $\mathscr{D}(M_1, M_2) > 0$ *для любых двух различных изотропных метрик* M_1, M_2.

Для любой пары регулярных метрик M_1, M_2 построим в § 1 *различитель годографов* $\mathscr{H}(M_1, M_2)$; это число, которое выражается через годографы метрик M_1, M_2 и равно нулю, если эти годографы совпадают.

Основная теорема § 1 утверждает, что *для любых двух регулярных метрик* M_1, M_2

$$\mathscr{H}(M_1, M_2) \geqslant \mathscr{D}(M_1, M_2).$$

В частности, *если* $\mathscr{D}(M_1, M_2) > 0$, *то метрики* M_1 *и* M_2 *обязательно имеют разные годографы* (более того, теорема дает оценку снизу для близости этих годографов). Как следствие мы получаем, что *регулярные изотропные метрики с одинаковыми годографами совпадают.*

3. На самом деле, удобнее проводить все рассуждения не для римановых метрик, а для произвольных *финслеровых* метрик. Поскольку это понятие не так употребительно, как понятие «риманова метрика», мы приводим в прил. I и II необходимые определения и теоремы.

Короче говоря, чтобы задать риманову метрику, мы должны для каждой точки $x \in \bar{G}$ сопоставить каждому касательному вектору a в этой точке неотрицательное число $M(x, a)$ — его длину; при этом требуется, чтобы функция $M^2(x, a)$ квадратично зависела от a.

Можно наложить менее ограничительные условия на функцию M:

а) $M(x, \lambda a) = |\lambda| M(x, a)$;

б) $M(x, a) > 0$ при $a \neq 0$;

в) M выпукла по a, т. е.

$M(x, a + b) \leqslant M(x, a) + M(x, b)$.

Функция, удовлетворяющая этим условиям, также задает метрику в $\bar{G}$.

Приведем ее физическую интерпретацию. Пусть область $\bar{G}$ заполнена средой, в которой могут распространяться волны, причем среда неоднородна и анизотропна: скорость распространения волн зависит от точки и от направления. Фиксируем точку x и в каждом направлении θ отложим вектор $u(\theta)$ скорости распространения волны в точке x в этом направлении. Концы векторов $u(\theta)$ опишут некоторую поверхность U_x — *индикатрису скоростей* (для изотропной среды U_x — сфера). Будем считать, что индикатриса U_x выпукла и центрально-симметрична. Такая ситуация как раз и отвечает метрике $M(x, a)$, удовлетворяющей условиям «а» — «в»: в этом случае индикатриса имеет вид $U_x = \{a \mid M(x, a) = 1\}$, а расстояние между точками x и y в метрике M — это время распространения волны в описанной среде от точки x до точки y.

Мы будем рассматривать несколько более узкий класс метрик, требуя, чтобы индикатриса скоростей U_x была при любом $x \in \bar{G}$ гладкой и *строго выпуклой.* Соответствующие метрики $M(x, a)$ мы будем называть *финслеровыми* метриками.

Для финслеровых метрик верны все основные теоремы о геодезических (лучах), имеющие место для римановой метрики. Изложенный выше результат о различителях $\mathscr{D}$ и $\mathscr{H}$ тоже верен и в случае финслеровых метрик, и мы его сформулируем (в § 1) и докажем (в § 3) сразу для этого случая. В качестве следствия мы получим (в § 2), что *если две различные регулярные финслеровы метрики* M_1 *и* M_2 *пропорциональны, то они различаются своими годографами* (*так как для них* $\mathscr{D}(M_1, M_2) > 0$).

4. С задачей восстановления метрики по годографу тесно связана задача интегральной геометрии для семейства геодезических. Пусть в области $\bar{G}$

заданы финслерова метрика M и функция f. Предположим, что мы знаем интегралы от функции f по всем геодезическим метрики M (интегралы берутся по длине, определяемой метрикой M, или, более общо, с некоторым весом W). Надо выяснить, при каких условиях функция f восстанавливается по своим интегралам.

В § 2 мы точно формулируем задачу интегральной геометрии и выводим из основной теоремы § 1. что *если метрика M регулярна и вес W удовлетворяет некоторым (не ограничительным) условиям совместности с метрикой M, то функция f однозначно и устойчиво восстанавливается по своим интегралам с весом W вдоль геодезических метрики M.*

5. Основная теорема и следствия из нее формулируются и доказываются для *гладких* функций. При этом под гладкостью на открытом множестве мы понимаем бесконечную дифференцируемость, а под гладкостью на множестве с граничными точками — продолжимость до функции, гладкой в некоторой окрестности такого множества.

В дополнении (п. 3) объясняется, как перенести результаты на случай функций, дифференцируемых конечное число раз.

6. Несколько слов о связи этой работы с предыдущими. Р. Г. Мухометов доказал в [1, 2] теоремы единственности и устойчивости в задаче интегральной геометрии и в обратной кинематической задаче сейсмики на плоскости.

Опираясь на работы Р. Г. Мухометова, мы обобщили эти теоремы на n-мерный случай. В части, относящейся к задаче сейсмики, мы использовали также устное сообщение Г. Я. Бейлькина, любезно ознакомившего нас со своими исследованиями. Свои результаты мы сформулировали в заметке [3], которую предварительно опубликовали в виде препринта. Аналогичные (более частные) результаты получили независимо В. Г. Романов и Р. Г. Мухометов [4—6].

В [3] мы отметили, что некоторые утверждения в задаче интегральной геометрии можно получить как следствие из теоремы единственности и устойчивости в задаче сейсмики. Однако наиболее общий результат в задаче интегральной геометрии получить таким образом не удавалось, и он требовал отдельного (трудного) доказательства. Нам захотелось найти теорему, обобщающую все известные нам результаты. Так возникла основная теорема этой работы.

§ 1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

1. **Многообразия TG и $\mathfrak{N}$.** Обозначим через TG многообразие пар (x, a), где $x \in G$, a — ненулевой касательный вектор в точке x, и через $\mathfrak{N}$ многообразие пар (x, θ), где $x \in G$, θ — направление выхода из точки x (луч из 0 в касательном пространстве). Имеется естественная проекция TG в $\mathfrak{N}$. Аналогично определяются $T\bar{G}$ и $\bar{\mathfrak{N}}$ — только $x \in \bar{G}$.

Если в $\bar{G}$ выбрана система координат $(x_1, \ldots, x_n)$, то в каждом касательном пространстве естественно возникает система координат $(a_1, \ldots, a_n)$. В совокупности получается система координат $(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n)$ на многообразии $T\bar{G}$.

2. **Метрика M и форма η.** Пусть M — финслерова метрика в $\bar{G}$ (см. прил. I).

Иначе говоря, M — гладкая положительная функция на $T\bar{G}$, удовлетворяющая условиям:

а) $M(x, \lambda a) = |\lambda| M(x, a)$ при $\lambda \in \mathbf{R}$;

б) гессиан $\mathcal{G}_M = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M^2}{\partial a_i \partial a_j}$ положительно определен.

Сопоставим метрике M дифференциальную 1-форму η на $T\bar{G}$. В координатах (см. п. 1)

$$\eta = \Sigma \frac{\partial M}{\partial a_i} dx_i.$$

Можно показать (см. прил. II, п. 1), что эта форма корректно определена т. е. не зависит от выбора координат $(x_1, \ldots, x_n)$). При этом, поскольку функция M однородна по a, форма η определена на самом деле на многообразии $\overline{\mathfrak{N}}$ (см. прил. II, п. 2), где мы и будем ее рассматривать.

3. Ориентация $\overline{\mathfrak{N}}$. Форма объема d_MV. Финслеровой метрике M можно сопоставить (как и римановой метрике) форму объема d_MV в $\overline{G}$. Для этого сначала рассмотрим на $\overline{\mathfrak{N}}$ форму старшей степени (т. е. форму объема) $\omega_M = \eta \wedge (d\eta)^{n-1}$. Как показано в прил. II, п. 7, можно так выбрать ориентацию $\overline{\mathfrak{N}}$, что для любой метрики M форма ω_M будет *всюду положительна*. Такую ориентацию $\overline{\mathfrak{N}}$ назовем *правильной*. Форма объема d_MV в $\overline{G}$ получается из формы ω_M интегрированием по переменным θ (см. прил. II, п. 3).

В прил. II, п. 8 выведены явные формулы, выражающие ω_M и d_MV через M. В частности, показано, что для римановой метрики M форма d_MV отличается от стандартного объема dV множителем $n!\varkappa_n$, где $\varkappa_n$ — объем единичного шара в $\mathbf{R}^n$.

4. Различитель метрик $D(M_1, M_2)$. Пусть M_1, M_2 — две финслеровы метрики в $\overline{G}$. Определим число $\mathscr{D}(M_1, M_2)$, которое будем называть *различителем метрик* M_1 и M_2. Пусть η_1, η_2 — 1-формы на многообразии $\overline{\mathfrak{N}}$, отвечающие метрикам M_1 и M_2. Положим тогда (выбрав на $\overline{\mathfrak{N}}$ правильную ориентацию)

$$\mathscr{D}(M_1, M_2) = \int_{\overline{\mathfrak{N}}} (\eta_1 - \eta_2) \wedge [(d\eta_1)^{n-1} - (d\eta_2)^{n-1}].$$

5. Регулярные метрики. Финслерову метрику M назовем *регулярной*, если она удовлетворяет следующим условиям:

а) *отсутствие волноводов*: любая геодезическая метрики M диффеоморфна отрезку, оба ее конца лежат на Γ, остальные точки — внутри G;

б) *отсутствие фокусировок*: через любые две различные точки $x, y \in \overline{G}$ проходит ровно одна геодезическая; угол ее выхода из x гладко зависит от y при $x \neq y$.

6. Годограф. Для каждой пары точек $x, y \in \overline{G}$ обозначим через $l_M(x, y)$ расстояние между точками x и y в метрике M. Будем рассматривать l_M как функцию на $\overline{G} \times \overline{G}$.

Нетрудно проверить, что если метрика M регулярна, то $l_M(x, y)$ — длина дуги (единственной) геодезической, соединяющей x и y, и что при $x \neq y$ она гладко зависит от (x, y). Ограничение функции l_M на $\Gamma \times \Gamma$ будем называть *годографом метрики* M.

7. Форма Φ. Различитель годографов $\mathscr{H}(M_1, M_2)$. Для любой функции h на $\overline{G} \times \overline{G}$ дифференциал dh естественно разбивается в сумму двух слагаемых: $dh = d_xh + d_yh$. Они определяются таким образом: если $(x_1, \ldots, x_n)$ — координаты на первом сомножителе $\overline{G}$, а $(y_1, \ldots, y_n)$ — координаты на втором сомножителе $\overline{G}$, то $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ — координаты на $\overline{G} \times \overline{G}$ и

$$d_xh = \sum \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i, \qquad d_yh = \sum \frac{\partial h}{\partial y_i} dy_i.$$

Пусть M_1, M_2 — две регулярные финслеровы метрики в $\overline{G}$. Определим $(2n-2)$-форму $\Phi = \Phi(M_1, M_2)$ на $\overline{G} \times \overline{G}$. Положим

$$l_i(x, y) = l_{M_i}(x, y), \quad i = 1, 2; \quad r(x, y) = l_2(x, y) - l_1(x, y);$$

$$\Sigma = \sum_{p+q=n-2} (dd_xl_1)^p \wedge (dd_xl_2)^q; \qquad \varepsilon_n = (-1)^{n(n+1)/2}$$

и определим Φ:

$$\Phi = \varepsilon_n d_xr \wedge d_yr \wedge \Sigma.$$

Заметим, что ограничение формы Φ на $\Gamma \times \Gamma$ определяется ограничениями функций l_{M_1} и l_{M_2} на $\Gamma \times \Gamma$, т. е. годографами метрик M_1 и M_2.

Тем самым $\int\limits_{\Gamma\times\Gamma} \Phi(M_1, M_2)$ зависит только от годографов метрик M_1, M_2. При совпадении годографов он обращается в нуль, поэтому его можно использовать как характеристику близости годографов. Обозначим этот интеграл через $\mathscr{H}(M_1, M_2)$:

$$\mathscr{H}(M_1, M_2) = \int\limits_{\Gamma\times\Gamma} \Phi(M_1, M_2).$$

На $\Gamma \times \Gamma$ здесь выбрана естественная ориентация произведения: если γ_i — координаты на первом сомножителе Γ, а γ_i' — соответствующие координаты на втором сомножителе Γ, то система координат $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}, \gamma_1', \ldots, \gamma_{n-1}')$ считается положительной. Число $\mathscr{H}(M_1, M_2)$ естественно назвать различителем годографов метрик M_1 и M_2.

