НОВАЯ МОДЕЛЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОНЕЧНЫХ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП

И. Н. Б е р н ш т е й н , И. М. Г е л ь ф а н д , С. И. Г е л ь ф а н д

1. Важной задачей теории представлений является построение так называемых моделей, т. е. таких представлений группы *G,* которые содержат почти каждое неприводимое представление *G,* причем по одному разу. Таких моделей известно сравнительно немного (см. [1] для GL_2, [3] для Sp_4, [2], [4] для произвольной алгебраической группы). Помимо самостоятельного интереса, каждая такая модель приводит к важной теории Г- и ^-функций ([1], [3], [4]). Приводимая ниже конструкция моделей пригодна для расщепимых алгебраических групп над любым локальным полем, однако при формулировке и доказательстве мы ограничиваемся случаем конечного поля.

При продумывании заметки нам была чрезвычайно полезна работа Люстига [7].

2. Пусть $ — полупростая группа над конечным полем FT,, расщепимая и с тривиальным центром, г — ранг <*§.* Для каждого расширения F_g , *q* = р°, поля F_p обозначим через *G — G(q)* группу точек *%* над F_q. Мы будем интересоваться свойствами *G(q)* при больших *q.* В дальнейшем равенство $f(q) = 0(q_h)$ будет означать, что $\backslash f(q)\backslash < cq_k$
$_y$ где
с зависит лишь от типа группы g.

Введем некоторые обозначения. Пусть *Н* — расщепимая картановская подгруппа G_y
А — система корней *G* относительно Я, 2 — система простых корней, A_+ — множество положительных корней. Пусть *W* — группа Вейля системы корней А, *l(w)* — длина элемента *w* £ *W* относительно множества простых отражений. Обозначим также через s_0
элемент максимальной длины в *W.* Для каждого корня *у* через X_y обозначим унипотентную, изоморфную F_q («однопараметрическую») подгруппу в *G,* соответствующую *у.* Пусть $U = \Pi X_y(y$ 6 А+) и *В = HU.*

Дадим определение элемента Кокстера *с* £ *W.* Занумеруем простые корни некоторым образом, a_4, . . ., a_r, и положим $c = o_a . . . a_a$. Получаемые при различных упорядо-
г
чениях 2 элементы *с* называются элементами Кокстера; их число равно 2_{r_i}, где *i* — число простых компонент $ (см. [5]). Для каждого элемента Кокстера *с* рассмотрим следующие подгруппыB_c, $V_cBB:B_c = B$ fl $cBc_{\sim r}$, $V_c = U$ fl $C(S_0USQ_1)C_{-1}$. ЯСНО, *что*$B_cf[$ V_c=
= *{е}* и $B_CV_C = B$. Далее, можно показать, что V_c — коммутативная группа порядка q_r.

Пусть *%{G)* — множество классов эквивалентности комплексных неприводимых представлений *G.* Для произвольного представления *Т* группы *G* и каждого со *£%(G)* через t(со, *Т)* мы обозначим кратность вхождения со в Г.

Для каждого элемента Кокстера *с* рассмотрим представление T_c группы G, индуцированное единичным представлением B_c.

Т е о р е м а 1. *Пусть f(q) — число тех* со *(z%{G), что* £(со, T_c) — 1. *Тогда f(q) =*
= qr+ 0(qr~l).

Поскольку card *%{G)* = q_r -f1 $0(q_{T\sim 1})$ [6], мы видим, что в T_c входят почти все неприводимые представления *G,* причем почти все с кратностью 1.

3. Для доказательства теоремы 1 используется следующий общий результат. Пусть 7*1, T_2 — два произвольных представления конечной группы *G.* Положим R_tj =
= Horned, *Tj)* и рассмотрим алгебру *В = Q)* B_tj (г, / = 1, 2).

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть* 6 — *такой антиавтоморфизм алгебры В, что* (i) $б_2$ = 1, (ii) $Q(B_{tj})$ = *Hц{1* = 2, 2 = 1). *Положим В~ =* $\{x£B_{12}\backslash Q(x) = — x\}$. *Тогда*
J_ ^ *($_w$> *T±)[Ц(й, Т±)* — 1] < dim R_n — dim R_{i2} + 2 dim *R^.*
$_2$ со£^(G)

4. Воспользуемся теперь существованием в группе *G* антиавтоморфизма *g ->- g',* часто используемого в аналогичных ситуациях (см. [2], [4], [8]). Он обладает следующими свойствами: (i) (#')' = g, (ii) *В' = В,* (iii), если *х* £ *s_0H,* то *х'* = *х* (см. [8]; в случае S =
= PGL_n этот антиавтоморфизм совпадает с отражением относительно неглавной диагонали).

