Le "centre" de Bernstein

J.-N. BERNSTEIN
Rédigé par P. DELIGNE

Soit G un groupe réductif sur un corps local non archimédien et H l'algèbre de convolution des fonctions localement constantes à support compact sur G . Nous déterminons l'algèbre des multiplicateurs de H , en terme des représentations cuspidales de sous-groupes de Levi de paraboliques de G . La preuve s'appuie sur une étude de la catégorie des représentations algébriques (dites aussi lisses) de G .

Au §3, nous obtenons en corollaire divers résultats de finitude.

1. LE PROBLEME.

1.1. Soit G un groupe localement compact totalement discontinu. Fixons un corps k de caractéristique 0 et soit $H_k(G)$, ou simplement $H(G)$, l'algèbre de convolution des mesures localement constantes à support compact - à coefficients dans k - sur G ; pour $k = \mathbb{C}$, "localement constant" signifie "localement multiple d'une mesure de Haar"; il s'agit d'une notion purement algébrique, ce qui permet de travailler sur k quelconque. Si G a un sous-groupe compact ouvert qui est un pro-p-groupe, on peut même prendre pour k n'importe quelle $\mathbb{Z}[1/p]$-algèbre. Peu importe : le lecteur ne perdra guère à supposer $k = \mathbb{C}$, et on le supposera de toute façon à partir de 1.8.

Considérons la propriété suivante d'un anneau H (qui n'est pas supposé avoir une unité).

(Id). Pour toute famille finie (x_i) d'éléments de H , il existe un idempotent e tel que $ex_ie = x_i$ (i.e. tel que $x_i \in eHe = eH \cap He$) pour tout i .

Dans [4], D. Flath appelle "idempotented algebras" les $\mathbb{C}$-algèbres vérifiant (Id) . Notons I l'ensemble des idempotents de H . Pour $e,f \in I$, les conditions suivantes sont équivalentes : $eHe \subset fHf$, $e \in fHf$ et $e = fef$. Si elles sont vérifiées, on écrit $e << f$. La relation $<<$ est un ordre sur I , et l'axiome (Id) équivaut à ce qu'il soit filtrant, et que H soit réunion (filtrante) des eHe .

Pour tout sous-groupe compact ouvert K de G , l'image directe par l'inclusion de K dans G de la mesure de Haar normalisée de K et un idempotent e_K de $H(G)$. On obtient ainsi assez d'idempotents pour vérifier (Id) : $H(G)$ vérifie (Id) , et l'ensemble des e_K est confinal dans l'ensemble I des idempotents de $H(G)$.

Une représentation algébrique (V,π) de G est un k-espace vectoriel V , muni d'une action (k-linéaire) de G telle que le fixateur de tout vecteur $v \in V$ soit ouverte (terminologie de [1],[2]; F. Rodier [5] dit "lisse"). Cette notion est équivalente à celle de $H(G)$-module V non dégénéré : tel que $H(G).V = V$, i.e. tel que pour tout $v \in V$ existe un idempotent e tel que $ev = v$. Le dictionnaire est : pour que $v \in V$ soit fixe par K , sous-groupe compact ouvert de G , il faut et il suffit que $e_K v = v$. Pour λ dans k et g dans G , on a alors $(\lambda . \delta_g * e_K)v = \lambda\pi(g)v$.

Nous noterons (Alg G) la catégorie des représentations algébriques de G.
Par la suite, nous dirons simplement <u>représentation</u> pour "représentation algébrique".

1.2. Soit H un anneau vérifiant (Id). Pour $h \in H$, l'endomorphisme $v \mapsto hv$ du groupe abélien sous-jacent à un H-module non dégénéré V est fonctoriel en V. Si H n'a pas d'unité, le foncteur d'oubli ω : (modules non dégénérés) $\to$ (groupes abéliens) peut avoir d'autres endomorphismes. Par exemple, $H(G)$ n'a pas d'unité pour G non discret, et pour $g \in G$, $v \mapsto gb$ est un endomorphisme fonctoriel du k-espace vectoriel sous-jacent à la représentation V.

Pour tout idempotent e, on a $H = He \oplus H(1-e)$, où $H(1-e) := \{h-he | h \in H\}$ est l'annulateur à gauche de e. Soit T la topologie de H ayant pour système fondamental de voisinages de 0 les $H(1-e)$. Le complété $H^\wedge$ de H pour T est la limite projective sur I des He, pour les morphismes de transition $Hf \to He : x \mapsto xe$: un élément $\hat{h}$ de $H^\wedge = \lim\mathrm{proj}\, He$ est un système d'éléments $\hat{h}(e) \in He$, avec $\hat{h}(e) = \hat{h}(f)\cdot e$ pour $e \ll f$
Prenant $g \in I$ qui domine e et f, on vérifie que $\hat{h}(e) = \hat{h}(f)\cdot e$ dès que $He \subset Hf$ (i.e. $e=ef$).

Pour tout module non dégénéré V, muni de la topologie discrète, $H \times V \to V : (h,v) \mapsto hv$ est continu, et $H^\wedge$ agit sur V par continuité : si $ev = v$, $\hat{h}\cdot v = \hat{h}(e)\cdot v$.

<u>Lemme</u> 1.2.1. <u>On a</u> $H^\wedge \xrightarrow{\sim}$ End(foncteur d'oubli ω).

Soit H_s le H-module H, pour les multiplications à gauche. Tout H-module non dégénéré étant quotient d'un multiple de H_s, il suffit de vérifier que tout endomorphisme du groupe abélien H_s, qui commute à $\mathrm{End}_H(H_s)$ (et en particulier aux multiplications à droite) est défini par un élément de $H^\wedge$. On a plus précisément :

<u>Lemme</u> 1.2.2. $H^\wedge$ <u>se plonge dans</u> $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(H)$. <u>Son image est l'adhérence pour la topologie de la convergence simple de l'ensemble des multiplications à gauche. C'est aussi le commutant des multiplications à droite.</u>

L'identité $\hat{h}(e) = \hat{h}\cdot e$ montre que $H^\wedge$ se plonge dans $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(H)$, et que la topologie induite par la topologie simple est T. La composition étant continue pour la topologie simple, on a

$$H^\wedge \hookrightarrow \overline{\{\text{multiplications à gauche}\}} \subset \text{commutant des multiplications à droite},$$

et le lecteur vérifiera que si φ est dans le commutant, il est l'image de $h^\wedge \in H^\wedge$ défini par $\hat{h}(e) = \varphi(e)$.

1.3. Explicitons la multiplication dans $H^\wedge$. Soient $\hat{h}_1$ et $\hat{h}_2$ dans $H^\wedge$, et $e \in I$. Il existe $f \in I$ tel que $\hat{h}_2(e) = f\hat{h}_2(e)$, et $(\hat{h}_1 \cdot \hat{h}_2)(e)$ est

$$(\hat{h}_1\hat{h}_2)\cdot e = \hat{h}_1(\hat{h}_2 e) = \hat{h}_1\hat{h}_2(e) = \hat{h}_1 f\hat{h}_2(e) = \hat{h}_1(f)\cdot\hat{h}_2(e) \quad .$$

La multiplication est continue.