8. **Основная теорема.** *Пусть M_1, M_2 — две регулярные финслеровы метрики в $\bar{G}$. Тогда*

$\mathscr{H}(M_1, M_2) \geqslant \mathscr{D}(M_1, M_2)$.

Сформулированная теорема связывает неравенством две характеристики близости метрик M_1 и M_2. При этом важно, что $\mathscr{H}(M_1, M_2)$ выражается только через годографы M_1 и M_2, а $\mathscr{D}(M_1, M_2)$ определяется только локальными свойствами M_1 и M_2.

Применяя основную теорему в различных частных случаях, можно непосредственно из нее получить все известные в настоящее время теоремы единственности и устойчивости в обратной кинематической задаче сейсмики и в задаче интегральной геометрии для семейства геодезических. В § 2 мы выведем из нее все результаты, сформулированные нами для этих задач в [3], а тем самым и результаты, полученные в [4]—[6]. Доказательство основной теоремы будет дано в § 3.

§ 2. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Обратная кинематическая задача сейсмики для пропорциональных метрик

1. Как уже было сказано во введении, для однозначного восстановления метрики по годографу необходимо заранее ограничить класс рассматриваемых метрик. Фиксируем какую-нибудь финслерову метрику M и рассмотрим класс пропорциональных ей метрик. Мы докажем, что в этом классе каждая регулярная метрика однозначно и устойчиво определяется своим годографом.

Теорема 1. *Пусть M_1 и M_2 — финслеровы метрики, пропорциональные метрике M, т. е. $M_i(x, a) = h_i(x) M(x, a)$, где $h_i(x)$ — положительная функция, зависящая только от x $(i = 1, 2)$.*

Если метрики M_1 и M_2 регулярны, то имеет место оценка

$$\int\limits_{\bar{G}} (h_1 - h_2)^2 \sum_{p+q=n-2} h_1^p h_2^q d_M V \leqslant \mathscr{H}(M_1, M_2),$$

где $\mathscr{H}(M_1, M_2)$ — число, выражающееся через годографы l_1 и l_2 метрик M_1, M_2:

$$\mathscr{H}(M_1, M_2) = \varepsilon_n \int\limits_{\Gamma\times\Gamma} d_x(l_2 - l_1) \wedge d_y(l_2 - l_1) \wedge \sum_{p+q=n-2} (dd_x l_1)^p \wedge (dd_x l_2)^q.$$

В частности, если годографы метрик M_1 и M_2 совпадают, то $h_1 = h_2$, т. е. $M_1 = M_2$.

Пример. Рассмотрим случай изотропных метрик в R^3. Пусть $\bar{G}$ — замкнутая трехмерная область; (x_1, x_2, x_3) — координаты в $\bar{G}$; (γ_1, γ_2) — координаты на ее границе Γ; введем на $\Gamma \times \Gamma$ координаты $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1', \gamma_2')$, где (γ_1', γ_2') — координаты на втором сомножителе Γ. Через M обозначим стандартную евклидову метрику: $d_M l = (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)^{1/2}$.

Пусть $M_i = h_i(x) M$ — регулярные метрики, $l_i(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1', \gamma_2')$ — их годографы $(i = 1, 2)$ при $r = l_2 - l_1$, $s = l_2 + l_1$. Тогда общую оценку из теоремы 1 можно переписать в виде

$$8\pi \int_{\bar G} (h_1 - h_2)^2 (h_1 + h_2)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \leqslant \int_{\Gamma\times\Gamma} \left(\frac{\partial r}{\partial \gamma_1} \frac{\partial r}{\partial \gamma_1'} \frac{\partial^2 s}{\partial \gamma_2 \partial \gamma_2'} - \frac{\partial r}{\partial \gamma_1} \frac{\partial r}{\partial \gamma_2'} \frac{\partial^2 s}{\partial \gamma_2 \partial \gamma_1'} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial r}{\partial \gamma_2} \frac{\partial r}{\partial \gamma_1'} \frac{\partial^2 s}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2'} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_2} \frac{\partial r}{\partial \gamma_2'} \frac{\partial^2 s}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_1'} \right) d\gamma_1\, d\gamma_2\, d\gamma_1'\, d\gamma_2'.$$

2. Прежде чем перейти к выводу теоремы 1, сформулируем одно любопытное следствие, вытекающее из нее. Пусть M — финслерова метрика в G. Назовем диффеоморфизм области $\bar G$ в себя *M-конформным*, если он переводит метрику M в пропорциональную.

Следствие из теоремы 1. *Если M — регулярная метрика, то любой M-конформный диффеоморфизм области $\bar G$ в себя, тождественный на* Γ, *является тождественным всюду в* $\bar G$.

3. Вывод теоремы 1. Выпишем явную формулу для различителя $\mathscr{D}(M_1, M_2)$ двух пропорциональных метрик. Имеем: $\eta_1 = h_1\eta$, $\eta_2 = h_2\eta$. Докажем, что

$$(\eta_1 - \eta_2) \wedge [(d\eta_1)^{n-1} - (d\eta_2)^{n-1}] = (h_1 - h_2)(h_1^{n-1} - h_2^{n-1})\, \eta \wedge (d\eta)^{n-1} =$$
$$= (h_1 - h_2)^2 \sum_{p+q=n-2} h_1^p h_2^q \eta \wedge (d\eta)^{n-1}.$$

Поскольку $\eta_1 - \eta_2 = (h_1 - h_2)\eta$ и так как $\eta \wedge \eta = 0$, то достаточно проверить, что форма $(d\eta_1)^{n-1} - (d\eta_2)^{n-1}$ отличается от формы $(h_1^{n-1} - h_2^{n-1}) \cdot (d\eta)^{n-1}$ на форму, кратную η. А это сразу вытекает из того, что $d\eta_i - h_i d\eta$ делится на η (ибо $d\eta_i = h_i d\eta + h_i \wedge \eta$).

Таким образом,

$$\mathscr{D}(M_1, M_2) = \int_{\mathfrak{N}} (h_1 - h_2)^2 \sum_{p+q=n-2} h_1^p h_2^q \eta \wedge (d\eta)^{n-1}.$$

Поскольку функции h_1 и h_2 не зависят от переменных θ, то, проинтегрировав по θ, получим

$$\mathscr{D}(M_1, M_2) = \int_{\bar G} (h_1 - h_2)^2 \sum_{p+q=n-2} h_1^p h_2^q d_M V.$$

Мы видим, что *различитель пропорциональных метрик неотрицателен, причем из равенства $\mathscr{D}(M_1, M_2) = 0$ вытекает, что $h_1 = h_2$, т. е. $M_1 = M_2$.*

Подставляя формулу для $\mathscr{D}(M_1, M_2)$ в неравенство $\mathscr{D}(M_1, M_2) \leqslant \mathscr{H}(M_1, M_2)$ из основной теоремы § 1, получаем теорему 1.

Задача интегральной геометрии для семейства геодезических

4. С задачей о восстановлении метрики по годографу тесно связана задача интегральной геометрии, которая ставится следующим образом.

Пусть в замкнутой области $\bar G$ заданы некоторое семейство кривых $\mathscr{K}$ и вес W.

Напомним, что весом называется гладкая функция на $T\bar G$, такая, что $W(x, \lambda a) = |\lambda| W(x, a)$; с заданным весом можно интегрировать функции по кривым: если l — кривая в $\bar G$ и $t \to l(t)$ — некоторая ее параметризация, то интеграл функции f по кривой l с весом W определяется формулой

$$\int_l f d_W l = \int f(l(t))\, W\left(l(t), \frac{d}{dt} l(t)\right) dt$$

(см. прил. I, п. 4).

Нужно найти условия, при которых любая (гладкая) функция f в $\bar G$ однозначно определяется своими интегралами с весом W по кривым семейства $\mathscr{K}$.

Мы будем рассматривать случай, когда *семейство $\mathscr{K}$ является семейством всех геодезических некоторой регулярной финслеровой метрики M.*

Обозначим через η форму на $\mathfrak{N}$, отвечающую метрике M, и через σ форму на $\mathfrak{N}$, отвечающую весу W (форма σ определяется аналогично форме η: сначала она задается на $T\bar{G}$ формулой

$$\sigma = \sum \frac{\partial W}{\partial a_i} dx_i,$$

а затем переносится на $\bar{\mathfrak{N}}$). Рассмотрим на $\bar{\mathfrak{N}}$ форму объема

$$\omega_{M,W} = \sigma \wedge d\sigma \wedge (d\eta)^{n-2}.$$

Интегрируя ее по переменным θ, получаем форму объема в $\bar{G}$, которую обозначим через $d_{M,W}V$. В прил. II, п. 9 для $d_{M,W}V$ выводятся явные формулы. Отметим, что в отличие от формы объема $d_M V$, индуцированной метрикой M (см. § 1, п. 3), форма $d_{M,W}V$ не обязательно положительна.

Определение. Если форма $d_{M,W}V$ почти всюду в $\bar{G}$ положительна, назовем пару (M, W) *допустимой*.

В случае $W = M$ имеем $\omega_{M,W} = \omega_M = \eta \wedge (d\eta)^{n-1}$ — форма $d_{M,W}V$ совпадает с положительной формой объема $d_M V$ в $\bar{G}$. Тем самым пара (M, M) допустима.

Теорема 2. *Пусть M — регулярная финслерова метрика и W — вес в $\bar{G}$. Предположим, что пара (M, W) допустима. Тогда каждая гладкая функция f в $\bar{G}$ однозначно определяется своими интегралами по геодезическим метрики M с весом W.*

5. Эта теорема вытекает из более точной теоремы устойчивости. Обозначим через $k_{x,y}$ дугу геодезической метрики M, соединяющую точки x и y, через $l(x, y)$ ее длину в метрике M:

$$l(x, y) = \int_{k_{x,y}} d_M l,$$

и через $g(x, y)$ интеграл от f по этой дуге с весом W:

$$g(x, y) = \int_{k_{x,y}} f d_W l.$$

Рассмотрим на $\Gamma \times \Gamma$ дифференциальную $(2n - 2)$-форму

$$\Psi = \varepsilon_n d_x g \wedge d_y g \wedge (dd_x l)^{n-2}.$$

Теорема 3. *Для любой регулярной метрики M, любого веса W и любой гладкой функции f в $\bar{G}$ справедливо неравенство:*

$$\int_{\bar{G}} f^2 d_{M,W} V \leqslant \iint_{\Gamma \times \Gamma} \Psi.$$

Для *допустимых* пар (M, W) это неравенство дает *оценку устойчивости* в задаче восстановления f в $\bar{G}$ по g на $\Gamma \times \Gamma$. В частности, из него следует теорема 2: *если $g = 0$ на $\Gamma \times \Gamma$, то $f = 0$ в $\bar{G}$.*

Замечание. При $n = 2$ формы $\omega_{M,W}$ и $d_{M,W}V$ не зависят от M и их можно обозначить через ω_W и $d_W V$. Если элемент площади $d_W V$ почти всюду в $\bar{G}$ положителен, назовем вес W *допустимым*. При $n = 2$ неравенство теоремы 3 принимает вид

$$\int_{\bar{G}} f^2 d_W V \leqslant \int_{\Gamma \times \Gamma} d_y g \wedge d_x g.$$

Можно показать, что оно справедливо не только для всякого семейства геодезических (любой регулярной финслеровой метрики), но и для любого *регулярного семейства $\mathcal{K}$* (определение регулярного семейства кривых см. в [3]), при этом под $k_{x,y}$ в формуле для $g(x, y)$ нужно понимать дугу кривой из $\mathcal{K}$, соединяющую x и y. Для допустимого веса это неравенство дает теорему единственности и устойчивости в задаче интегральной геометрии для произвольного регулярного семейства $\mathcal{K}$. В [1] та же теорема доказана при бо́льших ограничениях на вес W.

6. Вывод теоремы 3. Рассмотрим семейство $M_\varepsilon = M + \varepsilon f W$. При ε, близких к нулю, M_ε является регулярной финслеровой метрикой. Покажем, что

$$\mathcal{D}(M, M_\varepsilon) = \varepsilon^2 (n-1) \int\limits_{\overline{G}} f^2 d_{M,\,W} V + O(\varepsilon^3),$$

$$\mathcal{H}(M, M_\varepsilon) = \varepsilon^2 (n-1) \int\limits_{\Gamma\times\Gamma} \Psi + O(\varepsilon^3).$$

Теорема 3 сразу следует из этих формул и из неравенства $\mathcal{D}(M, M_\varepsilon) \leqslant \mathcal{H}(M, M_\varepsilon)$ основной теоремы § 1.