Пусть с £ *W* — некоторый элемент Кокстера. Тогда *с'* — тоже элемент Кокстера, и $B_{c,}$ = $(B_c)'$, $V_{c,}$ = $(V_c)'$. Положим $T\pm = T_c$, $T_2 = T_c$, и отождествим элементы

пространства R_tj = Hom(7^, *Tj)* с функциями на *G,* инвариантными слева относительно B_t и справа относительно *Bj (Bi* = B_c, $B_2 = B_{c,}$). Для каждой функции / на *G* положим *Qf(g)* = /(#')• Тогда" О задает антиавтоморфизм алгебры *R* — ®*Rtj,* удовлетворяющий условиям (i), (ii) предложения 1. з

Выберем такой элемент *vt* £ *Vc*, что *hvih'1 Ф v±* при всех *h Ф* 1 из Я, и положим *u2* = *v[.* Для каждого *x* £ *s0H* обозначим через *Kt1{x) £Bt\G/Bj* двусторонний класс смежности *BiVfXVjBj (i, j* = 1, 2).

П р е д л о ж е н и е 2. (i) *Если x± Ф x2, то Kij(xi) Ф Kfj(x2).* (ii) *Число классов в Bf\G/Bj, не имеющих вид K^(x), есть 0(qr~1).*

Заметим теперь, что если срx £ *R12* — характеристическая функция класса *Ki2{x)t* то 0(фx) = фx. Теорема 1 легко следует из этого замечания и предложений 1, 2.

5. Приведем некоторое обобщение теоремы 1. Пусть снова al7 . . ., cxr — некоторое упорядочение 2 ; положим *w = oa . . . aa* , где 0 < & < г. Введем подгруппы *Uw cz* С/, *Hw cz* Я, полагая E/^ = *U* П *wUw-1, Hw = {h £ H \ at(h)* = 1, & + 1 ^ г < г}. Пусть в — такое одномерное представление £/ш, что в \ *xa.Ф* 1 при&+1 ^ г ^ г, и в |^,, = 1 для остальных *Xv cz Uw.* Пусть также я — произвольное одномерное представление *Hw.* Тогда формула *4{hu) — 0(и)л(n)* задает одномерное представление группы

Aw = ^*wUw*

cz B-

Т е о р е м а 2. *Утверждение теоремы* 1 *останется справедливым, если заменить представление Tc на представление*

?% = Ind *G* (¥).

AW

При *к* = г, *n* = 1 представление *T^* превращается в представление *Tc* из теоремы 1, при *к* = 0 — в представление, рассмотренное в [2], при *G = GL(n,* Fa) , w = (1 2 . . . л) ^ £ *W,* я = 1 — в представление Люстига [7], при *G* = Sp4(Fg), *к* = 1, со = <Ta (а — короткий корень) — в представление из [3].

Для каждого со £ $ (£) обозначим через /тг (со) индекс Шура (над Q) представления со .{см. [9]). Из теоремы 1 вытекает

С л е д с т в и е . *Для «почти всех»* со£^[((9) *имеем т* (со) == 1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Ж а к е , Р. Л е н г л е н д с , Автоморфные формы на *GL(2),* М., «Мир», 1973»
[2] И. М. Г е л ь ф а н д , М. И. Г р а е в , Конструкция неприводимых представлений простых алгебраических групп над конечным полем, ДАН, 147:3 (1962)*
[3] М. Е. Н О В О Д В О Р С К И Е , И. И. П я т е ц к и й - Ш а п и р о , Обобщенные модели Бесселя для симплектической^ группы ранга 2, Матем. сб. 90 (132):2(1973), 246—256.
[4] И. М. Г е л ь ф а н д , Д. А. К а ж д а н, О представлениях группы *GL(n, К),* где *К* — локальное поле, функц. анализ 6:4 (1972), 73—74.
*[5] Н. Б у р б а к и, Группы и алгебры Ли, М., «Мир», 1972.
:[6] Семинар по алгебраическим группам, М., «Мир», 1974.
[7] G. L u s z t i g, On the discrete series representations of the general linear groups over finite field, Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), 550—554.
'[8] R. S t e i n b e r g , Lectures on Chevalley groups, Yale Univ., 1967.
|9] Ч. К э р т и с , И. Р а й н е р , Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, М., «Наука», 1969.

Поступило в Правление общества 10 января 1974 г»