NOTES DES MEMBRES ET CORRESPONDANTS ET NOTES PRÉSENTÉES OU TRANSMISES PAR LEURS SOINS

ALGÈBRE. — *Structure locale de la catégorie des modules de Harish-Chandra.* Note (*) de **Joseph Bernstein, Israël Gelfand** Membre de l'Académie et **Serge Gelfand.**

La catégorie de modules de Harish-Chandra d'un groupe de Lie réel semi-simple G a algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est étudiée. On démontre que cette catégorie est localement équivalente à la catégorie des modules de dimension finie sur une certaine algèbre Q, finitement engendrée par le centre Z ($\mathfrak{g}$) de l'algèbre enveloppante U ($\mathfrak{g}$).

The category of Harish-Chandra modules over a real semisimple Lie group G *with Lie algebra* $\mathfrak{g}$ *is considered. It is shown that this category is locally equivalent to the category of finite dimensional modules over a* C*-algebra* Q *finitely generated over the center* Z($\mathfrak{g}$) *of the enveloping algebra* U($\mathfrak{g}$).

1. La théorie des modules de Harish-Chandra, introduite dans [1], est une des variantes de la théorie algébrique des représentations des groupes de Lie semi-simples. En dehors de l'intérêt évident que présente l'étude des modules de Harish-Chandra pour cette partie de la théorie des représentations, il nous semble que les structures qui apparaissent dans cette étude peuvent servir de modèles pour une théorie plus générale, qui pourrait être appelée « géométrie algébrique non commutative ». Il est important de noter que, même dans une théorie aussi non commutative que la théorie des représentations, la non commutativité s'avère de dimension finie. On peut donc espérer qu'une géométrie algébrique non commutative suffisamment profonde peut apparaître, même dans le cadre d'une non commutativité de dimension finie.

Fixons une fois pour toutes un groupe de Lie linéaire connexe semi-simple G et un sous-groupe compact maximal $K \subset G$; soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie de G et K.

2. MODULES DE HARISH-CHANDRA. — Désignons par $\mathscr{E}(G)$ l'espace des distributions sur G; pour chaque sous-groupe $H \subset G$ posons $\mathscr{E}_H(G) = \{\varphi \in \mathscr{E}(G) \mid \operatorname{supp} \varphi \subset H\}$. L'inclusion $H \subsetneq G$ détermine l'inclusion $\mathscr{E}(H) \subsetneq \mathscr{E}(G)$. On a aussi $\mathscr{E}(H) \subset \mathscr{E}_H(G)$. L'opération de convolution munit $\mathscr{E}(K)$ et $\mathscr{E}_K(G)$ d'une structure de C-algèbre. Soit $\{e\}$ le sous-groupe trivial de G. Nous identifierons l'algèbre $\mathscr{E}_{\{e\}}(G)$ avec l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$. Remarquons que $\mathscr{E}_K(G) \supset \mathscr{E}_{\{e\}}(G) = U(\mathfrak{g})$. On peut démontrer l'égalité $\mathscr{E}_K(G) = U(\mathfrak{g})\, \mathscr{E}(K)$.

L'élément $\varphi \in \mathscr{E}_K(G)$ sera dit K-fini, si $\dim_{\mathbf{C}} \mathscr{E}(K)\, \varphi < \infty$. L'ensemble de tous les éléments K-finis est un idéal dilatère $\mathscr{H} = \mathscr{H}(G, K)$ (l'analogue de l'algèbre de Hecke). On voit immédiatement que $\mathscr{H}^2 = \mathscr{H}$. Le $\mathscr{E}_K(G)$-module V sera dit algébrique quand $\mathscr{H}\, V = V$.

D'après une représentation donnée du groupe G dans l'espace de Banach V, on construit canoniquement un $\mathscr{E}_K(G)$-module algébrique déterminé par l'action naturelle de $\mathscr{E}_K(G)$ dans le sous-espace $V^{\mathrm{alg}} \subset V$ des vecteurs différentiables K-finis.

Nous appelerons module de Harish-Chandra tout $\mathscr{E}_K(G)$-module algébrique V à un nombre fini de générateurs, tel que $\dim_{\mathbf{C}} h\,V < \infty$ pour chaque $h \in \mathscr{H}$. Cette notion a été introduite dans [1] [*voir* aussi [2]] sous une autre forme. La catégorie de tous les modules de Harish-Chandra sera désignée par C.

Soit Z ($\mathfrak{g}$) le centre de U ($\mathfrak{g}$). Notons $\Theta = \operatorname{Spec\,max} Z(\mathfrak{g})$ l'ensemble des caractères (homomorphismes) $\theta : Z(\mathfrak{g}) \to \mathbf{C}$. C'est une variété algébrique isomorphe à $\mathbf{C}^r$, $r = \operatorname{rang} \mathfrak{g}$

[(3), 7.3.8]. Nous aurons besoin de la notion d'élément régulier $\theta \in \Theta$. Soit $\mathfrak{f}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{f}_{\mathrm{C}}^{*} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{f}, \mathrm{C})$. L'homomorphisme de Harish-Chandra $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{S}(\mathfrak{f})$ induit l'application $\mathfrak{f}_{\mathrm{C}}^{*} \to \Theta$ [*voir* (3), 7.4.7]. Si l'image inverse de l'élément $\theta \in \Theta$ par cette application contient un nombre maximal de points, θ sera dit régulier.