Выведем формулу для $\mathcal{D}(M, M_\varepsilon)$. Пусть η_ε — 1-форма на $\overline{\mathfrak{R}}$, отвечающая M_ε. Ясно, что $\eta_\varepsilon = \eta + \varepsilon f \sigma$. Поэтому

$$\mathcal{D}(M, M_\varepsilon) = \varepsilon^2 (n-1) \int\limits_{\mathfrak{R}} f\sigma \wedge d(f\sigma) \wedge (d\eta)^{n-2} + O(\varepsilon^3).$$

Поскольку $d(f\sigma) = f d\sigma + df \wedge \sigma$ и $\sigma \wedge \sigma = 0$, то $\sigma \wedge d(f\sigma) = f\sigma \wedge d\sigma$, и подынтегральное выражение равно $f^2 \sigma \wedge d\sigma \wedge (d\eta)^{n-2}$. Так как функция f не зависит от θ, то, проинтегрировав по θ, имеем

$$\mathcal{D}(M, M_\varepsilon) = \varepsilon^2 (n-1) \int\limits_{\overline{G}} f^2 d_{M,\,W} V + O(\varepsilon^3).$$

При выводе формулы для $\mathcal{H}(M, M_\varepsilon)$ нам понадобится следующая лемма.

Л е м м а. *Обозначим через $l_\varepsilon(x, y)$ расстояние между точками $x, y \in \overline{G}$ в метрике M_ε. Тогда имеет место разложение*

$$l_\varepsilon = l + \varepsilon g + O(\varepsilon^2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Обозначим через $k^\varepsilon_{x,y}$ дугу геодезической метрики M_ε, соединяющую x и y. Используя регулярность метрики M, можно показать, что при малых ε эта геодезическая гладко зависит от ε. Иначе говоря, найдется гладкая функция $x(\varepsilon, t)$, где $t \in [0, 1]$, которая при каждом достаточно малом ε задает параметризацию дуги $k^\varepsilon_{x,y}$.

По определению имеем

$$l_\varepsilon(x, y) = \int\limits_0^1 M_\varepsilon(x(\varepsilon, t), \dot{x}(\varepsilon, t))\, dt.$$

Разложению $M_\varepsilon = M + \varepsilon f W$ отвечает разложение функции l_ε в сумму $l_\varepsilon = \bar{l}_\varepsilon + \varepsilon g_\varepsilon$, где

$$\bar{l}_\varepsilon = \int\limits_0^1 M(x(\varepsilon, t), \dot{x}(\varepsilon, t))\, dt,$$

$$g_\varepsilon = \int\limits_0^1 f(x(\varepsilon, t)) W(x(\varepsilon, t), \dot{x}(\varepsilon, t))\, dt.$$

Ясно, что $\bar{l}_\varepsilon$ — это длина дуги $k^\varepsilon_{x,y}$ в метрике M. Значит, эта функция принимает при $\varepsilon = 0$ минимальное значение (ибо $k_{x,y}$ — геодезическая метрики M), и, поскольку она гладко зависит от ε, то $\frac{\partial}{\partial\varepsilon} \bar{l}_\varepsilon |_{\varepsilon=0} = 0$.

Далее $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\varepsilon g_\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = g_0 = g(x, y)$. Таким образом, $\frac{\partial}{\partial\varepsilon} l_\varepsilon |_{\varepsilon=0} = g$, т. е. $l_\varepsilon = l + \varepsilon g + O(\varepsilon^2)$. Лемма доказана.

Выведем теперь формулу для $\mathcal{H}(M, M_\varepsilon)$. Положим $r_\varepsilon = l_\varepsilon - l$, $\Phi_\varepsilon = \Phi(M, M_\varepsilon)$. По определению (см. § 1, п. 7)

$$\Phi_\varepsilon = \varepsilon_n d_x r \wedge d_y r \wedge \Sigma,$$

где $\Sigma = \sum\limits_{p+q=n-2} (dd_x l)^p \wedge (dd_x l_\varepsilon)^q$. Из разложения $l_\varepsilon = l + \varepsilon g + O(\varepsilon^2)$ имеем [1]:

$$d_x r_\varepsilon = \varepsilon d_x g + O(\varepsilon^2), \qquad d_y r_\varepsilon = \varepsilon d_y g + O(\varepsilon^2), \qquad dd_x l_\varepsilon = dd_x l + O(\varepsilon).$$

---

[1] Законность дифференцирования и интегрирования выражений, зависящих от параметров ε, обоснована в дополнении (п. 2).

Отсюда

$$\Phi_\varepsilon = \varepsilon^2 (n-1)\, \varepsilon_n d_x g \wedge d_y g \wedge (dd_x l)^{n-2} + O(\varepsilon^3) = \varepsilon^2 (n-1)\, \Psi + O(\varepsilon^3).$$

Интегрируя, получаем искомую формулу для $\mathcal{H}(M, M_\varepsilon)$:

$$\mathcal{H}(M, M_\varepsilon) = \int_{\Gamma\times\Gamma} \Phi_\varepsilon = \varepsilon^2 (n-1) \int_{\Gamma\times\Gamma} \Psi + O(\varepsilon^3),$$

что и завершает доказательство.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

1. **Отображение $\varkappa_M$.** Пусть M — регулярная финслерова метрика в $\overline{G}$. Тогда для каждой пары различных точек $x, y \in \overline{G}$, имеется ровно одна геодезическая, соединяющая эти точки. Обозначим через $k_{x,y}$ ее дугу с концами x, y, через θ направление выхода $k_{x,y}$ из точки x и через $\varkappa = \varkappa_M$ отображение, переводящее пару $(x, y) \in \overline{G} \times \overline{G}$, $x \neq y$, в пару $(x, \theta) \in \overline{\mathfrak{R}}$.

2. **Форма φ.** Пусть $\varphi = \varkappa^* (\eta)$ — прообраз формы η при отображении $\varkappa$.

Л е м м а 1. *$\varphi = -d_x l$, где $l = l_M(x, y)$ — длина $k_{x,y}$.*

Лемма 1 является аналитическим выражением принципа ортогональности луча фронту волны (см. прил. 1, п. 6). Ее доказательство мы проведем в конце § 3.

3. **Преобразование основного неравенства.** Воспользовавшись формулой Стокса [1], преобразуем левую часть неравенства основной теоремы:

$$\mathcal{H}(M_1, M_2) = \int_{\Gamma\times\Gamma} \Phi = \int_{G\times\Gamma} d\Phi;$$

ориентация на $G \times \Gamma$ выбирается при этом так: фиксируются ориентация на G и согласованная с ней ориентация на Γ, и на $G \times \Gamma$ вводится ориентация произведения.

Вычислим дифференциал $d\Phi$:

$$d\Phi = \varepsilon_n dd_x r \wedge d_y r \wedge \Sigma - \varepsilon_n d_x r \wedge dd_y r \wedge \Sigma.$$

Первое слагаемое равно нулю на $G \times \Gamma$ (ибо имеет n-ю степень по dy). Поэтому с учетом тождества $dd_y r = d(dr - d_x r) = -dd_x r$ получаем

$$d\Phi = \varepsilon_n d_x r \wedge dd_x r \wedge \Sigma.$$

В соответствии с леммой 1 положим $\varphi_1 = -d_x l_1$, $\varphi_2 = -d_x l_2$. Тогда $d_x r = \varphi_1 - \varphi_2$, $dd_x r = d\varphi_1 - d\varphi_2$, $\Sigma = (-1)^n \sum_{p+q=n-2} (d\varphi_1)^p \wedge (d\varphi_2)^q$, откуда

$$d\Phi = \varepsilon_n' (\varphi_1 - \varphi_2) \wedge [(d\varphi_1)^{n-1} - (d\varphi_2)^{n-1}], \qquad \varepsilon_n' = (-1)^{n(n-1)/2}.$$

Таким образом, доказательство основной теоремы свелось к проверке неравенства

$$\varepsilon_n' \int_{G\times\Gamma} (\varphi_1 - \varphi_2) \wedge [(d\varphi_1)^{n-1} - (d\varphi_2)^{n-1}] \geqslant \int_{\mathfrak{R}} (\eta_1 - \eta_2) \wedge [(d\eta_1)^{n-1} - (d\eta_2)^{n-1}].$$

Его справедливость сразу вытекает из следующей леммы.

Л е м м а 2. *Положим при $i = 1, 2$; $j = 1, 2$*

$$A_{ij} = \varepsilon_n' \int_{G\times\Gamma} \varphi_i \wedge (d\varphi_j)^{n-1}, \qquad B_{ij} = \int_{\mathfrak{R}} \eta_i \wedge (d\eta_j)^{n-1}.$$

Тогда а) $A_{11} = B_{11}$, $A_{22} = B_{22}$; *б)* $A_{12} \leqslant B_{12}$, $A_{21} \leqslant B_{21}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 2. 1) Докажем, что $A_{11} = B_{11}$, $A_{21} \leqslant B_{21}$ (остальные соотношения доказываются аналогично). Так как метрики M_1 и M_2 регулярны и так как при $x \in G$, $y \in \Gamma$ автоматически выполняется условие $x \neq y$, то отображения $\varkappa_{M_1}$, $\varkappa_{M_2}$ (см. п. 1) задают диффеомор-

---

[1] Ее применимость обоснована в дополнении (п. 1).

физмы

$$\varkappa_1, \varkappa_2\colon G \times \Gamma \to \mathfrak{N}.$$

Форма φ_i переходит при диффеоморфизме $\varkappa_i$ в η_i (согласно п. 2):

$$\varphi_i = \varkappa_i^* (\eta_i), \quad i = 1, 2;$$

прообраз формы φ_2 при диффеоморфизме $\varkappa_1^{-1}$ обозначим через η_2':

$$\eta_2' = (\varkappa_1^{-1})^* (\varphi_2) = (\varkappa_2 \varkappa_1^{-1})^* (\eta_2), \quad \varphi_2 = \varkappa_1^* (\eta_2').$$

Диффеоморфизм $\varkappa_1$ переводит ориентацию на $G \times \Gamma$ в *естественную* ориентацию на $\mathfrak{N}$, отличающуюся от *правильной* ориентации на $\mathfrak{N}$ (см. прил. II, п. 7) знаком $\varepsilon_n' = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Поэтому

$$A_{11} = \varepsilon_n' \int\limits_{G \times \Gamma} \varphi_1 \wedge (d\varphi_1)^{n-1} = \varepsilon_n' \int\limits_{G \times \Gamma} \varkappa_1^* (\eta_1) \wedge [d\varkappa_1^* (\eta_1)]^{n-1} =$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{N}} \eta_1 \wedge (d\eta_1)^{n-1} = B_{11},$$

$$A_{21} = \varepsilon_n' \int\limits_{G \times \Gamma} \varphi_2 \wedge (d\varphi_1)^{n-1} = \varepsilon_n' \int\limits_{G \times \Gamma} \varkappa_1^* (\eta_2') \wedge [d\varkappa_1^* (\eta_1)]^{n-1} = \int\limits_{\mathfrak{N}} \eta_2' \wedge (d\eta_1)^{n-1}.$$

Таким образом, равенство $A_{11} = B_{11}$ доказано, а для доказательства неравенства $A_{21} \leqslant B_{21}$ остается установить, что

$$\int\limits_{\mathfrak{N}} \eta_2' \wedge (d\eta_1)^{n-1} \leqslant \int\limits_{\mathfrak{N}} \eta_2 \wedge (d\eta_1)^{n-1} = B_{21}.$$

2) Покажем, что последнее неравенство справедливо не только для интегралов, но и для форм, стоящих под знаком интеграла:

$$\eta_2' \wedge (d\eta_1)^{n-1} \leqslant \eta_2 \wedge (d\eta_1)^{n-1}.$$

Как формы старшей степени $(2n-1)$ они пропорциональны форме

$$\omega = \omega_{M_1} = \eta_1 \wedge (d\eta_1)^{n-1},$$

т. е. имеют вид $k'\omega$ и $k\omega$. Поскольку форма ω всюду положительна при правильной ориентации многообразия $\mathfrak{N}$ (см. прил. II, п. 7), то достаточно проверить, что $k' \leqslant k$ в каждой точке $(x, \theta) \in \mathfrak{N}$.