1.4. Traduction (de $H(G)^\wedge = \lim\text{ proj } H(G)\cdot e_k$) .

$H(G)^\wedge$ est l'espace des distributions T sur G telles que pour tout sous-groupe compact ouvert K de G , $T * e_k$ soit à support compact.

Notre but est, pour G un groupe réductif sur un corps local, le calcul du centre de $H(G)^\wedge$.

Pour H vérifiant (Id) , le centre Z de $H^\wedge$ est le commutant de H dans $H^\wedge$ (par continuité de la multiplication) et donc 1.2.2 s'identifie au commutant dans $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(H)$ des multiplications à gauche et à droite.

Lemme 1.5. (i) Le centre Z de H est l'anneau des endomorphismes du foncteur identique de la catégorie des H-modules non dégénérés.

(ii) C'est la limite projective sur I des centres des eHe .

Pour que $z \in H^\wedge = \mathrm{End}(\omega)$ fournisse, pour chaque module non dégénéré V , un endomorphisme de module de V , il faut et il suffit qu'il commute à H . Ceci prouve (i).

Si $eHe \subset fHf$ et que z est central dans fHf , on a $ez = ze = eze$, et si $x \in eHe$, $[eze,x] = [z,x] = 0$: eze est central dans eHe . Ceci donne un sens à (ii) : le morphisme de transition est $z \mapsto ze = eze$, et il s'agit de montrer que pour que $z \in H^\wedge$ commute à H , il faut et il suffit que ze soit dans le centre de eHe , pour tout $e \in I$. La nécessité se vérifie comme ci-dessus. Pour la suffisance, on vérifie d'abord que $ez = ze$: pour tout $f > e$, on a $(ez-ze)f = ezf - zfe = e(fzf) - (fzf)e$, et on utilise que fzf est central dans fHf . Ceci acquis, pour que z commute à eHe , il faut et il suffit que $ze = eze$ soit dans le centre de eHe , et on utilise que H est réunion des eHe .

1.6. Traduction (de 1.5. (ii)) . Le centre de $H(G)^\wedge$ est l'espace des distributions T sur G telles que pour tout sous-groupe compact ouvert K de G , $T * e_k$ soit à support compact, et dans le centre de l'algèbre de Hecke $H(G,K) := e_K * H(G) * e_K$.

1.7. Variante . Le centre de $H(G)^\wedge$ est l'espace des distributions T sur G , invariantes par conjugaison, et telles que pour tout sous-groupe compact ouvert K de G , $T * e_K$ soit à support compact.

L'invariance par conjugaison de T équivaut en effet à ce que pour toute mesure localement constante (resp. distribution) à support compact U , on ait $T * U = U * T$.

1.8. Si k' est une extension de k , on a $H_{k'}(G) = H_k(G) \otimes_k k'$. Pour K un sous-groupe compact ouvert, la k'-algèbre $e_K H_{k'}(G) e_k$, et son centre, se déduisent de même de la k-algèbre $e_K H_k(G) e_k$, et de son centre, par extension des scalaires. Ceci, et 1. 5 (ii) , contrôlent la dépendance en k du centre de $H_k(G)^\wedge$. Dans ce qui suit, nous ferons l'hypothèse

(1.8.1) $k = \mathbb{C}$ et G est dénombrable à l'infini.

Les algèbres $H(G,K)$ sont alors de dimension dénombrable, et le lemme de Schur est valable ([1] 2.11) . En particulier, si z est dans le centre Z de $H(G)^\wedge$, pour toute représentation algébrique irréductible (V,π) de G , z agit sur V par un scalaire $z(\pi)$, et on associe ainsi à z une fonction sur l'ensemble $G^\wedge$ des représentations algébriques irréductibles de G . Le morphisme d'algèbres

(1.8.2) $Z \longrightarrow$ (fonctions sur $G^\wedge$)

est injectif : toute représentation de G est quotient d'un multiple de $H(G)_s$) . Pour tout $h \neq 0$ dans $H(G)$, il existe (V,π) irréductible tel que $\pi(h) \neq 0$ ([1] 2.12) . La représentation $H(G)_s$ se plonge donc dans un produit de représentations irréductibles, et z est déterminé par la fonction $z(\pi)$. Notre détermination de Z sera pour l'essentiel une description de son image par (1.8.2).

1.9. Le centre $Z(A)$ d'une catégorie abélienne A est l'anneau des endomorphismes du foncteur identique de A : la donnée pour tout objet A d'un endomorphisme z_A de A , de sorte que pour tout morphisme $f : A \longrightarrow B$, on ait $z_B f = f z_A$.

Si la catégorie abélienne A est le produit de catégories abéliennes $(A_i)_{i\in I}$ on a $Z(A) = \prod Z(A_i)$. Supposons que la catégorie A admette des sommes directes indexées par I , et que tout morphisme $f : X \longrightarrow \oplus Y_i$ tel que les $pr_i f$ soient nuls est nul. C'est le cas pour (Alg G) . Alors, se donner une décomposition de A en produit comme ci-dessus revient à se donner des sous-catégories pleines A_i de A $(i \in I)$ telles que

(a) Pour X dans A_i et Y dans A_j , on a $\mathrm{Hom}(X,Y) = 0$ si $i \neq j$.

(b) Tout objet X est une somme

(1.9.1) $X = \oplus X_i$, avec X_i dans A_i .

Le centre de $H(G)^\wedge$ est celui de la catégorie (Alg G) (1.1) et 1.5(i) . Une première étape dans la détermination du centre de $H(G)^\wedge$ sera la décomposition 2.10, implicite dans [1], de (Alg G) en produit. Les résultats de décomposition auxquels sont consacrés la fin de ce paragraphe sont des préliminaires à 2.10.

1.10. Soit W une représentation de G . Son <u>dual algébrique</u>, ou simplement dual, est l'espace $W^\sim$ des formes linéaires fixes par un sous-groupe ouvert de G . Si on munit W de la topologie linéaire pour laquelle les $(1-e_K)W$ (K sous-groupe compact ouvert) forment un système fondamental de voisinage de 0 , c'est le dual topologique :

$$W^\sim = \lim\ \mathrm{ind}(W/(1-e_K)W)^\vee = \lim\ \mathrm{ind}(W^K)^\vee .$$

Rappelons que les conditions suivantes sont équivalentes ([1] 2.40) :

(a) Les coefficients $< \zeta, gw >$ $(w \in W\ ,\ \zeta \in W^\sim)$ sont des fonctions sur G à support compact.

(b) Pour tout sous-groupe compact ouvert K et tout $w \in W$, la fonction de G dans $W : g \mapsto e_K gw$ est à support compact.

Si elles sont vérifiées, et que W est de génération finie, par exemple irréductible, W est <u>admissible</u> ([1] 2.41), i.e. les W^K sont de dimension finie. La condition (b) peut encore s'énoncer :

(b*) Pour tout $w \in W$, si $g \to \infty$ dans G (selon le filtre des compléments des compacts), on a $gw \to 0$ (pour la topologie linéaire ci-dessus).

On note $(\mathrm{Alg}\, G)_f$ la catégorie des représentations de G vérifiant (a) et (b).

