NOTES DES MEMBRES ET CORRESPONDANTS ET NOTES PRÉSENTÉES OU TRANSMISES PAR LEURS SOINS

ALGÈBRE. – *Structure locale de la catégorie des modules de Harish-Chandra.*

Note (*) de **Joseph Berstein, Israël Gelfand,** Membre de l'Académie et **Serge Gelfand.**

Cette Note est la suite de (1). On y introduit la notion d'algèbre agréable de fonctions analytiques dans un domaine $D \subset \mathbf{C}^l$ à valeurs dans une C-algèbre B de dimension finie. On démontre que la catégorie des modules de Harish-Chandra d'un groupe de Lie semi-simple réel G est localement équivalente à la catégorie des modules de dimension finie sur une certaine algèbre agréable R. Les exemples $G = SL_2(\mathbf{R})$, $SL_3(\mathbf{R})$, $SL_2(\mathbf{C})$ sont considérés.

This Note is the continuation of (1). *The notion of agreeable algebra of analytic functions in a domain* $D \subset \mathbf{C}^l$ *taking values in a finite dimensional* **C***-algebra is introduced. It is shown that the category of Harish-Chandra modules over a real semisimple Lie group* G *is locally equivalent to the category of finite dimensional modules over an agreeable algebra* R. *The examples* $G = SL_2(\mathbf{R})$, $SL_3(\mathbf{R})$, $SL_2(\mathbf{C})$ *are considered.*

1. Le présent article est la suite de (1), dont les résultats et les notations sont systématiquement employés ici.

Soit D un ouvert connexe de l'espace $\Theta = \operatorname{Spec} \max Z(\mathfrak{g})$. Notons $\mathcal{O}(D)$ l'anneau des fonctions analytiques sur D. Pour chaque algèbreQ $Z(\mathfrak{g})$-finie, appelons localisation de Q à D l'algèbre $Q_D = Q \underset{Z(\mathfrak{g})}{\otimes} \mathcal{O}(D)$. Il est clair que la catégorie $\operatorname{Mod}_D Q$ est équivalente à la catégorie des Q_D-modules de dimension finie.

Nous voulons construire une algèbre Q qui vérifie les hypothèses du théorème 1 de (1), dont la structure locale serait aussi simple que possible.

2. ALGÈBRES AGRÉABLES. – Soit $\mathbf{C}^l$ l'espace complexe aux coordonnées $z_1, \ldots, z_l$, E un voisinage du point $(0, \ldots, 0) \in \mathbf{C}^l$ et B une **C**-algèbre unitaire semi-simple. Notons $B(E) = B \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \mathcal{O}(E)$ l'algèbre des fonctions analytiques $f : E \to B$.

DÉFINITION. – Une sous-algèbre $R \subset B(E)$ est dite agréable, si

(i) $R \supset \mathcal{O}(E)1$;

(ii) pour presque tous les points $z \in E$ (i. e. pour les points situés en-dehors d'une certaine sous-variété $E_1 \subset E$ de dimension $l-1$), l'ensemble des valeurs $f(z), f \in R$, coïncide avec B.

THÉORÈME 1. – *Soit* $\theta \in \Theta$ *un élément régulier. On peut alors choisir un voisinage* $D \subset \Theta$ *de l'élément* θ *et une algèbre* Q *vérifiant les hypothèses du théorème* 1 *de* (1), *de sorte que l'algèbre* Q_D *soit isomorphe a une certaine algèbre agréable* R.

Remarques. – (*a*) L'algèbre agréable R du théorème 1 peut être réalisée sous forme d'algèbre de fonctions sur un ouvert connexe E de dimensions $l = \operatorname{rang}_{\mathbf{R}} G$. Dans le cas où $l = \operatorname{rang} \mathfrak{g}$ (i. e. le groupe G est décomposable sur **R**), on peut prendre $E = D$.

(*b*) Il découle du théorème 1 et de la remarque précédente que les supports de tous les modules $V \in C_D$ remplissent la réunion d'un nombre fini de sous-variétés de dimension L d'un connexe D de dimension *r*.

(*c*) Dans la démonstration du théorème 1, l'isomorphisme de l'algèbre R sur l'algèbre Q_D est choisi de sorte que les fonctions de coordonnées $z_1, \ldots, z_l$ sur E correspondent à des éléments $z_1^*, \ldots, z_l^* \in Z(\mathfrak{g})$ tels que $\theta(z_i^*) = 0$.

3. Nous dirons qu'une sous-algèbre $R \subset B(E)$ est *fort agréable*, si R est un $\mathcal{O}$ (E)-module libre. Les algèbres fort agréables sont utiles parce qu'elles sont entièrement déterminées par des conditions de codimension 1. Plus précisément, soient R, R′ deux sous-algèbres fort agréables de B (E). Supposons que R et R′ coïncident hors de codimension 2, i. e. il existe un sous-ensemble $X \subset E$, codim $X \geqq 2$, tel que $R_{E-X} = R'_{E-X}$. On démontre alors facilement que $R = R'$.