3) Формы η_2 и η_2' содержат только дифференциалы dx_i. Пусть η — произвольная форма на $\mathfrak{N}$ такого вида:

$$\eta = \sum f_i (x, \theta)\, dx_i.$$

Тогда она определяет в каждой точке (x, θ) ковектор

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}_{(x,\theta)} = \sum f_i (x, \theta)\, dx_i \in T_x^* G.$$

Обозначим через ω_η форму $\eta \wedge (d\eta_1)^{n-1}$ на $\mathfrak{N}$. Как форма старшей степени она пропорциональна форме ω: $\omega_\eta = k_\eta (x, \theta)\, \omega$. В частности, $k' = k_{\eta_2'}$, $k = k_{\eta_2}$.
Поэтому неравенство $k' \leqslant k$ сразу вытекает из следующих двух формул.

Фиксируем точку $(x, \theta) \in \mathfrak{N}$ и точку $a \neq 0$ на луче θ. Тогда

$$k_\eta (x, \theta) = \bar{\eta} (a) / \bar{\eta}_1 (a), \tag{*}$$

$$\bar{\eta}_2' (a) \leqslant \bar{\eta}_2 (a). \tag{**}$$

З а м е ч а н и е. Разумеется, $\bar{\eta}_1 (a) > 0$.

4) Введем форму $\zeta = \eta - (\bar{\eta} (a) / \bar{\eta}_1 (a))\, \eta_1$. Так как $\omega_\zeta = \omega_\eta - (\bar{\eta} (a) / \bar{\eta}_1 (a))\, \omega$, то для доказательства формулы (*) достаточно проверить, что $\omega_\zeta = 0$.

Введем на TG координаты $(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n)$ и, подняв формы η, η_1, ω_η и ω на TG, распишем их в этих координатах. Рассмотрим в касательном пространстве $T_{(x,a)} (TG)$ вектор $X = \sum a_i E_{x_i}$, где E_{x_i} — единичный вектор в направлении x_i. Тогда при $a = (a_1, \ldots, a_n)$, очевидно, $\eta(X) = \bar{\eta}(a) = \Sigma a_i f_i$ и, в частности, $\eta_1(X) = \bar{\eta}_1(a)$. Тем самым $\zeta(X) = 0$, иначе говоря, вектор X аннулирует форму ζ (см. прил. II, п. 5). Он же аннулирует и форму $d_a\eta_1$, где d_a — дифференциал по переменным a (см. прил. II, п. 8).

Так же как в прил. II, п. 4, проверяется, что форму $\omega_\zeta = \zeta \wedge (d\eta_1)^{n-1}$ можно записать в виде $\omega_\zeta = \zeta \wedge (d_a\eta_1)^{n-1}$. Поскольку в этом произведении все сомножители аннулируются вектором X, то и форма ω_ζ аннулируется вектором X.

Рассмотрим вектор $X' \in T_{(x,\theta)}\mathfrak{N}$, являющийся образом вектора X при проекции $TG \to \mathfrak{N}$. Из доказанного вытекает, что X' аннулирует форму старшей степени ω_ζ на $\mathfrak{N}$. Так как при этом $X' \neq 0$, то $\omega_\zeta = 0$ в точке (x, θ), что и требовалось доказать.

5) Докажем формулу (**). Рассмотрим диффеоморфизм $\varkappa' = \varkappa_2\varkappa_1^{-1}$ многообразия $\mathfrak{N}$ на себя, переводящий точку (x, θ) в точку (x, θ'). Подробнее: если $y \in \Gamma$ — конец геодезической метрики M_1, выходящей из точки $x \in G$ под углом θ, то θ' — направление выхода из той же точки x геодезической метрики M_2, соединяющей x с той же точкой y.

Фиксировав точку $(x, \theta) \in \mathfrak{N}$, мы тем самым фиксировали точку $x \in G$ и два направления: θ и θ'. Ясно, что $\bar{\eta}_2 = \eta_\theta$, $\bar{\eta}_2' = \eta_{\theta'}$, где η_θ и $\eta_{\theta'}$ — ковекторы, отвечающие лучам θ и θ' согласно конструкции п. 3 прил. I (при $M = M_2$). Метрика M_2 задает на пространстве T_xG весовой овалоид U_2. Обозначим через a точку пересечения луча θ с этим овалоидом. Тогда (по п. 3 прил. I)

$$\eta_\theta(a) = 1, \quad \eta_{\theta'}(a) \leqslant 1,$$

откуда следует формула (**). Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 1. Обе сравниваемые формы φ и $-d_xl$ являются дифференциальными 1-формами на $\bar{G} \times \bar{G}$ (определенными вне диагонали, т. е. при $x \neq y$). Обе они содержат только дифференциалы dx_i (но не dy_i). Поэтому их естественно интерпретировать в каждой точке (x, y) как элементы пространства $T_x^*\bar{G}$, сопряженного касательному пространству $T_x\bar{G}$.

Пусть точки x и y соединены геодезической, выходящей из x в направлении θ. Метрика M задает весовой овалоид U на $T_x\bar{G}$. Обозначим через a точку пересечения луча θ с этим овалоидом, через Π_a — плоскость, касательную к U в точке a, и через Π_0 — плоскость, параллельную Π_a и проходящую в T_xG через начало координат.

По определению φ (как прообраза η)

$$\varphi(a) = 1, \quad \varphi|_{\Pi_0} = 0.$$

Форма d_xl на векторе a равна -1 (по теореме Ньютона — Лейбница), ибо $M(a) = 1$. На любом векторе $b \in \Pi_0$ эта форма обращается в нуль в силу ортогональности луча фронту волны (см. прил. I, п. 6). Таким образом, $\varphi = -d_xl$. Лемма 1 доказана, а вместе с ней полностью доказана и основная теорема.

ДОПОЛНЕНИЕ. ВОПРОСЫ ГЛАДКОСТИ

1. Применимость формулы Стокса. В § 3 мы применили формулу Стокса:

$$\int_{\Gamma\times\Gamma} \Phi = \int_{G\times\Gamma} d\Phi.$$

Так как форма Φ — не гладкая (ее гладкость нарушается в точках вида (x, x)), то применимость этой формулы требует обоснования.

Введем на $\bar{G} \times \bar{G}$ вместо координат (x, y) новые (полярные) координаты (x, ρ, α), где

$$\rho = \left[\sum (y_i - x_i)^2\right]^{1/2}, \quad \alpha = (y - x)/\rho$$

— вектор единичной сферы S^{n-1}. Более формально: рассмотрим многообразие $\mathfrak{M}$, состоящее из троек (x, ρ, α), где $x \in \bar{G}$, $\rho \geqslant 0$, $\alpha \in S^{n-1}$, таких, что $x + \rho\alpha \in \bar{G}$, и зададим отображение $\pi: \mathfrak{M} \to \bar{G} \times \bar{G}$ формулой

$$\pi(x, \rho, \alpha) = (x, x + \rho\alpha).$$

Рассмотрим в $\mathfrak{M}$ и $\bar{G} \times \bar{G}$ открытые подмножества:

$$\mathfrak{M}_0 = \{(x, \rho, \alpha) \in \mathfrak{M} \mid \rho > 0\},$$

$$(\bar{G} \times \bar{G})_0 = \{(x, y) \in \bar{G} \times \bar{G} \mid x \neq y\}.$$

Тогда π является диффеоморфизмом $\mathfrak{M}_0$ на $(\bar{G} \times \bar{G})_0$.

Определение. Пусть l — функция на $(\bar{G} \times \bar{G})_0$. Будем называть ее *продолжаемой на* $\mathfrak{M}$, если существует гладкая функция l^* на $\mathfrak{M}$, совпадающая на $\mathfrak{M}_0$ с прообразом l:

$$l^*(x, \rho, \alpha) = l(\pi(x, \rho, \alpha)) \text{ при } \rho > 0.$$

Функцию l^* на $\mathfrak{M}$ назовем *продолжением* функции l. Аналогично определяются продолжения дифференциальных форм с $(\bar{G} \times \bar{G})_0$ на $\mathfrak{M}$.

Лемма 1. *Пусть M — регулярная финслерова метрика в $\bar{G}$ и $l(x, y)$ — расстояние между точками x и y в метрике M. Тогда l продолжаема на $\mathfrak{M}$.*

Для доказательства леммы 1 введем на многообразии $\mathfrak{M}$ другую систему координат (x, s, θ), где s — расстояние между точками x и $y = x + \rho\alpha$ в метрике M (т. е. $s = l(x, y)$), а θ — направление выхода из точки x дуги геодезической $k_{x,y}$, соединяющей точки x и y; мы будем интерпретировать θ как вектор единичной сферы S^{n-1} и при $s = 0$ положим $\theta = \alpha$.

Поскольку $l^* = s$, то лемма 1 вытекает из следующей более общей леммы.

Лемма 2. *Переход от координат (x, s, θ) к координатам (x, ρ, α) является гладким в обе стороны.*

Доказательство. Докажем, что функции x, ρ, α гладко зависят от (x, s, θ).

Ясно, что функции x_i гладко зависят от (x, s, θ). Так как геодезические метрики M описываются дифференциальными уравнениями второго порядка, то функции y_i тоже гладко зависят от (x, s, θ). Поэтому функция $\rho^2 = \sum (y_i - x_i)^2$ гладко зависит от (x, s, θ).

Легко видеть, что функция ρ/s при $s \to 0$ имеет ненулевой предел, равный $M^{-1}(x, \theta)$. Поэтому из леммы Адамара[1] вытекает, что $\rho^2 = s^2 h(x, s, \theta)$, где h — некоторая гладкая функция, не обращающаяся в нуль при $s = 0$. Так как метрика M регулярна, то $\rho \neq 0$ при $s \neq 0$, т. е. функция h нигде не обращается в нуль. Но тогда функция $h^{1/2}$ тоже гладко зависит от (x, s, θ). Поэтому и функция $\rho = sh^{1/2}$ гладко зависит от (x, s, θ).

Далее, применяя лемму Адамара к вектор-функции $y - x$, получаем, что $y - x = sz$, где z — гладкая вектор-функция. Поэтому

$$\alpha = \frac{y - x}{\rho} = \frac{y - x}{s} \frac{s}{\rho} = zh^{-1/2}$$

гладко зависит от (x, s, θ).

Итак, мы проверили, что координаты (x, ρ, α) гладко зависят от координат (x, s, θ). Чтобы проверить гладкость обратного перехода, воспользуемся теоремой о неявной функции. Нам достаточно проверить, что якобиан $J = D(x, \rho, \alpha)/D(x, s, \theta)$ нигде не обращается в нуль.

При $s \neq 0$ якобиан $D(x, y)/D(x, s, \theta) \neq 0$ в силу регулярности метрики M, а $D(x, \rho, \alpha)/D(x, y) \neq 0$, ибо $\rho \neq 0$, так что $J \neq 0$.

Пусть теперь $s = 0$. Так как x не зависит от s, θ, то $J = D(\rho, \alpha)/D(s, \theta)$. Далее, если $s = 0$, то $\rho \equiv 0$, т. е. $\partial\rho/\partial\theta \equiv 0$, так что $J = \frac{\partial\rho}{\partial s}\frac{D(\alpha)}{D(\theta)}$. Поскольку при $s = 0$ по определению $\alpha = \theta$, то $D(\alpha)/D(\theta) = 1$, так что $J = \partial\rho/\partial s = h^{1/2} \neq 0$.

---

[1] Напомним формулировку леммы Адамара. Пусть $f(z_1, \ldots, z_n, t)$ — гладкая функция, причем $f(z_1, \ldots, z_n, 0) \equiv 0$. Тогда найдется такая гладкая функция $g(z_1, \ldots, z_n, t)$, что $f = tg$.

Леммы 1 и 2 доказаны.

Мы доказали, что функция l является гладкой в координатах (x, ρ, α). В § 3 мы рассмотрели 1-форму $\varphi = -d_x l$ на $\bar{G} \times \bar{G}$, определенную при $x \neq y$. Оказывается, в координатах (x, ρ, α) она является всюду гладкой формой.

Лемма 3. *Форма $\varphi = -d_x l$ продолжаема на $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Так как $d_x l = dl - d_y l$, то достаточно проверить, что продолжаема форма $d_y l$. По определению

$$d_y l = \sum \frac{\partial l}{\partial y_i} dy_i.$$

Поскольку y_i — гладкие функции на $\mathfrak{M}$, то dy_i — гладкие формы на $\mathfrak{M}$, так что достаточно проверить, что функции $\partial l/\partial y_i$ продолжаемы на $\mathfrak{M}$.