1.11. Soient (V,π) irréductible dans $(\mathrm{Alg}\ G)_f$, $(\mathrm{Alg}\ G)(\pi)$ la catégorie des représentations sommes de copies de (V,π) , et $(\mathrm{Alg}\ G)(\mathrm{hors}\,\pi)$ celle des représentations sans sous-quotient isomorphe à (V,π). Des arguments parallèles à ceux de la théorie des groupes finis donnent

$$(1.11.1)\qquad (\mathrm{Alg}\ G) = (\mathrm{Alg}\ G)(\pi) \times (\mathrm{Alg}\ G)(\text{hors } \pi)$$

([1] 2.44, du moins pour G unimodulaire) d'où un idempotent $e(\pi)$ du centre de $H(G)^\wedge$, valant 1 sur $(\mathrm{Alg}\ G)(\pi)$ et 0 sur $(\mathrm{Alg}\ G)$ (hors π).

Supposons G unimodulaire. Seul ce cas nous importera. La preuve de (1.11.1) donne pour la distribution $e(\pi)$ (1.7) l'expression suivante, qui ne nous servira pas. Soient d_π le degré formel de π (intrinsèquement, une mesure de Haar sur G) et Θ_π le caractère de π (une fonction généralisée). On a $\overline{\Theta}_\pi(g) = \Theta_\pi(g^{-1})$, car π est unitarisable, et

$$(1.11.2)\qquad e(\pi) = \Theta_\pi(g^{-1}).d_\pi \quad .$$

<u>Variantes</u>. Soit A un ensemble de classes d'isomorphie de représentations irréductibles dans $(\mathrm{Alg}\ G)_f$, et $(\mathrm{Alg}\ G)$ (hors A) la catégorie des représentations sans sous-quotient de classe d'isomorphie dans A.

a) Si A est fini, on a

$$(1.11.3)\qquad (\mathrm{Alg}\ G) = \Big(\bigoplus_{\pi\in A} (\mathrm{Alg}\ G)(\pi)\Big) \times (\mathrm{Alg}\ G)\ (\text{hors } A)\ .$$

b) La même décomposition vaut pour une famille infinie, si pour chaque sous-groupe compact ouvert K il n'y a dans A qu'un nombre fini de (V,π) tels que $V^K \neq 0$. Il faut vérifier 1.9 (b). Soit donc W une représentation de G. Soit $W(\pi)$ la composante (1.11.1) de W dans $(\mathrm{Alg}\ G)(\pi)$ $(\pi \in A)$. Pour K un sous-groupe compact ouvert de G et $A' \subset A$ une partie finie de A contenant tous les (V,π) dans A tels que $V^K \neq 0$, la décomposition (1.9.1) déduite de (1.11.3) pour A' : $W = \bigoplus_{\pi\in A'} W(\pi) \times W(\text{hors } A')$ induit une décomposition

$$W^K = \bigoplus_{\pi\in A'} W(\pi)^K \times W(\text{hors } A')^K = \bigoplus_{\pi\in A} W(\pi)^K \times W(\text{hors } A')^K\ ,$$

avec $W(\text{hors } A')^K$ indépendant de A'. Posons $W(\text{hors } A)^K := W(\text{hors } A')^K$ (A' assez grand, rel. K) et $W(\text{hors } A) = \bigcup_K W(\text{hors } A)^K$. Par passage à la limite sur K de plus en plus petit, on a encore

$$W = \bigoplus_{\pi\in A} W(\pi) \times W(\text{hors } A)$$

et cette décomposition, fonctorielle en W, donne (1.11.3).

c) Sans hypothèse de finitude sur A, un argument parallèle à b) montre que toute représentation <u>admissible</u> admet une unique décomposition

$$W = \bigoplus_{\pi \in A} W(\pi) \times W(\text{hors } A) .$$

Cette décomposition vaut encore pour toute limite inductive filtrante de représentations admissibles, et en particulier pour toute représentation dans $(\mathrm{Alg}\ G)_f$ (rappelons que tout W dans $(\mathrm{Alg}\ G)_f$ de génération finie est admissible). Prenant pour A l'ensemble $\hat{G}_f$ de toutes les classes d'isomorphie d'irréductibles dans $(\mathrm{Alg}\ G)_f$, on trouve que

(1.11.4) $$(\mathrm{Alg}\ G)_f = \prod_{\pi \in \hat{G}_f} (\mathrm{Alg}\ G)(\pi) .$$

Si $\hat{G}_f$ vérifie la condition de finitude b), on a en outre

(1.11.5) $$(\mathrm{Alg}\ G) = (\mathrm{Alg}\ G)_f \times (\mathrm{Alg}\ G)\ (\text{hors } \hat{G}_f) .$$

1.12. Soient M un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini et $u : G \to M$. On suppose que la restriction de u au centre $Z(G)$ de $G : Z(G) \to M$ a un noyau compact et un conoyau fini. Soient $G^\circ := \mathrm{Ker}(u)$ et (V°, π°) irréductible dans $(\mathrm{Alg}\ G^\circ)_f$. Soit G_1 le sous-groupe de G formé des g tels que π° soit isomorphe à son conjugué par g. Il contient G° et le centre de G, donc est d'indice fini, et l'ensemble A des classes d'isomorphie de conjugués de (V°, π°) est fini. Pour toute représentation (V, π) de G, (1.11.3) appliqué à la restriction de V à G° fournit une décomposition $V = V' \oplus V''$, où V' est la somme des sous-représentations isomorphes à un conjugué de (V°, π°). Cette décomposition est stable sous G, et fournit une décomposition

(1.12.1) $$(\mathrm{Alg}\ G) = (\mathrm{Alg}\ G)_A \times (\mathrm{Alg}\ G)_{\text{hors } A} .$$

Nous nous proposons de décrire la catégorie $(\mathrm{Alg}\ G)_A$.

(1.12.2) Pour W dans $(\mathrm{Alg}\ G)_A$, soit W_1 le sous-espace de W somme des sous-G°-représentations de G° isomorphe à (V°, π°). Il est stable sous G_1. Le foncteur $W \mapsto W_1$ est une équivalence de $(\mathrm{Alg}\ G)_A$ avec la catégorie $(\mathrm{Alg}\ G_1)_{\pi^\circ}$ des représentations de G_1 de restriction à G°

et cette décomposition, fonctorielle en W , donne (1.11.3).

c) Sans hypothèse de finitude sur A , un argument parallèle à b) montre que toute représentation <u>admissible</u> admet une unique décomposition

$$W = \bigoplus_{\pi \in A} W(\pi) \times W(\text{hors } A) .$$

Cette décomposition vaut encore pour toute limite inductive filtrante de représentations admissibles, et en particulier pour toute représentation dans $(\mathrm{Alg}\ G)_f$ (rappelons que tout W dans $(\mathrm{Alg}\ G)_f$ de génération finie est admissible). Prenant pour A l'ensemble $\hat{G}_f$ de toutes les classes d'isomorphie d'irréductibles dans $(\mathrm{Alg}\ G)_f$, on trouve que

(1.11.4) $$(\mathrm{Alg}\ G)_f = \prod_{\pi \in \hat{G}_f} (\mathrm{Alg}\ G)(\pi) .$$

Si $\hat{G}_f$ vérifie la condition de finitude b), on a en outre

(1.11.5) $$(\mathrm{Alg}\ G) = (\mathrm{Alg}\ G)_f \times (\mathrm{Alg}\ G)\ (\text{hors } \hat{G}_f) .$$

