Доклады Академии наук СССР
1978. Том 243, № 2

УДК 550.34.013+517.4

ГЕОФИЗИКА

И. Н. БЕРНШТЕЙН, М. Л. ГЕРВЕР

О ЗАДАЧЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ СЕМЕЙСТВА ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ И ОБ ОБРАТНОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ СЕЙСМИКИ

(Представлено академиком М. А. Садовским 14 VI 1978)

Пусть G—n-мерная область с гладкой границей Г, диффеоморфная шару. Пусть в $\overline{G}$ задано семейство K гладких кривых: каждая кривая из K диффеоморфна отрезку, оба конца ее лежат на Г, остальные точки принадлежат G.

Р. Г. Мухометов (1) доказал (при $n=2$), что любая гладкая в $\overline{G}$ функция f однозначно и устойчиво определяется своими интегралами (по длине дуги) вдоль кривых из K, если K регулярно (определение регулярного семейства кривых дано в п. 1). Оказывается, при $n>2$ верны аналогичные теоремы единственности и устойчивости, если заданное регулярное семейство K является семейством геодезических для какой-либо римановой метрики M (и интегралы от f берутся по длине дуги, определяемой этой метрикой). Мы формулируем их в п. 2 (теоремы 1 и 2). Эти теоремы обобщаются на случай, когда M — финслерова метрика (теорема 3), необходимые определения даны в п. 3.

Не обязательно интегрировать f по длине дуги, определяемой метрикой M: можно брать интегралы от f с некоторым весом W. Теорема 4 обобщает теорему 3 в этом направлении (при $n=2$ она обобщает соответствующую теорему из (1)).

Переход от римановой метрики к финслеровой сильно расширяет класс регулярных семейств K, для которых справедливы теоремы единственности и устойчивости в многомерной задаче интегральной геометрии. Нам не известно, справедливы ли они для более общих семейств.

Заметим, что общее регулярное семейство кривых задается $n-1$ функцией $2n-1$ переменного, а семейство геодезических для финслеровой метрики — одной функцией $2n-1$ переменного. Возможно, это объясняет, почему при $n=2$ (когда $n-1=1$) удалось доказать теоремы для произвольного регулярного семейства.

Техника, развитая при доказательстве теорем 1—4, позволяет решить близкие задачи, например, обратную кинематическую задачу сейсмики (в случае, когда сейсмические лучи образуют регулярное семейство); при $n=2$ эта задача решена Р. Г. Мухометовым в (2); обобщение на многомерный случай получил Г. Я. Бейлькин, любезно ознакомивший нас весной 1978 г. со своими результатами. В п. 5 мы формулируем несколько более общую теорему (теорема 5), из которой следует, что сейсмическая среда без волноводов однозначно и устойчиво восстанавливается по годографу без петель.

Результаты, изложенные в заметке, докладывались в 1977—1978 г. на семинаре по обратным задачам в Ин-те физики Земли. Мы благодарны участникам семинара за интерес и внимание к нашей работе.

1. Регулярные семейства кривых. Назовем семейство K регулярным, если оно удовлетворяет следующим условиям.

1°. Локальная регулярность.

а) через каждую точку $x\in\overline{G}$ в каждом направлении θ проходит ровно одна кривая $k_{x,\theta}$ семейства K;

б) Обозначим через $y(x, \theta, s)$ точку кривой $k_{x,\theta}$, в которую мы попадем, сместившись из x в направлении θ на расстояние s вдоль кривой $k_{x,\theta}$. Функция $y(x, \theta, s)$ — гладкая * функция от x, θ, s (на том множестве $\mathfrak{M}$, где она определена).

2°. Глобальная регулярность. Множество $\mathfrak{M}$ — компакт. В частности, длины всех кривых из K равномерно ограничены.

3°. Отсутствие фокусировок:

а) через каждые две точки $\overline{G}$ проходит ровно одна кривая из K; иначе говоря, уравнение $y(x, \theta, s)=y$ имеет ровно одно решение (θ, s) при любых $x, y \in \overline{G}$, $x \neq y$;

б) это решение (θ, s) гладко зависит от x, y при $x \neq y$.

2. Многомерная задача интегральной геометрии для семейства геодезических (случай римановой метрики). Обозначения: G — n-мерная область с гладкой границей Γ, диффеоморфная шару; K — регулярное семейство кривых в $\overline{G}$, являющееся семейством геодезических для некоторой римановой метрики M; $k(x, y)$ — дуга кривой из K с концами $x, y \in \overline{G}$, $x \neq y$; $d_M l$ — элемент длины дуги, определяемый метрикой M.

Функция $g(x, y)$. Для любой гладкой в $\overline{G}$ функции f положим

$$g(x,y)=\int\limits_{k(x,y)} f\, d_M l. \tag{2,1}$$

Функция g определена в бидиске $\overline{G}\times\overline{G}$ (при $x=y$, разумеется, $g=0$). Задание интегралов от f вдоль всех кривых из K эквивалентно заданию $g(x, y)$ на торе $\Gamma\times\Gamma$ (при $x, y\in\Gamma$).