Используя производную сложной функции, запишем

$$\frac{\partial l}{\partial y_i} = \frac{\partial l}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y_i} + \frac{\partial l}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y_i}.$$

(Здесь $\frac{\partial l}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y_i}$ — краткая запись выражения $\sum \frac{\partial l}{\partial \alpha_j}\frac{\partial \alpha_j}{\partial y_i}$, где α_j — какие-нибудь локальные координаты на S^{n-1}.) Так как l — гладкая функция от (x, ρ, α) и $l = 0$ при $\rho = 0$, то l делится на ρ, откуда $\partial l/\partial \alpha = \rho f(x, \rho, \alpha)$, где f — некоторая гладкая функция. Поэтому достаточно проверить, что $\partial\rho/\partial y_i$ и $\rho\partial\alpha/\partial y_i$ — гладкие функции от (x, ρ, α). Имеем

$$\rho\frac{\partial \rho}{\partial y_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial \rho^2}{\partial y_i} = y_i - x_i$$

или в векторной форме $\partial\rho/\partial y = \alpha$, так что $\partial\rho/\partial y_i$ — гладкая функция на $\mathfrak{M}$.

Далее, $\rho\frac{\partial \alpha}{\partial y_i} = \frac{\partial(\rho\alpha)}{\partial y_i} - \frac{\partial \rho}{\partial y_i}\alpha$; поскольку $\rho\alpha = y - x$, то $\partial(\rho\alpha)/\partial y_i$ — гладкая вектор-функция, так что $\rho\partial\alpha/\partial y_i$ — также гладкая вектор-функция. Лемма 3 доказана.

Из лемм 1, 3 и определения формы Φ:

$$\Phi = \varepsilon_n d_x(l_2 - l_1) \wedge d_y(l_2 - l_1) \wedge \sum_{p+q=n-2} (dd_x l_1)^p \wedge (dd_x l_2)^q,$$

вытекает, что она продолжаема до гладкой формы Φ^* на всем многообразии $\mathfrak{M}$.

Рассмотрим в $\mathfrak{M}$ подмногообразия:

$$F = \{(x, \rho, \alpha) \mid x \in G,\ x + \rho\alpha \in \Gamma\},$$

$$H = \{(x, \rho, \alpha) \mid x \in \Gamma,\ x + \rho\alpha \in \Gamma,\ \rho \neq 0\},$$

$I = \{(x, \rho, \alpha) \mid x \in \Gamma$, α — единичный вектор, направленный строго наружу, если приложить его к точке $x\}$,

а также их замыкания $\bar{F}, \bar{H}, \bar{I}$.

Легко проверить, что $\bar{F}$ является многообразием с кусочно-гладким краем, причем край $\partial\bar{F}$ совпадает с $\bar{H} \cup \bar{I}$. Поэтому в силу формулы Стокса

$$\int_{\bar{F}} d\Phi^* = \int_{\bar{H}} \Phi^* + \int_{\bar{I}} \Phi^*.$$

Далее,

$$\int_{\bar{F}} d\Phi^* = \int_{F} d\Phi^* = \int_{G\times\Gamma} d\Phi, \qquad \int_{\bar{H}} \Phi^* = \int_{H} \Phi^* = \int_{\Gamma\times\Gamma} \Phi.$$

Поэтому для доказательства формулы $\int_{G\times\Gamma} d\Phi = \int_{\Gamma\times\Gamma} \Phi$ нам остается только проверить, что $\int_{\bar{I}} \Phi^* = 0$. Докажем даже, что $\Phi^* |_{\bar{I}} \equiv 0$.

В обозначениях $r = l_2 - l_1$, $\Sigma = \sum_{p+q=n-2} (dd_x l_1)^p \wedge (dd_x l_2)^q$ имеем

$$\Phi = \varepsilon_n d_x r \wedge d_y r \wedge \Sigma,$$

так что

$$\Phi^* = \varepsilon_n d_x r^* \wedge d_y r^* \wedge \Sigma^* = \varepsilon_n dr^* \wedge d_y r^* \wedge \Sigma^*.$$

Но поскольку $l_1^*|_{\bar{I}} = l_2^*|_{\bar{I}} = 0$, то $r^*|_{\bar{I}} = 0$, так что $dr^*|_{\bar{I}} = 0$ и, значит, $\Phi^*|_{\bar{I}} = 0$.

Таким образом, применимость формулы Стокса обоснована.

2. Переходы к дифференциалам и интегралу в разложениях по ε. Аналогичным образом можно обосновать переходы к дифференциалам и к интегралу в разложениях по ε в § 2, п. 6. Пусть M_ε — семейство регулярных метрик в $\bar{G}$, гладко зависящих от вещественного параметра ε. Из доказательства леммы 2 видно, что в $\mathfrak{M} \times \mathbf{R}$ переход от координат $(x, s, \theta, \varepsilon)$ к координатам $(x, \rho, \alpha, \varepsilon)$ является гладким по всем переменным. Поэтому функция l_ε в § 2, п. 6 продолжаема до гладкой функции l_ε^* на $\mathfrak{M} \times \mathbf{R}$, допускающей разложение

$$l_\varepsilon^* = l^* + \varepsilon g^* + \varepsilon^2 h^*,$$

где h^* является гладкой функцией координат $(x, \rho, \alpha, \varepsilon)$. Отсюда, рассуждая так же, как в лемме 3, получаем, что

$$d_x r_\varepsilon^* = \varepsilon d_x g^* + \varepsilon^2 \gamma_x^*, \quad d_y r_\varepsilon^* = \varepsilon d_y g^* + \varepsilon^2 \gamma_y^*, \quad dd_x l_\varepsilon^* = dd_x l^* + \varepsilon \omega^*,$$

где γ_x^*, γ_y^*, ω^* — формы на $\mathfrak{M} \times \mathbf{R}$, гладко зависящие от $(x, \rho, \alpha, \varepsilon)$. Подставляя эти разложения в выражение для Φ_ε, получаем

$$\Phi_\varepsilon^* = \varepsilon^2 (n-1) \Psi^* + \varepsilon^3 \Omega^*,$$

где Ω^* — форма на $\mathfrak{M} \times \mathbf{R}$, гладко зависящая от $(x, \rho, \alpha, \varepsilon)$. Поэтому

$$\mathcal{H}(M, M_\varepsilon) = \int_{\Gamma\times\Gamma} \Phi_\varepsilon = \int_H \Phi_\varepsilon^* = \varepsilon^2 (n-1) \int_H \Psi^* + \varepsilon^3 u =$$
$$= \varepsilon^2 (n-1) \int_{\Gamma\times\Gamma} \Psi + \varepsilon^3 u,$$

где u — некоторая гладкая функция от ε, что и требовалось получить в § 2, п. 6

3. Условие гладкости в основной теореме. Основная теорема и теоремы 1, 2, 3 доказаны нами для бесконечно-дифференцируемых функций. Однако условия гладкости легко ослабить: достаточно требовать, скажем, чтобы метрика M (т. е. функция $M(x, a)$) была всюду класса C^3, а вес W и функция f в теоремах 2 и 3 были класса C^1.

Докажем, например, основную теорему для случая метрик M_1 и M_2 класса C^3. Рассмотрим две последовательности гладких метрик $M_1^{(k)}$ и $M_2^{(k)}$, сходящиеся к метрикам M_1 и M_2 в классе C^3 (т. е. равномерно с тремя производными). Легко проверить, что тогда функции $l_1^{(k)}$ и $l_2^{(k)}$ будут сходиться к функциям l_1 и l_2 в классе C^2. Отсюда вытекает, что при $k \to \infty$

$$\mathcal{D}(M_1^{(k)}, M_2^{(k)}) \to \mathcal{D}(M_1, M_2), \qquad \mathcal{H}(M_1^{(k)}, M_2^{(k)}) \to \mathcal{H}(M_1, M_2).$$

Поскольку $\mathcal{H}(M_1^{(k)}, M_2^{(k)}) \geqslant \mathcal{D}(M_1^{(k)}, M_2^{(k)})$, то и $\mathcal{H}(M_1, M_2) \geqslant \mathcal{D}(M_1, M_2)$.

Приложение I

ИНТЕГРИРОВАНИЕ С ВЕСОМ И ФИНСЛЕРОВА МЕТРИКА

1. Весовая функция. Пусть L — конечномерное векторное пространство. Назовем *весовой функцией* функцию $W(a)$, определенную при $a \in L$, гладкую при $a \neq 0$ и однородную по a:

$$W(\lambda a) = |\lambda| W(a),$$

при всех вещественных λ.

Назовем весовую функцию W *выпуклой*, если $W(a) > 0$ при $a \neq 0$ и $W(a+b) \leqslant W(a) + W(b)$ при всех $a, b \in L$.

Обозначим через $\mathcal{G}_W$ гессиан функции W^2; если ввести координаты $(a_1, \ldots, a_n)$ на L, то гессиан $\mathcal{G}_W$ запишется матрицей $\mathcal{G}_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W^2}{\partial a_i \partial a_j}$. Легко проверить, что для выпуклой весовой функции W гессиан $\mathcal{G}_W$ будет неотрицательно-определенной матрицей при всех $a \neq 0$. Если эта матрица положительно определена при всех $a \neq 0$, будем называть весовую функцию W *строго выпуклой*.

2. Весовой овалоид. Пусть W — выпуклая весовая функция. Положим

$$U_W = \{a \in L \mid W(a) = 1\}, \quad B_W = \{a \in L \mid W(a) \leqslant 1\}.$$

Ясно, что B_W — выпуклое центрально-симметричное тело с гладкой границей U_W. Обратно, каждому такому телу B с границей U соответствует весовая функция W, определенная формулой $W(0) = 0$, $W(\lambda a) = |\lambda|$ при $a \in U$.

Условие строгой выпуклости W означает, что тело B_W строго выпукло. Геометрически это значит, что если провести касательную плоскость к B_W в любой точке $a \in U_W$, то ни по какому направлению U_W не прижимается к этой плоскости ближе, чем на величину второго порядка малости. Будем называть U_W *весовым овалоидом*.

3. Сопряженный овалоид. Пусть W — выпуклая весовая функция. Каждой точке $a \in L$, $a \neq 0$, отвечает ковектор $\eta_a = dW(a) \in L^*$. Так как $\eta_{\lambda a} = \eta_a$ при $\lambda > 0$, то ковектор η_a определяется лучом θ, на котором лежит точка a; поэтому мы часто будем обозначать его через η_θ. Геометрически η_θ определяется так: если a — точка пересечения луча θ с овалоидом U_W, то $\eta_\theta(b) = 1$ для всех векторов b, лежащих на плоскости, касательной к B_W в точке a.

Множество векторов η_a, где $a \in U_W$ образует подмножество в L^*, которое мы будем называть *сопряженным овалоидом* и обозначать U_W^*.

Хотя отображение $a \to \eta_a$ гладкое, поверхность U_W^* не обязана быть гладкой. Однако если весовая функция W строго выпукла, то U_W^* — гладкая поверхность, и отображение $a \to \eta_a$ задает диффеоморфизм $U_W \to U_W^*$.

Сопряженный овалоид можно определить чисто геометрически, а именно, рассмотрим множество $B_W^* = \{\eta \in L^* \mid (\eta, B_W) \leqslant 1\}$. Легко проверить, что B_W^* — выпуклое замкнутое тело в L^*, граница которого совпадает с U_W^*.

4. Вес. Интегрирование с весом. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие. Обозначим через $T_x\mathfrak{M}$ касательное пространство к $\mathfrak{M}$ в точке $x \in \mathfrak{M}$ и через $T\mathfrak{M}$ многообразие пар (x, a), $x \in \mathfrak{M}$, $a \in T_x\mathfrak{M}$, $a \neq 0$.

Назовем весом гладкую функцию W на $T\mathfrak{M}$, которая при каждом $x \in \mathfrak{M}$ является весовой функцией от a на $T_x\mathfrak{M}$ (если доопределить ее нулем при $a = 0$).

Пусть на многообразии $\mathfrak{M}$ заданы кривая l и функция f. Определим интеграл функции f по кривой l с весом W формулой

$$\int_l f\,d_W l = \int f(l(t))\, W(l(t), \dot{l}(t))\, dt,$$

где $t \to l(t)$ — некоторая параметризация кривой l; $\dot{l}(t) \in T_{l(t)}\mathfrak{M}$ — касательный вектор, отвечающий такой параметризации. Из свойства однородности функции W вытекает, что выписанный интеграл не зависит от параметризации.

5. Финслерова метрика. Назовем вес W строго выпуклым, если при каждом $x \in \mathfrak{M}$ функция $W(x, a)$ является строго выпуклой функцией от a. Строго выпуклый вес мы будем называть *финслеровой метрикой* и обычно обозначать через M.

В случае, когда функция $M^2(x, a)$ при каждом x является квадратичной формой по a, метрика M называется римановой.