Le support [(4), II, 4.4] de tout $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$-module M sera désigné par supp $\mathrm{M} \subset \Theta$.

Chaque module de Harish-Chandra est un $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$-module pour lequel supp V est un ensemble fini.

Pour tout sous-ensemble $\mathrm{D} \subset \Theta$, nous notons $\mathrm{C_D}$ la sous-catégorie pleine de C constituée de tous les modules V tels que supp $\mathrm{V} \subset \mathrm{D}$.

3. Une $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$-algèbre Q sera dite $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$-finie si elle possède un nombre fini de générateurs en tant que $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$-module. Notons Mod Q la catégorie des Q-modules M tels que $\dim_{\mathrm{C}} \mathrm{M} < \infty$. Si $\mathrm{D} \subset \Theta$, $\mathrm{Mod_D}\, \mathrm{Q}$ désignera la sous-catégorie complète de Mod Q constituée des modules M pour lesquels supp $\mathrm{M} \subset \mathrm{D}$.

Théorème 1. — *Soit* $\mathrm{D} \subset \Theta$ *un ouvert connexe borné. Il existe alors une telle algèbre* $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$-*finie* Q, *que les catégories* $\mathrm{C_D}$ *et* $\mathrm{Mod_D}\, \mathrm{Q}$ *sont équivalentes en tant que* $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$-*catégories.*

4. Dans cette section nous donnons une esquisse de la démonstration du théorème 1.

Soit δ une représentation de dimension finie du sous-groupe compact maximal $\mathrm{K} \subset \mathrm{G}$ dans l'espace L. Construisons d'après δ la $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$-algèbre Q_δ de la manière suivante. Soit $(\mathrm{End_C}\, \mathrm{L})^0$ l'algèbre duale à l'algèbre des endomorphismes de l'espace L. Posons

$$\mathrm{U}_\delta = \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{C}} (\mathrm{End_C}\, \mathrm{L})^0.$$

Désignons par J_δ l'idéal à gauche de U_δ engendré par les éléments de la forme $\mathrm{X} \otimes 1 - 1 \otimes \delta(\mathrm{X})$, $\mathrm{X} \in \mathfrak{f}$. Soit $\mathrm{N}_\delta = \{u \in \mathrm{U}_\delta \mid \mathrm{J}_\delta\, u \subset \mathrm{J}_\delta\}$ le normalisateur de J_δ. Posons $\mathrm{Q}_\delta = \mathrm{N}_\delta / \mathrm{J}_\delta$.

Pour un $\mathrm{E_K}(\mathrm{G})$-module algébrique V, soit $r_\delta(\mathrm{V}) = \mathrm{Hom_K}(\mathrm{L}, \mathrm{V})$. Définissons l'action de Q_δ dans l'espace $r_\delta(\mathrm{V})$ de la manière suivante. Soient $\varphi \in r_\delta(\mathrm{V})$, $q \in \mathrm{Q}_\delta$ et soit $\varphi = \sum \mathrm{X}_i \otimes \mathrm{Y}_i$ un représentant de q dans N_δ. Définissons l'élément $q(\varphi) \in r_\delta(\mathrm{V}) = \mathrm{Hom_K}(\mathrm{L}, \mathrm{V})$ par l'égalité $q(\varphi)\, \xi = \sum \mathrm{X}_i\, \varphi(\delta(\mathrm{Y}_i)\, \xi)$, $\xi \in \mathrm{L}$.

Proposition I. — (i) Q_δ *est une algèbre* $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$-*finie. L'application* $\mathrm{V} \mapsto r_\delta(\mathrm{V})$ *définit un foncteur* $r_\delta : \mathrm{C} \to \mathrm{Mod}\, \mathrm{Q}_\delta$;

(ii) *soit* D *un ouvert connexe borné de* Θ. *Il existe alors une telle représentation* δ *du groupe* K *que* r_δ *détermine une équivalence des catégories* C *et* $\mathrm{Mod_D}\, \mathrm{Q}_\delta$.

La première partie de cette proposition se démontre d'une manière analogue à (3), 9.4. Pour démontrer la seconde, il suffit de vérifier qu'en prenant δ somme directe d'un nombre suffisamment grand de représentation deux à deux non équivalentes du groupe K on obtient $r_\delta(\mathrm{V}) \neq \{0\}$ pour tout module non nul $\mathrm{V} \in \mathrm{C_D}$.

Le théorème 1 découle de la proposition 1.