1.12. Soient M un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini et $u : G \to M$. On suppose que la restriction de u au centre $Z(G)$ de $G : Z(G) \to M$ a un noyau compact et un conoyau fini. Soient $G^\circ := \mathrm{Ker}(u)$ et (V°, π°) irréductible dans $(\mathrm{Alg}\ G^\circ)_f$. Soit G_1 le sous-groupe de G formé des g tels que π° soit isomorphe à son conjugué par g . Il contient G° et le centre de G , donc est d'indice fini, et l'ensemble A des classes d'isomorphie de conjugués de (V°, π°) est fini. Pour toute représentation (V, π) de G ,(1.11.3) appliqué à la restriction de V à G° fournit une décomposition $V = V' \oplus V''$, où V' est la somme des sous-représentations isomorphes à un conjugué de (V°, π°) . Cette décomposition est stable sous G , et fournit une décomposition

(1.12.1) $$(\mathrm{Alg}\ G) = (\mathrm{Alg}\ G)_A \times (\mathrm{Alg}\ G)_{\text{hors } A} .$$

Nous nous proposons de décrire la catégorie $(\mathrm{Alg}\ G)_A$.

(1.12.2) Pour W dans $(\mathrm{Alg}\ G)_A$, soit W_1 le sous-espace de W somme des sous-G°-représentations de G° isomorphe à (V°, π°) . Il est stable sous G_1 . Le foncteur $W \mapsto W_1$ est une équivalence de $(\mathrm{Alg}\ G)_A$ avec la catégorie $(\mathrm{Alg}\ G_1)_{\pi^\circ}$ des représentations de G_1 de restriction à G°

multiple de (V°,π°) . L'équivalence inverse est l'induction de G_1 à G° .

(1.12.3) Soit $\widetilde{G}_1$ le groupe des paires (g,P) avec $g \in G_1$ et $P : V^\circ \xrightarrow{\sim} V^\circ$ tel que $P\pi^\circ(h)P^{-1} = \pi^\circ(ghg^{-1})$. C'est une extension centrale de G_1 par $\mathbb{C}^*$, et G° s'identifie à un sous-groupe de $\widetilde{G}_1$:

$$\begin{tikzcd} & G^o \arrow[d, "g \mapsto (g{,}\pi(g))"] & \\ \mathbb{C}^* \arrow[r, "z \mapsto (e{,}z)"'] & \widetilde{G}_1 \arrow[r, "(g{,}P) \mapsto g"'] & G_1 \end{tikzcd}$$

La représentation π° de G° se prolonge à $\widetilde{G}_1$ par $(g,P) \mapsto P$.

Le quotient $\widetilde{M}_1$ de $\widetilde{G}_1$ par le sous-groupe invariant G^o est une extension centrale de l'image M_1 de G_1 dans M par $\mathbb{C}^*$. Le centre $\widetilde{C}$ de $\widetilde{M}_1$ est l'image inverse d'un sous-groupe C de M_1 contenant l'image du centre de G , donc est d'indice fini.

Le foncteur $H \mapsto H \otimes V_o$ est une équivalence de la catégorie des vectoriels avec celle des représentations de G° multiples de V_o . L'équivalence inverse est $W \mapsto \mathrm{Hom}(V_o,W)$. Se donner une action π de G_1 sur $H \otimes V_o$, prolongeant l'action donnée de G° , revient à se donner une action ρ de $\widetilde{M}_1$ sur H , telle que $z \in \mathbb{C}^* \subset H$ agisse par multiplication par z^{-1} : faire agir l'image dans $\widetilde{M}_1$ de $(g,P) \in \widetilde{G}_1$ par Q tel que $\pi(g) = Q \otimes P$:

$$\pi(g) = \rho(g,P) \otimes P$$

Cette construction est une équivalence de $(\mathrm{Alg}\ G^1)_{\pi^\circ}$ avec la catégorie $\mathcal{B}$ des représentations de $\widetilde{M}_1$, induisant $z \mapsto z^{-1}$ sur $\mathbb{C}^*$. Les équivalences $(\mathrm{Alg}\ G)_A \sim (\mathrm{Alg}\ G_1)_{\pi^\circ} \sim \mathcal{B}$ induisent un isomorphisme du centre $Z((\mathrm{Alg}\ G)_A)$ avec $Z(\mathcal{B})$. La catégorie $\mathcal{B}$ est bien connue (théorie du groupe de Heisenberg) et, après quelques rappels sur sa structure, nous allons en déduire une description de $Z((\mathrm{Alg}\ G)_A)$.

1.13. L'application commutateur induit sur $\widetilde{M}_1/\widetilde{C} = M/C$ une application bimultiplicative alternée non dégénérée $M/C \times M/C \rightarrow U_1 \subset \mathbb{C}^*$. On sait que tout groupe fini H , muni d'une telle application $\langle\ \rangle$ peut s'écrire

$H = X \times X'$, où X' est le dual de Pontrjagin de X et où $\langle (x,x'),(g,y')\rangle = \langle x,x'\rangle\langle y,x'\rangle^{-1}$. En particulier, son ordre est un carré. Soit X un sous-groupe de M/C, maximal parmi ceux sur lesquels le commutateur est trivial. Par exemple : correspondant à une décomposition comme plus haut. Son image inverse $\widetilde{X}$ dans $\widetilde{M}_1$ est un sous-groupe commutatif maximal.

On sait que pour chaque caractère χ de $\widetilde{C}$, tel que $\chi(z) = z^{-1}$ pour $z \in \mathbb{C}^*$, il existe à isomorphisme près une unique représentation irréductible de $\widetilde{M}_1$ de caractère central χ . On l'obtient en prolongeant - n'importe comment - χ à $\widetilde{X}$ et en induisant de $\widetilde{X}$ à $\widetilde{M}_1$. Si π est une représentation irréductible, avec $\pi(z) = z^{-1}$ pour $z \in \mathbb{C}^*$, les autres sont donc de la forme $\pi\omega$, ω un caractère de M_1 , et la classe d'isomorphie de $\pi\omega$ ne dépendant que de $\omega|C$.

Notons $\mathbb{C}[\widetilde{M}_1;z^{-1}]$ la $\mathbb{C}$-algèbre engendrée par des éléments δ_m $(m \in \widetilde{M}_1)$, avec les relations $\delta_m \cdot \delta_n = \delta_{mn}$ et $\delta_z = z^{-1}.\delta_e$. Si les $\widetilde{m}$ forment un relèvement ensembliste de M_1 dans $\widetilde{M}_1$, elle admet comme base vectorielle les $\delta_{\widetilde{m}}$. Il revient au même de se donner un $\mathbb{C}[\widetilde{M}_1;z^{-1}]$-module ou une représentation de $\widetilde{M}_1$ où $z \in \mathbb{C}^*$ agisse par z^{-1} : faire agir δ_m comme m . L'algèbre $\mathbb{C}[\widetilde{M}_1;z^{-1}]$ ayant une unité, le centre de la catégorie de ses modules est simplement son centre, à savoir $\mathbb{C}[\widetilde{C};z^{-1}]$: il est simplement engendré par le centre du groupe $\widetilde{M}_1$. Traduisons en terme de représentations.