Так же как и риманова метрика, финслерова метрика определяет расстояние на многообразии $\mathfrak{M}$. Для этого расстояния верны теоремы, аналогичные случаю римановой метрики. Например, определено понятие геодезической, причем геодезические являются решениями уравнения второго порядка; в частности, из каждой точки в каждом направлении выходит ровно одна геодезическая.

6. **Принцип ортогональности луча фронту волны.** В римановом случае важную роль играет принцип ортогональности луча фронту волны: если $k_{x,y}$ — дуга геодезической длины l, соединяющая точки x и y, и Π — множество точек, находящихся на расстоянии l от y, то направление $k_{x,y}$ ортогонально Π в точке x.

Сформулируем этот принцип в финслеровом случае. Пусть $k_{x,y}$ и Π означают то же, что и выше, но для финслеровой метрики M. Пусть U — весовой овалоид в пространстве T_xM, отвечающий метрике M, a — точка на U в направлении геодезической $k_{x,y}$. Тогда плоскость, касательная к овалоиду U в точке a, параллельна касательной плоскости к Π. Это утверждение проверяется так же, как в римановом случае.

Приложение II

НЕКОТОРЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ, СВЯЗАННЫЕ С ФИНСЛЕРОВОЙ МЕТРИКОЙ

Пусть на многообразии $\mathfrak{M}$ фиксирована финслерова метрика M (см. прил. I, пункты 4, 5).

1. **Форма η.** Фиксируем точку $x \in \mathfrak{M}$. Для касательного пространства $T_x\mathfrak{M}$ и сопряженного ему пространства $T_x^*\mathfrak{M}$ используем более короткие обозначения — T_x и T_x^* соответственно. По определению метрика M задает на пространстве T_x строго выпуклую весовую функцию. Используя конструкцию п. 3 прил. I, сопоставим каждой точке $a \in T_x$, $a \neq 0$, ковектор $\eta_a = \eta_{(x,a)} \in T_x^*$. Соответствие $(x, a) \to \eta_{(x,a)}$ обозначим через $\eta = \eta_M$.

По определению η есть функция со значениями в пространстве T_x^*. Можно интерпретировать η иначе, а именно, можно следующим образом интерпретировать η как дифференциальную 1-форму на пространстве $T\mathfrak{M}$. При естественной проекции $T\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ каждому вектору $v \in T_{(x,a)}(T\mathfrak{M})$ отвечает вектор $b_v \in T_x$. Положим $\eta(v) = \eta_{(x,a)}(b_v)$.

Посмотрим, как форма η записывается в координатах. Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — локальная система координат на $\mathfrak{M}$, $(a_1, \ldots, a_n)$ — соответствующие координаты на T_x (иными словами, это координаты в базисе $E_{x_1}, \ldots, E_{x_n}$, где E_{x_i} — единичный вектор в T_x в направлении x_i). Тогда $(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n)$ — локальная система координат на $T\mathfrak{M}$. Если вектор $v \in T_{(x,a)}(T\mathfrak{M})$ в этой системе координат имеет вид $(\delta x_1, \ldots, \delta x_n, \delta a_1, \ldots, \delta a_n)$, то $b_v = (\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$. Тем самым $\eta(v) = \eta_{(x,a)}(b_v) = \sum \frac{\partial M}{\partial a_i} \delta x_i$, т. е.

$$\eta = \sum \frac{\partial M}{\partial a_i} dx_i.$$

2. **Многообразие $\mathfrak{N}$.** Обозначим через $\mathfrak{N}$ многообразие пар (x, θ), где $x \in \mathfrak{M}$, θ — направление (т. е. луч, выходящий из начала координат) в пространстве T_x. Имеется естественная проекция $T\mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ (точка (x, a) переходит в точку (x, θ_a), где θ_a — луч, проходящий через вектор a). Так же как в п. 1, каждой паре $(x, \theta) \in \mathfrak{N}$ ставится в соответствие ковектор $\eta_\theta = \eta_{(x,\theta)} \in T_x^*$. Это соответствие η снова можно интерпретировать и как функцию со значениями в T_x^*, и как 1-форму на $\mathfrak{N}$.

При проекции $T\mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ форма η на $\mathfrak{N}$ переходит в форму η на $T\mathfrak{M}$.

3. **Форма ω_M. Элемент объема d_MV.** Пусть размерность $\mathfrak{M}$ равна n. Зададим дифференциальную форму ω_M на $\mathfrak{N}$ формулой

$$\omega_M = \eta \wedge (d\eta)^{n-1}.$$

Это $(2n-1)$-форма, т. е. форма старшей степени на $\mathfrak{N}$. В п. 7 покажем, что можно так выбрать ориентацию на $\mathfrak{N}$, что для любой метрики M форма ω_M будет *всюду положительна* относительно этой ориентации (такую ориентацию $\mathfrak{N}$ назовем *правильной*).

Используя форму ω_M, построим элемент объема $d_M V$ на многообразии $\mathfrak{M}$, канонически связанный с метрикой M.

Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — локальная система координат на $\mathfrak{M}$. Продолжим ее до системы координат $(x, \theta) = (x_1, \ldots, x_n, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ на $\mathfrak{N}$; при этом координаты (θ_i) подберем так, чтобы форма ω_M была положительна в координатах (x, θ). Форму объема $d_M V$ определим как интеграл формы ω_M по переменным θ. Подробней: если $\omega_M = u(x, \theta)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_{n-1}$, положим $d_M V = A(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, где

$$A(x) = \int u(x, \theta)\, d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_{n-1}.$$

По определению для любой функции f на $\mathfrak{M}$ (т. е. функции, зависящей от x, но не от θ)

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} f d_M V = \int\limits_{\mathfrak{N}} f \omega_M.$$

Это равенство можно принять за определение формы объема $d_M V$. Из него видно, что $\int\limits_{\mathfrak{M}} f d_M V$ не зависит от выбора систем координат (x_i) и (θ_i).

4. Вычисление форм η, ω_M и $d_M V$ по метрике M. В этом пункте докажем, что значения форм η и ω_M (а значит, и $d_M V$) при фиксированном $x \in \mathfrak{M}$ зависят только от весовой функции, которую метрика M задает на касательном пространстве T_x, и не зависят от значений метрики M в других точках многообразия $\mathfrak{M}$.

При изучении форм η и ω_M на $\mathfrak{N}$ поступим следующим образом. Фиксируем для каждой точки $(x, \theta) \in \mathfrak{N}$ точку $a_\theta \neq 0$ на луче θ, гладко зависящую от (x, θ). При этом получим некоторое сечение i: $\mathfrak{N} \to T\mathfrak{M}$ $((x, \theta) \to (x, a_\theta))$. Ясно, что отображение i переводит 1-форму η на многообразии $T\mathfrak{M}$ в 1-форму η на многообразии $\mathfrak{N}$; если задать $(2n-1)$-форму на $T\mathfrak{M}$ формулой $\omega_M = \eta \wedge (d\eta)^{n-1}$, то отображение i переведет ее в форму ω_M на $\mathfrak{N}$. Поэтому для описания форм η и ω_M на $\mathfrak{N}$ достаточно описать соответствующие формы η и ω_M на $T\mathfrak{M}$.

Тот факт, что значение формы η в каждой точке $(x, a) \in T\mathfrak{M}$ определяется только весовой функцией на T_x, следует и непосредственно из геометрического определения η, и из формулы п. 1:

$$\eta = \sum \frac{\partial M}{\partial a_i} dx_i.$$

Докажем то же для формы ω_M, используя последнюю форму для η. Разобьем дифференциал d в формах на многообразии $T\mathfrak{M}$ в сумму дифференциалов по переменным x и a: $d = d_x + d_a$. Точнее, если ζ — дифференциальная форма на $T\mathfrak{M}$ вида $\zeta = u\zeta_0$, где u — функция, а ζ_0 — форма с постоянными коэффициентами, то положим:

$$d_x\zeta = d_x u \wedge \zeta_0 = \left(\sum \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i\right) \wedge \zeta_0,$$

$$d_a\zeta = d_a u \wedge \zeta_0 = \left(\sum \frac{\partial u}{\partial a_i} da_i\right) \wedge \zeta_0.$$

Докажем, что

$$\omega_M = \eta \wedge (d_a\eta)^{n-1}. \qquad (*)$$

Из этой формулы следует, что значение формы ω_M в точке $(x, a) \in T\mathfrak{M}$ (а тем самым и значение формы ω_M в точке $(x, \theta) \in \mathfrak{N}$) определяется только весовой функцией на T_x.

По определению

$$\omega_M^n = \eta \wedge (d\eta)^{n-1} = \eta \wedge (d_a\eta + d_x\eta)^{n-1} = \eta \wedge (d_a\eta)^{n-1} + \xi.$$

Распишем формы η, $d_a\eta$, $d_x\eta$ и ξ по мономам вида $(dx_1)^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge (dx_n)^{\alpha_n} \wedge \wedge (da_1)^{\beta_1} \wedge \ldots \wedge (da_n)^{\beta_n}$. Поскольку в выражении для η и $d_a\eta$ каждый моном содержит сомножитель вида dx_i, а в выражении для $d_x\eta$ каждый моном содержит два таких сомножителя, то в выражении для ξ каждый моном содержит более n таких сомножителей, но так как всего имеется n выражений вида dx_i и $dx_i \wedge dx_i = 0$, то $\xi = 0$. Этим доказаны формула (*) и требуемое свойство ω_M (а значит, и аналогичное свойство d_MV).

В дальнейшем (см. пункты 7, 8) мы выясним геометрический смысл форм ω_M и d_MV и выведем для них явные формулы. При этом нам понадобятся некоторые дополнительные сведения, которые мы изложим в следующих двух пунктах.

5. Отступление. О касательных векторах и дифференциальных формах. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие, $x \in \mathfrak{M}$. Если Ω — k-форма на $\mathfrak{M}$, $X_1, \ldots, X_k$ — — k векторов в пространстве T_x, то через $\Omega(X_1, \ldots, X_k)$ будем обозначать значение формы Ω на наборе векторов $X_1, \ldots, X_k$. Будем говорить, что форма Ω аннулируется вектором $X \in T_x$, если $\Omega(X, X_2, \ldots, X_k) = 0$ для любого набора векторов $X_2, \ldots, X_k$.

Легко проверяются следующие свойства:

а) если формы Ω_1, Ω_2 аннулируются вектором X, то и их произведение $\Omega_1 \wedge \Omega_2$ аннулируется вектором X;

б) если форма старшей степени Ω аннулируется ненулевым вектором $X \in T_x$, то $\Omega = 0$ в точке x;

в) если две формы степени $(\dim \mathfrak{M} - 1)$ аннулируются некоторым ненулевым вектором $X \in T_x$, то они пропорциональны в точке x.

6. Отступление. Ориентация поверхностей в линейном пространстве и форма Ω_a. Пусть L — n-мерное линейное пространство, $\mathfrak{N}_L$ — многообразие лучей в L, выходящих из нуля. Сопоставив каждому лучу $\theta \in \mathfrak{N}_L$ некоторую точку $a_\theta \neq 0$, лежащую на луче θ и гладко зависящую от θ, получим некоторую поверхность U в L. Поверхности такого вида будем называть *звездчатыми*; тело, охватываемое поверхностью U, будем обозначать через B_U ($B_U = \{\lambda u \mid u \in U, \lambda \in [0, 1]\}$).

Фиксируем в L (линейную) систему координат $(a_1, \ldots, a_n)$. Она задает ориентацию L и тем самым задает согласованную ориентацию на любой звездчатой поверхности U по следующему правилу: если $(f_1, \ldots, f_n)$ — положительная локальная система координат в L, причем $f_1|_U = 0$ и $f_1|_{B_U} \leqslant 0$, то $f_2, \ldots, f_n$ — положительная система координат на U. Для согласованной ориентации выполняется формула Стокса $\int\limits_{B_U} d\zeta = \int\limits_U \zeta$, где ζ — любая $(n-1)$-форма на L. Отождествляя $\mathfrak{N}_L$ с поверхностью U, мы тем самым задаем (по системе координат $(a_1, \ldots, a_n)$) ориентацию на многообразии $\mathfrak{N}_L$.

Рассмотрим на L дифференциальную $(n-1)$-форму:

$$\Omega_a = \sum_i (-1)^{i-1} a_i \, da_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{da_i} \wedge \ldots \wedge da_n,$$

где знак ^ означает, что соответствующий сомножитель опущен. Форма Ω_a обладает следующими свойствами:

а) $d\Omega_a = n\, da_1 \wedge \ldots \wedge da_n$;

б) Ω_a в точке a^0 с координатами $(a_1^0, \ldots, a_n^0)$ аннулируется вектором $A^0 = \sum a_i^0 E_{a_i}$, где E_{a_i} — единичный вектор в направлении a_i в касательном пространстве $T_{a^0}L$.