Hypothèse. — L'algèbre R du théorème 1 peut être choisie fort agréable.

4. Montrons comment on déduit le théorème 1 du théorème 2 de ([1]). Fixons une représentation irréductible σ du groupe M. L'application $\xi_\sigma : \lambda \to \theta_\rho$, $\rho = (\sigma, \lambda)$ de la proposition 2 (i) de ([1]) est une application polynômiale $\mathfrak{a}^*$ dans Θ. Soit $\Xi \subset \Theta$ la réunion des images de tous les ξ_σ. C'est une sous-variété localement algébrique de dimension 1 dans Θ. D'après le théorème de Harish-Chandra [([1]), prop. 2, (iv)], $\bigcup_{V \in C} \operatorname{supp} V = \Xi$.

Soit $\theta \in \Theta$ un caractère régulier. Désignons par $\tilde{\Phi}$ l'ensemble de toutes les représentations $\rho = (\sigma, \lambda)$ telles que $\theta_\rho = \theta$. Le groupe de Weyl W agit sur $\tilde{\Phi}$, et librement (en vertu de la régularité de θ). Fixons l'ensemble $\Phi = (\rho_1, \ldots, \rho_l)$ de représentants des orbites de W dans $\tilde{\Phi}$. Pour chaque $\rho_i = (\sigma_i, \lambda_i) \in \Phi$ l'application ξ_{σ_i} sera une immersion dans un voisinage du point $\lambda_i \in \mathfrak{a}^*$. Il existe donc l éléments $z_1, \ldots, z_l$, $\theta(z_i) = 0$, qui déterminent un système de coordonnées dans des voisinages de chacun des points λ_i. Soit E un petit voisinage de l'origine de l'espace $\mathbf{C}^l$ avec les coordonnées $(z_1, \ldots, z_l)$, E_i le voisinage correspondant des points λ_i, et $D \subset \Theta$ un tel voisinage de θ que $D \cap \Xi = \bigcup_{i=1}^{l} \xi_{\sigma_i}(E_i)$.

Soit $B = \bigoplus_{i=1}^{l} \operatorname{End} L_\delta^{\sigma_i}$. L'homomorphisme ψ_δ du théorème 2 de ([1]) se prolonge à un plongement $\tilde{\Psi}_\delta : (Q_\delta)_D \to B(E)$. Il découle de la proposition 2 (ii), (iii) de ([1]) que $R = \tilde{\Psi}_\delta((Q_\delta)_D)$ est une sous-algèbre agréable de B (E). Le théorème 1 découle maintenant de la proposition 1 de ([1]).

5. Exemple :

$$G = PSL_2(\mathbf{R}), \quad K = SO_2/(\pm 1), \quad M = \{1\},$$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, a > 0 \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Soit θ le caractère correspondant à la représentation unité I du groupe G. Les représentations de la série principale sont indexées par les homomorphismes

$$\lambda_s : \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \to a^s, \quad s \in \mathbf{C}.$$

On a alors $\tilde{\Phi} = \{\lambda_1, \lambda_{-1}\}$, tandis que W applique λ_1 dans λ_{-1}, de sorte que l'on peut poser $\Phi = \{\lambda_1\}$. Le module $T = T^{\lambda_1}$ contient le sous-module unité I, et $T/I = T^+ \oplus T^-$, où T^+, T^- sont des modules irréductibles non équivalents. En outre, tout sous-module non trivial $V \subset T$ contient I. Les modules T^{λ_s} sont irréductibles et deux à deux non équivalents lorsque s est proche de 1, mais $s \neq 1$.

Les représentations irréductibles du groupe K sont unidimentionnelles et se déterminent par un entier unique — leur degré. Désignons la représentation de degré i par δ_i. On sait que

$$T^{\lambda_s}|_K = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i, \quad T^+|_K = \bigoplus_{i>0} \delta_i, \quad T^-|_K = \bigoplus_{i<0} \delta_i.$$

Posons $\delta=\delta_{-1}\oplus\delta_0\oplus\delta_1$. Soit $D\subset\Theta$ un voisinage suffisamment petit du point θ. La proposition 2 (iv) de ([1]) implique $\mathrm{Hom}_K(V,\delta)\neq 0$ pour tout module $V\in C_D$. La représentation $\delta=\delta_{-1}\oplus\delta_0\oplus\delta_1$ satisfait à la proposition 1 (ii) de ([1]). Il est clair que l'espace L sera de dimension trois, avec la base naturelle e_{-1}, e_0, e_1. Il existe donc un isomorphisme naturel de l'algèbre $B=\mathrm{End}\, L_\delta$ sur l'algèbre M_3 des matrices d'ordre trois.