5. Nous voulons choisir l'algèbre Q du théorème 1 aussi simple que possible. Dans cette section, nous montrerons, en se servant des représentations de la série principale, que Q peut être réalisée sous forme d'algèbre de fonctions polynômiales à valeurs non commutatives.

Définissons les représentations de la série principale pour le groupe G de la manière suivante. Soit P un sous-groupe parabolique minimal de G, P = MAU la décomposition de Langlands, où U est le radical unipotent de P, $\mathrm{A} \cong \mathbf{R}_{+}^{l}$ — la partie vectorielle connexe du sous-groupe de Cartan, et $\mathrm{M} = \mathrm{P} \cap \mathrm{K}$ centralise A. Soit $\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie du groupe A, $\mathfrak{a}^*$ duale à $\mathfrak{a}$, W le groupe de Weyl de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$. Soit (ρ, L) une représentation irréductible de dimension finie du groupe MA, ρ' une représentation de P dans l'espace L, telle que $\rho'(u)=1$ pour $u \in U$ et $\rho'(ma)=\rho(ma).\mu(a)$, où $\mu(a)=d(aua^{-1})/du$. Soit $\mathscr{E}_M(P)$ l'algèbre des distributions sur P concentrées sur M. Cette algèbre agit dans l'espace L à l'aide de la représentation ρ' et dans l'algèbre $\mathscr{H}$ par convolution.

DÉFINITION. — On appelle représentation de la série principale le $\mathscr{E}_K(G)$-module $T^\rho = \mathscr{H} \otimes_{\mathscr{E}_{M}(P)} L$.

PROPOSITION 2. — (i) T^ρ *est un module de Harish-Chandra;* supp T^ρ *se réduit à un seul point* $\theta_\rho \in \Theta$;

(ii) *le module* T^ρ *est irréductible pour presque toutes les représentations* ρ;

(iii) *pour presque toutes les représentations* ρ_1, *le module* T^{ρ_1} *est équivalent à* T^{ρ_2} *si et seulement si* ρ_1 *et* ρ_2 *sont conjuguées relativement à* W;

(iv) *chaque module de Harish-Chandra irréductible est un sous-quotient d'un des modules* T^ρ [(3), 9.4].

Chaque représentation irréductible ρ du groupe MA est de la forme $\rho(ma)=\sigma(m)\, e^{\lambda(\log a)}$, ou σ est une représentation irréductible de M et $\lambda \in \mathfrak{a}^*$. L'algèbre $\mathscr{E}(M)$ des distributions sur M agit naturellement dans l'espace L de la représentation ρ. Par ailleurs, notons $T^\rho|_K$ le $\mathscr{E}$ (K)-module obtenu de T^ρ par l'inclusion $\mathscr{E}(K) \subset \mathscr{E}_K(G)$. On vérifie facilement que le $\mathscr{E}$ (K)-module $T^\rho|_K$, $\rho=(\sigma, \lambda)$, est canoniquement isomorphe au $\mathscr{E}$(K)-module $(\mathscr{H} \cap \mathscr{E}(K)) \otimes_{\mathscr{E}(M)} L$.

Par conséquent, on peut identifier tous les Q_δ-modules $r(T^\rho)$, $\rho=(\sigma, \lambda)$, pour σ fixe, avec un même espace linéaire (de dimension finie) que nous noterons L_δ^σ.

LEMME. — *L'action des éléments* $q \in Q_\delta$ *dans* L_δ^σ *est polynômiale relativement à* λ.

Nous avons donc construit un homomorphisme d'algèbres :

$$\psi_\delta^\sigma : \quad Q_\delta \to (\mathrm{End}\ L_\delta^\sigma)\,[\mathfrak{a}^*].$$

Pour une représentation fixé δ, l'espace L_δ^σ est non nul seulement pour un nombre fini de représentations σ du groupe M. L'algèbre $B_\delta = \oplus_\sigma \mathrm{End}\ L_\delta^\sigma$ est donc de dimension finie.

THÉORÈME 2. — *L'homomorphisme* $\psi_\delta = \oplus_\sigma \psi_\delta^\sigma : Q_\delta \to B_\delta[\mathfrak{a}^*]$ *est injectif.*

La démonstration s'obtient facilement de la proposition 2, (iv).

Dans un article suivant, nous étudions en détail l'image de l'inclusion ψ_δ.

(*) Séance du 9 janvier 1978.

(1) I. M. GELFAND, V. A. PONOMAREV, *Uspekni Mat. Nauk*, 23, 1968, n° 2, p. 3-60.
(2) J. LEPOWSKY, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 176, 1973, p. 1-44.
(3) J. DIXMIER, *Algèbres enveloppantes*. Gautier-Villars, Paris, 1974.
(4) N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, Hermann, Paris, 1965.

Laboratoire de Méthodes Mathématiques en Biologie, Université d'État de Moscou, Moscou 117.234, U.R.S.S.