Из «а» и «б» легко получить геометрическое описание формы Ω_a: если P — кусочек звездчатой поверхности, то

$$\int\limits_P \Omega_a = n \cdot \text{объем } B_P,$$

где B_P — конус, порожденный P, т. е. $B_P = \{\lambda a \mid a \in P, \ \lambda \in [0, 1]\}$. Эта формула сразу вытекает из «а» и формулы Стокса, поскольку согласно «б» на боковой поверхности конуса форма Ω_a обращается в нуль. Имея в виду эту формулу, будем называть Ω_a *формой заметаемого объема.*

Согласно сказанному выше ориентация на звездчатой поверхности задается условием положительности формы Ω_a.

7. Геометрический смысл форм ω_M и $d_M V$. Предположим, что на $\mathfrak{M}$ можно задать глобальную систему координат (например, это возможно, если $\mathfrak{M}$ — область в $\mathbb{R}^n$), и навсегда фиксируем такую систему $(x_1, \ldots, x_n)$. Это позволяет отождествить все касательные пространства T_x с одним фиксированным пространством L, в котором фиксирована система координат $(a_1, \ldots, a_n)$. Напомним (см. п. 1), как при этом связаны между собой системы координат (x_i) и (a_i): a_i — это координаты векторов из $T_x = L$ в базисе $E_1, \ldots, E_n$, где $E_i = E_{x_i}$ — единичный вектор в направлении x_i.

Многообразие $T\mathfrak{M}$ отождествим с $\mathfrak{M} \times L$, а многообразие $\mathfrak{N}$ — с $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}_L$. Системы координат (x_i) и (a_i) задают ориентации произведений на $T\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, которые назовем *естественными* ориентациями; заметим, что они не зависят от выбора исходной системы координат $(x_1, \ldots, x_n)$.

Фиксируем точку x. Запишем ω_M в виде

$$\omega_M = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge \omega^0,$$

где ω^0 — $(n-1)$-форма на пространстве $\mathfrak{N}_L$. Укажем геометрический смысл формы ω^0.

Обозначим через L^* пространство, сопряженное L, и введем на L^* систему координат $(c_1, \ldots, c_n)$, двойственную системе координат $(a_1, \ldots, a_n)$ на L. Иными словами, c_i — это координаты векторов из L^* в базисе $E_1^*, \ldots, E_n^*$, дуальном к базису $E_1, \ldots, E_n$ (при этом, разумеется, $E_i^* = dx_i$). В частности, для ковектора η_a, используемого при построении формы $\eta = \sum \frac{\partial M}{\partial a_i} dx_i$, координата c_i равна $\partial M/\partial a_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим отображение

$$T\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \times L \to \mathfrak{M} \times L^*,$$

переводящее точку (x, a) в точку (x, η_a). Форма η на $T\mathfrak{M}$ при этом отображении является, очевидно, прообразом 1-формы β на $\mathfrak{M} \times L^*$, которая определяется формулой $\beta = \Sigma c_i dx_i$.

Далее, зададим отображения

$$\hat{\eta}\colon \mathfrak{N}_L \to L^*, \qquad \tilde{\eta}\colon \mathfrak{N} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}_L \to \mathfrak{M} \times L^*$$

формулами

$$\hat{\eta}(\theta) = \eta_\theta, \quad \eta(x, \theta) = (x, \eta_\theta).$$

Тогда, очевидно, $(\tilde{\eta})^*(\beta) = \eta$. Поэтому форма ω_M на $\mathfrak{N}$ равна

$$\eta \wedge (d\eta)^{n-1} = (\tilde{\eta})^*(\beta \wedge (d\beta)^{n-1}).$$

Непосредственные вычисления показывают, что $d\beta = d_c\beta = \Sigma dc_i \wedge dx_i$, и, значит,

$$\beta \wedge (d\beta)^{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)!\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge \Omega_c,$$

где $\Omega_c = \sum_i (-1)^{i-1} c_i\, dc_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dc_i} \wedge \ldots \wedge dc_n$ — форма заметаемого объема (см. п. 6). Поэтому

$$\omega_M = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge \omega^0, \qquad \omega^0 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)!\, (\hat{\eta})^*(\Omega_c). \qquad (*)$$

Иначе говоря, с точностью до множителя $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!$ форма ω^0 описывает объем, заметаемый ковектором η_θ.

Поскольку отображение $\hat{\eta}$ является диффеоморфизмом, сохраняющим ориентацию, то форма ω_M будет положительной на $\mathfrak{N}$, если ввести там ориентацию, отличающуюся знаком $\varepsilon_n' = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ от естественной ориентации $\mathfrak{N}$; такую ориентацию будем называть *правильной*.

Из формулы (*) следует формула для формы объема d_MV:

$$d_MV = n!\,\mathrm{Vol}_{B_M^*}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

где $\mathrm{Vol}_{B_M^*}$ — объем сопряженного овалоида B_M^* в системе координат $(c_1, \ldots, c_n)$ на L^*.

8. **Явные формулы для форм ω_M и d_MV.** Ниже выведем следующую формулу для формы $\omega_M = \eta \wedge (d_a\eta)^{n-1}$ на $T\mathfrak{M}$:

$$\omega_M = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)!\, M^{-n} \det \mathcal{G}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge \Omega_a, \qquad (*)$$

где $\mathcal{G} = \left(\mathcal{G}_{ij} \mid \mathcal{G}_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 M^2}{\partial a_i \partial a_j}\right)$ — гессиан M^2. Из нее вытекает явная формула для формы объема

$$d_MV = (n-1)!\left(\int_S M^{-n} \det \mathcal{G} dS\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

где S — единичная сфера в пространстве L $(S = \{(a_1, \ldots a_n) \mid \Sigma a_i^2 = 1\})$; dS — обычный элемент площади на S.

Если M — риманова метрика, то можно так ввести координаты $(x_1, \ldots, x_n)$ в окрестности точки x^0, чтобы $M^2(x^0, a) = \Sigma a_i^2$. Поэтому для римановой метрики M элемент объема d_MV имеет вид

$$d_MV = n!\; \varkappa_n dV,$$

где dV — стандартный элемент объема, связанный с римановой метрикой; $\varkappa_n$ — объем единичного шара в $\mathbf{R}^n$.

При доказательстве формулы (*) и в п. 9 нам потребуется следующая лемма.

Л е м м а. *Форма $d_a\eta$ в точке $(x, a) = (x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots a_n)$ аннулируется каждым из векторов $A = \Sigma a_i E_{a_i}$ и $X = \Sigma a_j E_{x_j}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$d_a\eta = \sum \frac{\partial^2 M}{\partial a_i \partial a_j} da_i \wedge dx_j.$$

Достаточно проверить, что $d_a\eta(A, E_{x_j}) = 0$ для любого j и $d_a\eta(E_{a_i}, X) = 0$ для любого i. Так как

$$d_a\eta(E_{a_i}, E_{x_j}) = \frac{\partial^2 M}{\partial a_i \partial a_j} = \frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial M}{\partial a_j}\right) = \frac{\partial}{\partial a_j}\left(\frac{\partial M}{\partial a_i}\right),$$

то

$$d_a\eta(A, E_{x_j}) = \sum a_i \frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial M}{\partial a_j}\right), \quad d_a\eta(E_{a_i}, X) = \sum a_j \frac{\partial}{\partial a_j}\left(\frac{\partial M}{\partial a_i}\right).$$

Поскольку $\partial M/\partial a_k$ имеет (при любом k) степень однородности нуль, то по формуле Эйлера [1] при всех i и j

$$d_a\eta(A, E_{x_j}) = d_a\eta(E_{a_i}, X) = 0.$$

---

[1] Напомним формулу Эйлера: для функции $h = h(t_1, \ldots, t_n)$ степени однородности m

$$\sum t_i \frac{\partial h}{\partial t_i} = mh.$$

Приступим к доказательству формулы (*).

1) В точке $a = (a_1, \ldots, a_n)$ обе формы

$$\omega_M = \eta \wedge (d_a\eta)^{n-1} \quad \text{и} \quad dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge \Omega_a$$

аннулируются вектором $A = \sum a_i E_{a_i}$ (согласно очевидному равенству $\eta(A) = 0$, доказанной выше лемме и пунктам 5 и 6). Поскольку это — формы степени $(2n-1)$ на $2n$-мерном многообразии, то они (согласно п. 5) пропорциональны. Поэтому достаточно проверить, что

$$d_a M \wedge \omega_M = d_a M \wedge \zeta,$$

где ζ — правая часть в формуле (*).

2) Положим $\xi = M\eta = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial M^2}{\partial a_j} dx_j$. Тогда $d_a\xi = \sum \mathcal{G}_{ij} da_i \wedge dx_j = d_a M \wedge \eta + M d_a \eta$. Напишем два выражения для формы $(d_a\xi)^n$:

$$(d_a\xi)^n = (\sum \mathcal{G}_{ij} da_i \wedge dx_j)^n =$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n! \det \mathcal{G}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge da_1 \wedge \ldots \wedge da_n,$$
$$(d_a\xi)^n = (d_a M \wedge \eta + M d_a \eta)^n = M^n (d_a\eta)^n + n M^{n-1} (d_a M \wedge \eta) \wedge (d_a \eta)^{n-1} + \alpha.$$

Ясно, что $\alpha = 0$, ибо в α все члены кратны $\eta \wedge \eta = 0$; кроме того, $(d_a\eta)^n = 0$ как форма старшей степени, аннулируемая (согласно лемме и п. 5) ненулевым вектором (A или X). Отсюда второе выражение таково:

$$(d_a\xi)^n = n M^{n-1} d_a M \wedge \eta \wedge (d_a\eta)^{n-1} = n M^{n-1} d_a M \wedge \omega_M.$$

Значит,

$$d_a M \wedge \omega_M = \frac{1}{n} M^{1-n} (d_a\xi)^n =$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)!\, M^{1-n} \det \mathcal{G}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge da_1 \wedge \ldots \wedge da_n.$$

С другой стороны,

$$d_a M \wedge \Omega_a = \sum a_i \frac{\partial M}{\partial a_i} da_1 \wedge \ldots \wedge da_n.$$

По формуле Эйлера

$$d_a M \wedge \Omega_a = M da_1 \wedge \ldots \wedge da_n.$$

Тем самым

$$d_a M \wedge \zeta = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (n-1)!\, M^{1-n} \det \mathcal{G}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge da_1 \wedge \ldots \wedge da_n,$$

т. е., действительно,

$$d_a M \wedge \omega_M = d_a M \wedge \zeta,$$

что и требовалось доказать.

9. **Явные формулы для форм $\omega_{M,W}$ и $d_{M,W}V$.** Пусть наряду с финслеровой метрикой M на многообразии $\mathfrak{M}$ задан еще некоторый вес W (такая ситуация встречается в задаче интегральной геометрии, рассматриваемой в § 2). Определим дифференциальную форму σ на многообразии $T\mathfrak{M}$ формулой

$$\sigma = \sum \frac{\partial W}{\partial a_i} dx_i$$

(корректность определения проверяется так же, как в п. 1) и положим

$$\omega_{M,W} = \sigma \wedge d\sigma \wedge (d\eta)^{n-2}.$$

Формы σ и $\omega_{M,W}$ (подобно формам η и ω_M) определены на самом деле на многообразии $\mathfrak{N}$. Обозначим через $d_{M,W}V$ форму объема на $\mathfrak{M}$, которая получается при интегрировании формы $\omega_{M,W}$ по переменным θ. По аналогии с п. 8 выведем явные формулы для форм $\omega_{M,W}$ и $d_{M,W}V$.