Choisissons un élément $z^*\in Z(\mathfrak{g})$ qui définit la coordonnée z dans un voisinage du point $s=1$ (par exemple, $z=s^2-1$). Décrivons l'algèbre $R=\tilde{\Psi}((Q_\delta)_D)\subset M_3$ (*voir* le n° 4). Soient $E_{ij}\in M_3$, $-1\leqq i,j\leqq 1$ les matrices élémentaires. Il est clair que $E_{ii}\in R$ pour $i=-1,0,1$. Donc $R=\bigoplus_{i,j} R_{ij}$, où $R_{ij}=\{r\in R, r=f(z)E_{ij}\}$. Puisque $\mathcal{O}(D)1\subset R$, on a $R_{ij}=J_{ij}E_{ij}$, où J_{ij} est un idéal de $\mathcal{O}(D)$. La fibre de R coïncide en tout point $z\neq 0$ avec M_3, de sorte que J_{ij} est engendré par l'élément $z^{k_{ij}}$. Il ne reste qu'à trouver k_{ij}.

Évidemment, $k_{ii}=0$, $i=-1,0,1$. Puisque chaque sous-module de T contient I, on a $k_{0i}=0$ pour tous les i, et $k_{ij}>0$ pour $i\neq j$, $i\neq 0$. En calculant les coefficients matriciaux $f_{-1,0}$ et $f_{1,0}$ des représentations de la série principale T^{λ_s} comme fonctions de s, on peut montrer qu'elles ont un zéro d'ordre un pour $s=1$. Donc $k_{-1,0}=k_{1,0}=1$. D'où $k_{-1,1}=k_{1,-1}=1$.

Ainsi

$$R=\{a_{ij}(z),\ z\in D\,|\,a_{ij}(0)=0 \text{ pour } (i,j)=(-1,0),(1,0),(-1,1),(1,-1)\}.$$

La catégorie $C_{\{0\}}$ est alors équivalents à la catégorie des R-modules de dimension finie dans lesquels l'opérateur $z-1$ est nilpotent. On vérifie facilement que ceci coïncide avec la description de $C_{\{0\}}$ dans ([2]).

6. Autres exemples. — Dans tous les exemples, nous prendrons en guise de θ le caractère de $Z(\mathfrak{g})$ correspondant à la représentation unité de G.

(*a*) $G=PGL_2(\mathbf{R})$, $\dim E=1$, $B=M_2\oplus M_2$; R consiste des couples de fonctions matricielles $\{a_{ij}(z), b_{ij}(z)\}\in B(E)$ tels que $a_{12}=b_{12}=0$, $a_{11}=b_{11}$ pour $z=0$.

(*b*) $G=SL_2(\mathbf{C})$, $\dim E=1$, $B=M_2\oplus M_1$; R consiste des couples $\{a_{ij}(z), b(z)\}\in B(E)$ tels que $a_{12}=0$, $a_{11}=b$ pour $z=0$. La description correspondante de la catégorie $C_{\{\theta\}}$ coïncide avec celle donnée dans ([3]).

(*c*) $G=SL_3(\mathbf{R})$, E est un domaine de $\mathbf{C}^2$ à coordonnées z_1, z_2, $B=M_4\oplus M_3\oplus M_3\oplus M_1$; R consiste de quadruplets de fonctions $\{a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d\}\in B(E)$ tels que

(i) pour $z_1=0$: $a_{13}=a_{14}=a_{23}=a_{24}=b_{12}=b_{13}=0$, $a_{33}=b_{22}$, $a_{34}=b_{23}$, $a_{43}=b_{32}$, $a_{44}=b_{33}$;

(ii) pour $z_2=0$: $a_{12}=a_{14}=a_{32}=a_{34}=c_{12}=c_{13}=0$, $a_{22}=c_{22}$, $a_{24}=c_{23}$, $a_{42}=c_{32}$, $a_{44}=c_{33}$;

(iii) pour $z_1+z_2=0$: $b_{13}=b_{23}=c_{13}=c_{23}=0$, $b_{33}=c_{33}$.

(*) Séance du 9 janvier 1978.

([1]) I. N. Bernstein, I. M. Gelfand, S. I. Gelfand, *Comptes rendus*, 286, série A, 1978, p. 435.

([2]) I. M. Gelfand, *Actes du Congrès international des mathématiciens*, Nice, 1970, I, 95-111, Gauthier-Villars, Paris.

([3]) I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev, *Uspeki Nat. Nauk*, 23, 1968, n° 2, p. 3-60.

Laboratoire de Méthodes Mathématiques en Biologie, Université d'État de Moscou, Moscou 117.234, *U.R.S.S.*