Теорема 1. *Если* $g=0$ *на* $\Gamma\times\Gamma$, *то* $f=0$ *в* $\overline{G}$.

Функция $l(x, y)$. Обозначим через $l(x, y)$ расстояние между x и y в метрике M:

$$l(x,y)=\int\limits_{k(x,y)} d_M l. \tag{2,2}$$

Дифференциальная форма Φ. Если $x=(x_1,\dots, x_n)$, $y=(y_1,\dots, y_n)$, то дифференциал d по переменным x, y имеет вид $d=d_x+d_y$, где

$$d_x=\sum\frac{\partial}{\partial x_i}dx_i,\quad d_y=\sum\frac{\partial}{\partial y_i}dy_i. \tag{2,3}$$

Рассмотрим в $\overline{G}\times\overline{G}$ дифференциальную $(2n-2)$-форму

$$\Phi=\varepsilon_n\, d_x g\wedge d_y g\wedge (dd_x l)^{n-2},\qquad \varepsilon_n=(-1)^{n(n-1)/2}. \tag{2,4}$$

Элемент объема $d_M V$. Для унификации формул удобно, вместо стандартного элемента объема, определяемого метрикой M, рассматривать элемент объема $d_M V$, отличающийся от стандартного множителем $n!\varkappa_n$, где $\varkappa_n$ — объем единичного шара в $\mathbf{R}^n$.

Теорема 2.

$$\int\limits_G f^2\, d_M V\leqslant \int\limits_{\Gamma\times\Gamma}\Phi. \tag{2,5}$$

3. Обобщение на случай финслеровой метрики. Обозначим через T_x касательное пространство к G в точке x. Назовем весом функцию $W(x, a)$, определенную при $x\in\overline{G}$, $a\in T_x$, гладкую по переменным (x, a) при $a\neq 0$, положительную при $a\neq 0$ и однородную по a: при

* Для простоты под «гладкостью» мы всюду понимаем бесконечную дифференцируемость.

любом вещественном λ

$$W(x, \lambda a)=|\lambda| W(x, a).$$

На любой кривой $x(t)$ вес W задает элемент длины дуги $d_W l$ по формуле $d_W l = W(x(t), \dot{x}(t))dt$. Это позволяет интегрировать функции по кривым и, в частности, находить длину кривой.

Назовем вес выпуклым, если $W(x, a_1+a_2) \leqslant W(x, a_1)+W(x, a_2)$. В этом случае при $a \neq 0$ гессиан $\mathscr{G}=\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W^2}{\partial a_i \partial a_j}\right)$ функции W^2 по переменным a будет неотрицательно определенной матрицей. Назовем вес строго выпуклым, если матрица $\mathscr{G}$ положительно определена.

Строго выпуклый вес называется финслеровой метрикой. Для обозначения финслеровой метрики будем использовать символы M и $M(x, a)$ вместо W и $W(x, a)$ соответственно. Риманова метрика — частный случай финслеровой, для нее функция $M^2(x, a)$ является квадратичной формой на каждом пространстве T_x.

С каждой финслеровой метрикой M канонически связан элемент объема $d_M V$. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — координаты в $\bar{G}$, $a_1, \ldots, a_n$ — соответствующие координаты в T_x. Рассмотрим дифференциальную форму

$$\varphi=\sum \frac{\partial M}{\partial a_i} dx_i. \tag{3,1}$$

Тогда $d_M V$ определяется условием: для любой функции $h(x)$

$$\int\limits_{\bar{G}} h\, d_M V = \varepsilon_n \int\limits_{\bar{G}\times S} h\varphi \wedge (d\varphi)^{n-1}, \tag{3,2}$$

где S — произвольная $(n-1)$-мерная поверхность в T_x, охватывающая 0. Выбирая, в частности, в качестве S единичную сферу S_1, получаем для $d_M V$ явную формулу $d_M V = A(x)\,dx_1 \ldots dx_n$, где

$$A(x)=(n-1)!\int\limits_{S_1} M^{-n} \det \mathscr{G}\, dS > 0 \tag{3,3}$$

(здесь $\mathscr{G}$ — гессиан M^2, dS — элемент площади на S_1). Для римановой метрики (3,3) дает тот же $d_M V$, что в п. 2.

Теорема 3. *Пусть K — регулярное семейство кривых в $\bar{G}$, являющееся семейством геодезических для некоторой финслеровой метрики M. Для любой гладкой в $\bar{G}$ функции f определим функции $g(x, y)$ и $l(x, y)$ формулами* (2,1) *и* (2,2).