1.14. Soit T le tore (au sens des groupes algébriques) de groupe de caractères M . Il a pour points

$$T(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(M,\mathbb{C}^*)$$

et pour algèbre de fonctions régulières l'algèbre $\mathbb{C}[M]$ du groupe M . Pour $M = \mathbb{Z}^n$, c'est l'algèbre des polynômes de Laurent $\mathbb{C}[t_1,t_1^{-1},\ldots,t_n,t_n^{-1}]$. Soit $F \subset T(\mathbb{C})$ l'orthogonal de $C \subset M_1 \subset M$. Le tore quotient T/F est le tore de groupe de caractères C .

L'ensemble $\mathrm{Irr}(\mathcal{B})$ des classes d'isomorphie de représentations irréductibles de $\widetilde{M}_1$, avec $z \mapsto z^{-1}$, est, on l'a vu en 1.13, un espace principal homogène sous $(T/F)(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(M,\mathbb{C}^*)/F = \mathrm{Hom}(C,\mathbb{C}^*)$: si (V,π) est irréductible dans $\mathcal{B}$, tout irréductible est isomorphe à $(V,\pi\chi)$, pour $\chi \in \mathrm{Hom}(M,\mathbb{C}^*)$ et $\pi\chi$ est isomorphe à $\pi\chi'$ si et seulement si

$\chi|C = \chi'|C$. Ceci munit $\mathrm{Irr}(\mathcal{B})$ d'une structure de variété algébrique, une fonction f sur $\mathrm{Irr}(\mathcal{B})$ étant régulière si et seulement si la fonction $\chi \mapsto f(\pi\chi)$ sur $T(\mathbb{C})$ est régulière. Par passage au quotient, elle provient alors d'une fonction régulière sur T/F , i.e. d'une combinaison linéaire finie de fonctions $\chi \mapsto \chi(c)$ $(c \in C)$.

Un élément z du centre de $\mathcal{B}$ fournit une fonction $z(\pi)$ sur $\mathrm{Irr}(\mathcal{B})$: à (V,π) , attacher le scalaire par lequel agit z sur V . La description 1.13 du centre de $\mathcal{B}$: $Z(\mathcal{B}) = \mathbb{C}[\tilde{C},z^{-1}]$ peut se reformuler comme suit : l'application $z \mapsto$ (fonction $z(\pi)$) est un isomorphisme de $Z(\mathcal{B})$ avec l'anneau des fonctions régulières sur la variété algébrique $\mathrm{Irr}(\mathcal{B})$.

Les équivalences de catégorie de 1.12

$$(\mathrm{Alg}\ G)_A \sim (\mathrm{Alg}\ G^1)_{\pi^\circ} \sim \mathcal{B}$$

sont compatibles à la torsion par un caractère de M . Par traduction on trouve que $\mathrm{Irr}(\mathrm{Alg}\ G)_A$ est un espace homogène sous $T(\mathbb{C})$, et principal homogène sous $(T/F)(\mathbb{C})$, d'où une structure de variété algébrique sur $\mathrm{Irr}(\mathrm{Alg}\ G)_A$. Chaque élément z du centre de $(\mathrm{Alg}\ G)_A$ définit une fonction $z(\pi)$ sur $\mathrm{Irr}(\mathrm{Alg}\ G)_A)$: $\pi \mapsto$ le scalaire par lequel agit z , et on a

Proposition 1.15. L'application $z \mapsto$ (fonction $z(\pi)$) est un isomorphisme du centre de la catégorie abélienne $(\mathrm{Alg}\ G)_A$ avec l'anneau des fonctions régulières sur la variété algébrique $\mathrm{Irr}(\mathrm{Alg}\ G)_A$.

1.16. Le fait que pour π irréductible dans $(\mathrm{Alg}\ G)_A$ et z dans le centre de $(\mathrm{Alg}\ G)_A$, la fonction $\chi \mapsto z(\pi\chi)$ sur $T(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(M,\mathbb{C}^*)$ soit régulière peut se déduire de ce que $\pi\chi$ dépend "algébriquement" de χ . Expliquons ce que cela veut dire, et comment l'utiliser.

Soit S une variété algébrique affine, d'anneau de fonctions régulières B . On définit une famille algébrique de représentations admissibles de G , paramétrée par S , comme étant un B-module V , muni d'une action de G (commutant à celle de B) , plat et pour lequel est vérifié la propriété suivante :

(B-adm). Pour tout sous-groupe compact ouvert K de G , V^K est un B-module de type fini.

La conjonction des conditions "plat" et (B-adm) équivaut à : chaque

V_K est un B-module projectif de type fini. Si la condition (B-adm) est vérifiée, pour tout point $s \in S$, correspondant à un homomorphisme $\sigma : b \mapsto b(s) : B \to \mathbb{C}$, la représentation $V_s := V \otimes_{B,\sigma} \mathbb{C}$ de G est admissible.

Montrons que, pour (V,π) irréductible dans $(\mathrm{Alg}\ G)_A$, les $(V,\pi\chi)$ forment une famille algébrique, au sens précédent. On prend $B = \mathbb{C}[M]$, l'anneau des fonctions régulières sur T. On dispose d'un caractère "universel" $\chi_{un} : M \to B$, tel que pour $\chi \in T(\mathbb{C})$ correspondant à $x : B \to \mathbb{C}^*$, on ait $x\chi_{un} = \chi$. Faisons agir G sur $V_B := V \otimes B$ par $\pi \cdot \chi_{un}$. C'est la famille algébrique cherchée: on a
$(V_B, \pi \cdot \chi_{un}) \otimes_{B,x} \mathbb{C} \simeq (V, \pi\chi)$.

Le lemme ci-dessous montre que z agit dans $(V_B, \pi \cdot \chi_{un})$ par multiplication par un $b \in B$. Par fonctorialité, z agit dans $(V,\pi\chi)$ par $b(\chi) : z(\pi\chi) = b(\chi)$ est une fonction régulière de $\chi \in T(\mathbb{C})$.

<u>Lemme</u> 1.17. <u>Soient</u> S,B <u>comme ci-dessus, et</u> V <u>une famille algébrique de représentations admissibles de</u> G, <u>paramétrée par</u> S. <u>Supposons qu'il existe un ensemble</u> Ξ <u>de points de</u> S : $\Xi \subset S(\mathbb{C})$ <u>tel que les</u> $b \mapsto b(s)$ $(s \in \Xi)$ <u>séparent les</u> $b \in B$ $(\Leftrightarrow$ S <u>réduit et</u> Ξ <u>Zariski-dense</u>) <u>et que les</u> V_s <u>soient irréductibles</u>. <u>Alors, tout endomorphisme</u> B-<u>linéaire</u> z <u>de</u> V <u>qui commute à l'action de</u> G <u>est la multiplication par un</u> $b \in B$.