Положим $\rho = W/M$ (эта функция определена на многообразии $\mathfrak{N}$) и обозначим через $H = (H_{ij})$ матрицу, обратную матрице $\mathcal{G} = \left(\mathcal{G}_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 M^2}{\partial a_i \partial a_j}\right)$. Для $\omega_{M,W}$ будет выведена формула

$$\omega_{M,W} = \left(\rho^2 + \frac{1}{n-1} M^2 \rho \sum H_{ij} \frac{\partial^2 \rho}{\partial a_i \partial a_j}\right) \omega_M; \qquad (*)$$

несколько более простая формула получится для формы $\tilde{\omega}_{M,W}$, гомологичной $\omega_{M,W}$:

$$\tilde{\omega}_{M,W} = \omega_{M,W} + d_a [\rho\eta \wedge \sigma \wedge (d_a\eta)^{n-2}],$$

а именно

$$\tilde{\omega}_{M,W} = \left(\rho^2 - \frac{1}{n-1} M^2 \sum H_{ij} \frac{\partial \rho}{\partial a_i} \frac{\partial \rho}{\partial a_j}\right) \omega_M. \qquad (**)$$

Из формул $(*)$ и $(**)$ получаются два выражения для формы $d_{M,W}V = \mathcal{B}(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$:

$$\mathcal{B}(x) = (n-1)! \int\limits_S \left(M^{-n}\rho^2 + \frac{M^{2-n}\rho}{n-1} \sum H_{ij} \frac{\partial^2 \rho}{\partial a_i \partial a_j}\right) \det \mathcal{G}\, dS =$$

$$= (n-1)! \int\limits_S \left(M^{-n}\rho^2 + \frac{M^{2-n}}{n-1} \sum H_{ij} \frac{\partial \rho}{\partial a_i} \frac{\partial \rho}{\partial a_j}\right) \det \mathcal{G}\, dS.$$

В частности, если M — риманова метрика, то $d_{M,W}V = \mathcal{B}(x)\, dV$, где dV — стандартный элемент объема, связанный с римановой метрикой, а

$$\mathcal{B}(x) = (n-1)! \int\limits_S \left(\rho^2 + \frac{\rho\Delta\rho}{n-1}\right) dS = (n-1)! \int\limits_S \left(\rho^2 - \frac{|\operatorname{grad} \rho|^2}{n-1}\right) dS.$$

Здесь интегралы берутся по единичной (в римановой метрике) сфере S в касательном пространстве по обычной мере dS, через Δ обозначен оператор Лапласа по угловым переменным, а через $\operatorname{grad} \rho$ — градиент функции ρ на сфере S.

Вывод формулы $(*)$. 1. Представим $\omega_{M,W}$ в виде суммы $\omega_{M,W} = \omega^1 + \omega^2$ и докажем, что

$$\omega^1 = \rho^2 \eta \wedge (d\eta)^{n-1} = \rho^2 \omega_M, \qquad (1)$$

$$d_a M \wedge \omega^2 = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (n-2)!\, \rho M^{3-n} \sum H_{ij} \frac{\partial^2 \rho}{\partial a_i \partial a_j} \det \mathcal{G}\, dx\, da, \qquad (2)$$

где $dxda = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge da_1 \wedge \ldots \wedge da_n$. Сравнивая (2) с формулой для $d_a M \wedge \omega_M$ из п. 8, получаем

$$\omega^2 = \frac{1}{n-1} M^2 \rho \sum H_{ij} \frac{\partial^2 \rho}{\partial a_i \partial a_j} \omega_M,$$

отсюда и из (1) следует формула $(*)$.

2. Так же, как в п. 4, проверяется, что $\omega_{M,W} = \sigma \wedge d_a\sigma \wedge (d_a\eta)^{n-2}$. Так как $W = \rho M$, то $\sigma = \rho\eta + M\tau$, где

$$\tau = \sum \frac{\partial \rho}{\partial a_i} dx_i.$$

Положив

$$\omega^1 = \rho\eta \wedge d_a(\rho\eta) \wedge (d_a\eta)^{n-2}, \qquad \omega^2 = \rho\eta \wedge d_a(M\tau) \wedge (d_a\eta)^{n-2},$$

проверим, что $\omega^1 + \omega^2 = \omega_{M,W}$, после чего останется доказать формулы (1) и (2).

Так же, как в лемме п. 8, проверяется, что формы τ и $d_a\sigma$ аннулируются в каждой точке $a = (a_1, \ldots, a_n)$ каждым из векторов $A = \Sigma a_i E_{a_i}$ и $X = \Sigma a_i E_{x_i}$.

Замечание. Равенство $\tau(X)=\sum a_i\frac{\partial\rho}{\partial a_i}=0$ следует из формулы Эйлера, так как функция $\rho = W/M$ имеет степень однородности нуль. Тривиальное равенство $\tau(A) = 0$ связано с тем, что форма $M\tau = \sigma - \rho\eta$ определена на самом деле на многообразии $\mathfrak{N}$ (т. е. поднимается на $T\mathfrak{M}$ из соответствующей формы на $\mathfrak{N}$).

Форма $M\tau \wedge d_a\sigma \wedge (d_a\eta)^{n-2}$ равна нулю, как форма коразмерности 1 на $T\mathfrak{M}$, аннулируемая двумя неколлинеарными векторами A и X (или как форма старшей степени на $\mathfrak{N}$, аннулируемая ненулевым вектором X). Поэтому

$$\omega_{M,W} = \rho\eta \wedge d_a(\rho\eta + M\tau) \wedge (d_a\eta)^{n-2} = \omega^1 + \omega^2.$$

3. Так как $\eta \wedge \eta = 0$, то $\omega^1 = \rho^2\eta \wedge (d_a\eta)^{n-1} = \rho^2\omega_M$ — формула (1) доказана. Остается проверить формулу (2).

Как и в п. 8, введем форму $\xi = M\eta$ и сравним формы $d_aM \wedge \omega^2$ и $d_a\tau \wedge (d_a\xi)^{n-1}$. Так как $d_aM \wedge d_aM = 0$, то

$$d_aM \wedge \omega^2 = \rho M \wedge d_aM \wedge \eta \wedge d_a\tau \wedge (d_a\eta)^{n-2}.$$

Так же, как в п. 8, доказывается, что

$$(d_a\xi)^{n-1} = M^{n-1}(d_a\eta)^{n-1} + (n-1)M^{n-2}d_aM \wedge \eta \wedge (d_a\eta)^{n-2}.$$

Форма $d_a(M\tau) \wedge (d_a\eta)^{n-1}$ равна нулю как $2n$-форма на $\mathfrak{N}$, форма $d_aM \wedge \tau \wedge (d_a\eta)^{n-1}$ равна нулю как форма старшей степени на $T\mathfrak{M}$, аннулируемая ненулевым вектором X; значит, форма $d_a\tau \wedge (d_a\eta)^{n-1}$ равна нулю. Поэтому

$$d_a\tau \wedge (d_a\xi)^{n-1} = (n-1)M^{n-2}d_aM \wedge \eta \wedge d_a\tau \wedge (d_a\eta)^{n-2},$$

так что

$$d_aM \wedge \omega^2 = \frac{1}{n-1}\rho M^{3-n}d_a\tau \wedge (d_a\xi)^{n-1}.$$

Так как

$$d_a\tau = \sum \frac{\partial^2\rho}{\partial a_i\partial a_j}da_i \wedge dx_j, \qquad d_a\xi = \sum \mathcal{G}_{ij}\,da_i \wedge dx_j,$$

(см. п. 8), то

$$d_a\tau \wedge (d_a\xi)^{n-1} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)!\sum \frac{\partial^2\rho}{\partial a_i\partial a_j}\Delta_{ij}\,dx\,da,$$

где Δ_{ij} — алгебраические дополнения элементов $\mathcal{G}_{ij}$ матрицы $\mathcal{G}$. Так как Δ_{ij} выражаются через элементы H_{ij} обратной матрицы по формуле $\Delta_{ij} = \det\mathcal{G}\cdot H_{ij}$, то

$$d_aM \wedge \omega^2 = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-2)!\,\rho M^{3-n}\sum H_{ij}\frac{\partial^2\rho}{\partial a_i\partial a_j}\det\mathcal{G}\,dx\,da,$$

и формула (2) доказана, а вместе с ней доказана и формула (*).

Вывод формулы (**). Чтобы доказать формулу (**), исследуем форму $\tilde{\omega}^2 = \omega^2 + d_a[\rho\eta \wedge \sigma \wedge (d_a\eta)^{n-2}]$; по определению $\tilde{\omega} = \omega^1 + \tilde{\omega}^2$, поэтому достаточно проверить, что

$$\tilde{\omega}^2 = -\left(\frac{1}{n-1}M^2 H_{ij}\frac{\partial\rho}{\partial a_i}\frac{\partial\rho}{\partial a_j}\right)\omega_M. \tag{3}$$

Форма $d_a[\rho\eta \wedge \sigma \wedge (d_a\eta)^{n-2}]$ равна

$$d_a(\rho\eta \wedge M\tau) \wedge (d_a\eta)^{n-2} = d_a(\rho\eta) \wedge (M\tau) \wedge (d_a\eta)^{n-2} - \omega^2,$$

так что $\tilde{\omega}^2 = d_a(\rho\eta) \wedge (M\tau) \wedge (d_a\eta)^{n-2} = Md_a\rho \wedge \eta \wedge \tau \wedge (d_a\eta)^{n-2} + \rho M\tau \wedge (d_a\eta)^{n-1}$. Второе слагаемое равно нулю как форма старшей степени на $\mathfrak{N}$, аннулируемая вектором $X \neq 0$. Итак,

$$d_aM \wedge \tilde{\omega}^2 = -Md_a\rho \wedge \tau \wedge d_aM \wedge \eta \wedge (d_a\eta)^{n-2}.$$

Сравним эту форму с $d_a\rho \wedge \tau \wedge (d_a\xi)^{n-1}$. Используя выписанное выше выражение для $(d_a\xi)^{n-1}$ и учитывая, что $d_a\rho \wedge \tau \wedge (d_a\eta)^{n-1} = 0$, имеем

$$d_a\rho \wedge \tau \wedge (d_a\xi)^{n-1} = (n-1)\, M^{n-2}\, d_a\rho \wedge \tau \wedge d_aM \wedge \eta \wedge (d_a\eta)^{n-2},$$

откуда

$$d_aM \wedge \widetilde{\omega}^2 = -\frac{1}{n-1} M^{3-n} d_a\rho \wedge \tau \wedge (d_a\xi)^{n-1}.$$

Поскольку $d_a\rho \wedge \tau = \sum \frac{\partial\rho}{\partial a_i}\frac{\partial\rho}{\partial a_j} da_i \wedge dx_j$, то отсюда так же, как и выше выводится формула (3), что и завершает доказательство.

Замечание. Строго выпуклая весовая функция M на пространстве L задает следующим образом структуру риманова многообразия на многообразии $\mathfrak{N}_L$. Рассмотрим для каждой точки a в касательном пространстве T_aL квадратичную форму $\sum B_{ij}da_ida_j$, где

$$B_{ij} = M^{-2}\left(\mathcal{G}_{ij} - \frac{\partial M}{\partial a_i}\frac{\partial M}{\partial a_j}\right) = M^{-1}\frac{\partial^2 M}{\partial a_i \partial a_j}.$$

Легко проверить, что она опускается до положительно-определенной квадратичной формы на касательном пространстве к многообразию $\mathfrak{N}_L$, т. е. эти формулы задают риманову метрику B на $\mathfrak{N}_L$. Метрика B не зависит от выбора координат $(a_1, \ldots, a_n)$ на L.

Формулы (*) и (**) наглядно переписываются в терминах этой метрики, а именно, можно проверить, что

$$M^2 \sum H_{ij} \frac{\partial^2\rho}{\partial a_i \partial a_j} = \Delta\rho, \qquad M^2 \sum H_{ij} \frac{\partial\rho}{\partial a_i}\frac{\partial\rho}{\partial a_j} = |\operatorname{grad}\rho|^2,$$

где Δ — оператор Лапласа — Бельтрами метрики B; $\operatorname{grad}\rho$ — градиент функции ρ; $|\operatorname{grad}\rho|$ — норма градиента в метрике B.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мухометов Р. Г.* О задаче интегральной геометрии.— В кн.: Математические проблемы геофизики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1975. вып. 6, ч. 2, с. 212—242.
2. *Мухометов Р. Г.* Обратная кинематическая задача сейсмики на плоскости.— Там же, с. 243—254.
3. *Бернштейн И. Н., Гервер М. Л.* О задаче интегральной геометрии для семейства геодезических и об обратной кинематической задаче сейсмики.— ДАН СССР, 1978, 243, № 2, с. 302—305; Препринт ИФЗ АН СССР, № 1. 1978.
4. *Романов В. Г.* Интегральная геометрия на геодезических изотропной римановой метрики.— ДАН СССР, 1978, 241, № 2, с. 290—293.
5. *Мухометов Р. Г., Романов В. Г.* К задаче отыскания изотропной римановой метрики в n-мерном пространстве.— ДАН СССР, 1978, 243, № 1, с. 41—44.
6. *Мухометов Р. Г.* К задаче восстановления анизотропной римановой метрики в n-мерной области: Препринт ВЦ СО АН СССР, № 136, 1978, с. 1—30.

УДК 517.43