Тогда справедлива оценка устойчивости

$$\int\limits_{G} f^2 d_M V \leqslant \varepsilon_n \int\limits_{\Gamma\times\Gamma} d_x g \wedge d_y g \wedge (dd_x l)^{n-2},$$

идентичная (2,5). *В частности, если $g=0$ на $\Gamma\times\Gamma$, то $f=0$ в $\bar{G}$.*

4. Интегрирование с весом. Пусть в $\bar{G}$ задано регулярное семейство кривых K, являющееся семейством геодезических для некоторой финслеровой метрики M. Пусть, кроме того, в $\bar{G}$ задан вес W. Для любой гладкой в $\bar{G}$ функции f положим

$$g(x, y)=\int\limits_{k(x,y)} f\, d_W l, \quad l(x, y)=\int\limits_{k(x,y)} d_M l. \tag{4,1}$$

Положим

$$\sigma=\sum \frac{\partial W}{\partial a_i} dx_i, \quad \varphi=\sum \frac{\partial M}{\partial a_i} dx_i. \tag{4,2}$$

Зададим в $\bar{G}$ элемент объема $d_{M,W}V$ условием: для любой функции h

$$\int_{\bar{G}} h\, d_{M,W}V = \varepsilon_n \int_{\bar{G}\times S} h\sigma \wedge d\sigma \wedge (d\varphi)^{n-2}. \tag{4,3}$$

Можно выписать явную формулу для $d_{M,W}V$.

Положим $\rho = W/M$ и обозначим через $\mathscr{H} = (\mathscr{H}_{i,j})$ матрицу, обратную к $\mathscr{G} = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 M^2}{\partial a_i \partial a_j}\right)$. Тогда $d_{M,W}V = B(x)\,dx_1\ldots dx_n$, где

$$B(x) = (n-1)!\int_{S_1} \rho^2 M^{-n} \det\mathscr{G}\, dS - (n-2)!\int_{S_1}\left(\sum \mathscr{H}_{ij}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\right)M^{2-n}\det\mathscr{G}\, dS.$$

Назовем пару (M, W) допустимой, если $B(x) > 0$.

Теорема 4.

$$\int_G f^2 d_{M,W}V \leqslant \varepsilon_n \int_{\Gamma\times\Gamma} d_x g \wedge d_y g \wedge (dd_x l)^{n-2}. \tag{4,4}$$

В частности, для допустимых пар (M, W) неравенство (4,4) показывает, что $f=0$ в $\bar{G}$, если $g=0$ на $\Gamma\times\Gamma$, и дает оценку устойчивости.

Замечание. При $n=2$ правая часть (4,3) не зависит от φ и вместо $d_{M,W}V$ можно писать $d_W V$. Если элемент площади $d_W V$ положителен, назовем вес W допустимым. При $n=2$ неравенство (4,4) принимает вид

$$\int_G f^2\, d_W V \leqslant \int_{\Gamma\times\Gamma} d_y g \wedge d_x g. \tag{4,5}$$

Оно справедливо для любого регулярного семейства K и для допустимого веса дает теорему единственности и устойчивости. В ([1]) та же теорема доказана при бо́льших ограничениях на вес W.

5. Обратная кинетическая задача сейсмики.

Теорема 5. *Пусть финслеровы метрики M_1 и M_2 в $\bar{G}$ отличаются положительным множителем $h(x)$:*

$$M_2(x, a) = h(x) M_1(x, a), \quad h(x) > 0, \quad x \in \bar{G}, \quad a \in T_x.$$

Предположим, что семейства геодезических K_1, K_2 (для метрик M_1, M_2) регулярны и для любых точек $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ расстояния между γ_1, γ_2 в метриках M_1 и M_2 совпадают.

Тогда $h=1$, т. е. $M_1 = M_2$.

Обозначим через $l_i(x, y)$ расстояние между x и $y \in \bar{G}$ в метрике M_i, $i=1, 2$, положим $r(x, y) = l_2(x, y) - l_1(x, y)$ и рассмотрим форму

$$\Phi = \varepsilon_n d_x r \wedge d_y r \wedge \sum_{p+q=n-2} (dd_x l_1)^p \wedge (dd_x l_2)^q. \tag{5,1}$$

Тогда справедлива оценка устойчивости

$$\int_G (h-1)^2 \sum_{p=0}^{n-2} h^p\, d_{M_1}V \leqslant \int_{\Gamma\times\Gamma} \Phi. \tag{5,2}$$

Замечание 1. Отметим, что теорему 3 можно вывести как следствие из теоремы 5 (положив $M = M_1$, $h = 1 + \varepsilon f$ и устремив ε к 0).

Замечание 2. В сейсмике предполагается, что M_1, M_2 — римановы (даже изотропные) метрики. В этом случае теорема 5 означает, что среда без волноводов однозначно и устойчиво восстанавливается по годографу без петель.

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта
Академии наук СССР
Москва

Поступило
16 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Р. Г. Мухометов*, В сб.: Математические проблемы геофизики, в. 6, ч. 2, Новосибирск, 1975, стр. 212. [2] *Р. Г. Мухометов*, Там же, стр. 243.