Soit K un sous-groupe compact ouvert. Par hypothèse, V^K est un B-module projectif de type fini. Soit $z(K)$ l'endomorphisme de V^K induit par z. Le lemme de Schur pour les V_s $(s \in \Xi)$ implique que pour tout $\sigma : B \to \mathbb{C}$ correspondant à $s \in \Xi$, $z(K)$ agit comme un scalaire sur $V^K \otimes_{B,\sigma} \mathbb{C}$. Il en résulte que $z(K)$ est la multiplication par un $b \in B$: par localisation, on se ramène à supposer que le module projectif V^K est libre. L'endomorphisme $z(K)$ se représente alors comme une matrice carrée z_{ij}. Les $\sigma((z_{ij}))$ sont des matrices scalaires. Puisque les σ $(s \in \Xi)$ séparent les $b \in B$, (z_{ij}) est scalaire : on a $z_{ii} = z_{jj}$ et $z_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. Ceci, valant pour tout K, prouve le lemme.

Nous aurons à réutiliser la famille algébrique $(V,\pi\chi)$ de représentations de G introduite en 1.16. Formellement : la représentation $(V \otimes \mathbb{C}[M], \pi \otimes \chi_{un})$. Elle paramétrise tous les irréductibles dans $(\mathrm{Alg}\ G)_A$ (avec répétitions si $F \neq \{1\}$). De plus

<u>Lemme</u> 1.18. <u>Toute représentation dans</u> $(\mathrm{Alg}\ G)_A$ <u>est quotient d'un multiple</u>

de $(V \otimes \mathbb{C}[M], \pi \otimes \chi_{un})$.

La représentation $V \otimes \mathbb{C}[M]$ est l'induite de $G°$ à G de la restriction de V à $G°$, en ce sens que la restriction à $V \hookrightarrow V \otimes \mathbb{C}[M] : v \mapsto v \otimes \delta_e = v \otimes 1$ fournit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_G(V \otimes \mathbb{C}[M], X) = \mathrm{Hom}_{G°}(V, X) \quad .$$

Le lemme résulte donc de ce que X dans $(\mathrm{Alg}\ G)_A$ a une restriction à $G°$ quotient d'une somme de copies de $V|G°$.

Autre preuve. On vérifie que $\mathbb{C}[\widetilde{M}_1; z^{-1}]$ est une algèbre d'Azumaya sur son centre $\mathbb{C}[\widetilde{C}; Z^{-1}]$. Pour prouver 1.18, il suffit alors de montrer que le $\mathbb{C}[\widetilde{M}_1; Z^{-1}]$-module correspondant par 1.12 à $(V \otimes \mathbb{C}[M], \pi \otimes \chi_{un})$ est libre $\neq 0$ en tant que $\mathbb{C}[\widetilde{C}; z^{-1}]$-module.

Remarque. Si $\widetilde{M}_1$ n'est pas commutatif, il n'y a pas de paramétrisation algébrique sans répétition des irréductibles de $(\mathrm{Alg}\ G)_A$. Cela résulte de ce que, si L est le corps des fractions du centre $\mathbb{C}[\widetilde{C}; z^{-1}]$ de $\mathbb{C}[\widetilde{M}_1; z^{-1}]$, $\mathbb{C}[\widetilde{M}_1; Z^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}[\widetilde{C}; z^{-1}]} L$ est une algèbre à division sur L .

1.19. Supposons G unimodulaire, et $u : G \to M$ surjectif. Soit $n \cdot \Sigma \pi_i$ la décomposition de $\pi|G$ en représentations irréductibles, d_i le degré formel de π_i (des mesures de Haar sur $G°$, d'ailleurs égales entre elles) et dg la mesure de Haar sur G de restriction à $G°$ $n \cdot \Sigma d_i$. Soit $m \in M$ orthogonal à F . On a (1.5 (i), 1.9,(1.12.1)

$$Z(H(G)^{\wedge}) \sim Z(\mathrm{alg}\ G) \sim Z((\mathrm{Alg}\ G)_A) \times Z((\mathrm{Alg}\ G)_{\mathrm{hors}\,A} \quad ;$$

soit $z(\pi, m)$ d'image $\pi\chi \mapsto \chi(m)$ dans $Z((\mathrm{Alg}\ G)_A)$ (1.18) et 0 dans $Z((\mathrm{Alg}\ G)_{\mathrm{hors}\,A})$. On vérifie que, vu comme distribution sur G (1.7) $z(\pi, m)$ est donné par la formule

$$z(\pi, m) = \frac{1}{\# F} \quad \Theta_\pi(g^{-1})\ dg|u^{-1}(m)$$

$$= \frac{1}{\# F} \left(\int \Theta_{\pi\chi}(g^{-1}) \chi(m) d\chi \right) dg \ ,$$

où l'intégration porte sur le groupe compact des caractères unitaires de M , muni de sa mesure de Haar normalisée.

1.20. Une représentation W de G est dite quasi-cuspidale si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées.

(a) Les coefficients de la restriction de W à G° sont à support compact.

(b) Les coefficients de W sont à support compact mod le centre $Z(G)$ de G.

(c) Pour tout $w \in W$, si $g \to \infty$ dans G, selon le filtre des complémentaires de compacts mod $Z(G)$, alors $gw \to 0$ dans W, pour la topologie des $(1-e_K)W$ (cf. 1.10 (b*)).

On a (a) $\Leftrightarrow$ (c) pour G° (1.10) et ((c) pour G°) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a). On dit que W est <u>cuspidale</u> si elle est quasi-cuspidale et admissible.

Soit $(\mathrm{Alg}\ G)_{qc}$ la catégorie des représentations quasi-cuspidales de G. Pour chaque orbite Ω de G dans l'ensemble $(G^\circ)^\wedge_f$ des classes d'isomorphie d'irréductibles dans $(\mathrm{Alg}\ G^\circ)_f$, notons provisoirement $(\mathrm{Alg}\ G)_\Omega$ la catégorie des représentations de G. dont la restriction à G° est somme de représentations dans Ω. On déduit de (1.11.4) que

$$(\mathrm{Alg}\ G)_{qc} = \prod_\Omega (\mathrm{Alg}\ G)_\Omega .$$

D'après 1.13, les irréductibles dans $(\mathrm{Alg}\ G)_{qc}$, étant irréductibles dans l'un des $(\mathrm{Alg}\ G)_\Omega$, sont admissibles (i.e. quasi-cuspidal + irréductible $\Rightarrow$ cuspidal), et les orbites D de $T(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(M,\mathbb{C}^*)$ agissant par torsion $\pi \to \pi\chi$ dans l'ensemble $\mathrm{Irr}((\mathrm{Alg}\ G)_{qc})$ des classes d'isomorphie d'irréductibles dans $(\mathrm{Alg}\ G)_{qc}$ correspondent donc biunivoquement aux orbites Ω : à l'orbite $\{\pi\chi | \chi \in T(\mathbb{C})\}$ attacher Ω tel que π soit dans $(\mathrm{Alg}\ G)_\Omega$: Ω est l'ensemble des classes d'isomorphie des constituants de $\Omega|G^\circ$. On écrira $(\mathrm{Alg}\ G)(D)$ pour $(\mathrm{Alg}\ G)_\Omega$. C'est la catégorie des représentations de G dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans D. On a

(1.20.1) $$(\mathrm{Alg}\ G)_{qc} = \prod_D (\mathrm{Alg}\ G)(D) .$$

(produit sur les orbites de $T(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(M,\mathbb{C}^*)$ dans $\mathrm{Irr}((\mathrm{Alg}\ G)_{qc})$.

Si, pour tout sous-groupe compact ouvert K de G°, G° n'a qu'un nombre fini de classes d'isomorphie de représentations irréductibles (V,π) dans $(\mathrm{Alg}\ G^\circ)_f$ telles que $V^K \neq 0$, on déduit de (1.11.5) une décomposition

(1.20.2) $$(\mathrm{Alg}\ G) = (\mathrm{Alg}\ G)_{qc} \times (\mathrm{Alg}\ G)_{nqc} .$$

Munissons $\mathrm{Irr}((\mathrm{Alg}\ G)_{qc})$ de la structure de variété algébrique pour laquelle il est, comme schéma, somme disjointe des orbites de $T(\mathbb{C})$ $\mathrm{Hom}(M,\mathbb{C}^*)$, munies de leur structure 1.14. D'après 1.9 et 1.18, l'application $z \mapsto z(\pi)$ qui à $(V,\pi) \in \mathrm{Irr}((\mathrm{Alg}\ G)_{qc})$ attache le scalaire par lequel z agit sur V , identifie $Z((\mathrm{Alg}\ G)_{qc})$ à l'algèbre des fonctions régulières sur $\mathrm{Irr}((\mathrm{Alg}\ G)_{qc})$ (i.e., par définition d'une somme disjointe, régulière sur chaque composante). Si la condition de finitude ci-dessus est vérifiée, on a de plus par (1.20.2)

(1.20.3) $$Z(\mathrm{Alg}\ G) = Z((\mathrm{Alg}\ G)_{qc}) \times Z((\mathrm{Alg}\ G)_{nqc}) \ .$$

2. LE THEOREME.

2.1. Nous aurons à faire un usage essentiel des résultats du chapitre II de [1] , généralisés au cas d'un groupe réductif quelconque. Si nous nous contentions de considérer des représentations admissibles, d'autres références pourraient être données, mais il est essentiel pour nous d'utiliser des représentations algébriques non admissibles - par exemple, et typiquement, la représentation $(V_B, \pi\chi_{un})$ de 1.16 (ou la régulière). Dans loc.cit, seul le cas de $GL(n,F)$ (F corps local non archimédien) est explicitement considéré. Les modifications à apporter aux preuves pour traiter le cas de $\underline{G}(F)$, $\underline{G}$ réductif sur F , sont les suivantes.

a) Introduire les sous-groupes paraboliques, leur décomposition de Levi et les racines explicitement, là où leur introduction n'est qu'implicite. De même pour les décompositions de Bruhat, de Cartan et d'Iwasawa.

b) Soit A un tore déployé maximal. Il faut disposser de sous-groupes compacts ouverts K arbitrairement petit et bons (rel. A) au sens suivant. Soit P un parabolique contenant A , $L.U$ sa décomposition de Levi, avec $L \supset A$, et $L\,\overline{U}$ le parabolique opposé contenant A . Notons $[H]$ la mesure image dans G de la mesure de Haar normalisée d'un sous-groupe compact H . On veut avoir $K = (K \cap U)\ (K \cap L)(K \cap \overline{U})$. L'image inverse de la mesure de Haar de G par l'application $u\,\ell\,\overline{u} : U \times L \times \overline{U} \hookrightarrow G$ étant $\delta_P(\ell)^{-1}\cdot du\ d\ell\ d\overline{u}$, et δ_P valant 1 sur $K \cap L$, on a alors $[K] = [K \cap \overline{U}] * [K \cap L] * [K \cap U]$. La démonstration de Jacquet (cf. [1] 3.16; voir aussi 3.2) montre que pour toute représentation admissible V de G , notant V_U les coinvariants de

U dans V $(V_U = V/ < \{uv-v \mid u \in U\ ,\ v \in V\} >$, on a

$$V^K \twoheadrightarrow (V_U)^{K\cap L} .$$

Voici une méthode pour construire de tels sous-groupes. Soient (x_i) un système de coordonnées locales analytique centré en e sur G, et Λ le réseau de Lie G sur lequel les dx_i sont à valeurs dans l'anneau $\mathcal{O}_F$ de la valuation de F. Si Λ est somme de ses intersections avec $\mathrm{Lie}(\overline{U})$, $\mathrm{Lie}(L)$ et $\mathrm{Lie}(U)$, et que n est assez grand (dépendant de A et du système de coordonnées), l'ensemble des g de coordonnées $\equiv 0(\mathcal{P}^n)$ est un sous-groupe K du type voulu. Des propriétés additionnelles de Λ en assurent pour K pour n assez grand. Ainsi, si Λ est stable par un sous-groupe compact K_o, K sera normalisé par K_o. Soit $Z(A)^+$ l'ensemble des a dans le centraliseur $Z(A)$ de A (compact mod A) tels que $||\alpha(a)|| \leq 1$ pour toute racine α de A dans U. Si $\Lambda \cap \mathrm{Lie}(U)$ est contracté par tout $a \in Z(A)^+$, on aura $a(K \cap U)a^{-1} \subset K \cap U$ pour $a \in Z(A)^+$. Si $\Lambda \cap \mathrm{Lie}(L)$ est stable par $Z(A)^+$, $K \cap L$ le sera également.

c) Soient $P = LU$ un parabolique minimal, avec $L \supset A$, $A^+ = A \cap Z(A^+)$ et K comme ci-dessus, avec $K \cap L$ stable par A, $a(K \cap U)a^{-1} \subset K \cap U$ et $a^{-1}(K \cap \overline{U})a \subset K \cap \overline{U}$ pour $a \in A^+$. Pour $a,b \in A^+$, on a $([K]\ a[k])([K]b[K]) = [K]ab[K]$ et les $[K]a[K]$ engendrent donc une sous-algèbre commutative, de type fini, de $\mathcal{H}(G,K)$. Cette sous-algèbre B est grosse, en ce que $\mathcal{H}(G,K)$ est somme d'un nombre fini de uBv, car il existe dans G une partie compacte Ω telle que $G = \Omega A^+ \Omega$. Ceci permet d'appliquer les raisonnements de [1] chapitre 4. Quand la décomposition de Cartan de G à la forme $G = K_o\ A^+\ K_o$ (c'est le cas pour G déployé), et que K est invariant dans K_o, on a par exemple $\mathcal{H}(G,K) = \Sigma u\,B\,v$, la somme portant sur les u,v de la forme $[K]\,c\,[K]$, $c \in K_o/K$.

Les arguments de [1], chapitre 2 s'appliquent également aux extensions centrales G de G_o - groupe des points d'un groupe réductif sur F - par un groupe fini. Le rôle des paraboliques sera joué par les images inverses de paraboliques de G_o. Si P est l'image inverse de P_o, le radical unipotent U_o de P_o a un unique relèvement U normalisé par P ; ce relèvement jouera le rôle de radical unipotent de P. L'image inverse d'un tore déployé maximal a un sous-groupe commutatif d'indice fini, et ceci suffit pour les arguments c).

Les résultats qui suivent valent également pour ces extensions centrales. Pour alléger les notations, nous nous limiterons toutefois au cas où G est le groupe des points d'un groupe réductif $\underline{\underline{G}}$ sur un corps local non archimédien F .

2.3. Pour $\underline{\underline{G}}$ réductif sur F et $G = \underline{\underline{G}}(F)$, nous noterons G° le sous-groupe ouvert suivant de G . Soient $\underline{\underline{T}}$ le plus grand quotient de $\underline{\underline{G}}$ qui soit un tore, et T° le sous-groupe compact maximal de $\underline{\underline{T}}(F)$. On pose $G^\circ :=$ image inverse de T° . Le quotient G/G° est d'indice fini dans T/T° et donc isomorphe à $\mathbb{Z}^r$, pour r le rang déployé de T . Le centre $Z(G)$ de G a pour composante connexe de e un tore isogène à T , et s'envoie donc sur un sous-groupe d'indice fini de G/G° : on est dans la situation 1.12.

D'après [1], chapitre 4, pour chaque sous-groupe compact ouvert K , G° n'a qu'un nombre fini de classes d'isomorphie de représentations irréductibles V à coefficients à support compact telles que $V^K \neq 0$. Les résultats 1.20 sont donc applicables : chaque représentation W de G admet une décomposition canonique

$$W = W_{qc} \oplus W_{nqc} , \tag{2.3.1}$$

les coefficients de W_{qc} étant à support compact modulo $Z(G)$ et W_{nqc} n'ayant aucun sous-quotient dont les coefficients sont à support compact modulo $Z(G)$.

2.4. Les représentations quasi-cuspidales, telles que définies au paragraphe 1 admettent la caractérisation suivante : ce sont les représentations W telles que pour U le radical unipotent d'un parabolique propre P , on ait $W_U = 0$. Voir par exemple [1] 3.21, où est traité le cas de $GL(n)$, avec une démonstration valable pour tout G .

Dans la décomposition $W = W_{qc} \oplus W_{nqc}$ d'une représentation de G , W_{qc} est donc la plus grande sous-représentation X telle que $X_U = 0$, pour U comme ci-dessus . Puisque $X_U \hookrightarrow W_U$ (exactitude de $X \mapsto X_U$) , c'est le noyau de

$$W \longrightarrow \prod_{P \neq G} \mathrm{Ind}_P^G(W_U) \tag{2.4.1}$$

(étendre le produit aux paraboliques propres, pris à conjugaison près; il suffit en fait des paraboliques propres maximaux).

Par ailleurs, aucun sous-quotient non-trivial d'une représentation induite n'est quasi-cuspidal : vu la décomposition $(\mathrm{Alg}\ G) = (\mathrm{Alg}\ G)_{qc} \times (\mathrm{Alg}\ G)_{nqc}$, elle aurait un facteur direct non-trivial dans $(\mathrm{Alg}\ G)_{qc}$, et ceci contredirait le fait que pour toute sous-représentation X d'une induite $\mathrm{Ind}_P^G(X')$, X s'injecte dans $\mathrm{Ind}_P^G(X_U)$. Les représentations induites sont donc dans $(\mathrm{Alg}\ G)_{nqc}$.

2.5. Soit P un sous-groupe parabolique de G, U son radical unipotent, $L = P/U$ et δ_P la fonction module $p \mapsto \|\det(\mathrm{ad}\ p, \mathrm{Lie}\ U)\|$. Le foncteur i_P^G est le foncteur d'induction, modifié par $\delta_P^{1/2}$, des représentations de L vers celles de G : à une représentation (V,ρ) de L on attache une de P (dont L est quotient), puis un faisceau G-équivariant $\mathcal{V}$ sur G/P, de fibre en e identifiée à V, on le tord par le faisceau des densités localement constantes de poids $1/2$ et on passe aux sections globales. Une fois choisies des mesures de Haar sur G et P, il revient au même de définir $i_P^G(V)$ comme la représentation de G par translations à droite sur les fonctions localement constantes $f : G \to V$ vérifiant pour $p \in P$

$$f(pg) = \delta_P(p)^{1/2}\ \rho(p)f(g) .$$

Soit r_P^G le foncteur des coinvariants sous U, tordu par $\delta_P^{-1/2}$:

$$r_P^G(V) = V_U \otimes \delta_P^{-1/2} .$$

C'est l'adjoint à gauche de i_P^G. On peut reformuler (2.4.1) en

(2.5.1) $$W_{qc} = \mathrm{Ker}(W \longrightarrow \prod_{P \neq G} i_P^G r_P^G W)$$

(produit sur les paraboliques propres, près à conjugaison près. Il suffit des paraboliques propres maximaux).

Les foncteurs i_P^G et r_P^G sont exacts, et ont la propriété de transitivité suivante : pour $Q(L)$ un parabolique de L, d'image inverse Q dans P, on a $i_P^G\, i_{Q(L)}^L = i_Q^G$ et $r_{Q(L)}^L\, r_P^G = r_Q^G$.

Soit B une $\mathbb{C}$-algèbre, et considérons des représentations munies d'une structure de B-module (commutant à l'action de G). On déduit de l'exactitude de i_P^G et r_P^G que ces foncteurs commutent à $\otimes_B M$, pour M un B-module. Ils transforment donc B-modules plats en B-modules plats.

La torsion par $\delta_P^{1/2}$ introduite dans ces définitions a l'avantage que i_P^G transforme représentations unitaires en représentations unitaires. Pour P et Q deux paraboliques, elle assure que le foncteur $r_Q^G i_P^G$ des représentations de $P/R_u P$ dans $Q/R_u Q$ est une extension itérée des foncteurs $i \circ r$ décrits ci-dessous, sans torsion corrective (voir [2] 2.11). Les foncteurs requis sont indexés par $Q\backslash G/P$, i.e. par les positions relatives de P et Q. Pour la double classe triviale, on prend le foncteur suivant. Soient A un tore déployé maximal dans $P \cap Q$, et L,M les Levi de P,Q contenant A. L'intersection $L \cap M$ est un Levi tant du parabolique $Q \cap L$ de L que du parabolique $P \cap M$ de M, et on prend $i_{P\cap M}^M \, r_{Q\cap L}^L$. Pour la double classe de w, le foncteur correspondant est composé de int(w) et du foncteur précédent pour wPw^{-1} et Q.

La torsion par $\delta^{1/2}$ a toutefois le tort d'indroduire une irrationnelle parasite : $\sqrt{q}$, pour q le nombre d'éléments du corps résiduel, qui deviendrait gênante si on voulait travailler avec des $\mathbb{Q}$-représentations, plutôt qu'avec des $\mathbb{C}$-représentations.

2.6. Soient L un sous-groupe de Levi (L=G est permis), D une composante connexe de l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations irréductibles cuspidales de L et Ω l'orbite correspondante de L dans l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations irréductibles de L° à coefficients à support compact (1.20). Rappelons que (Alg L)(D) est la sous-catégorie de (Alg L) formée des représentations de restriction à L° somme de copies de représentations dans Ω (1.20).

Lemme 2.7. *Si une représentation* W *de* G *est telle que pour tout* (L,D) *comme ci-dessus et tout parabolique* P *de Levi* P, *la composante dans* (Alg L)(D) *de* $r_P^G W$ *est nulle, alors* W = 0.

Si $W \neq 0$, il existe P minimal (P=G est permis) tel que $r_P^G W \neq 0$. Soit L le Levi de P. La représentation $r_P^G W$ a tous ses r_Q^L (Q parabolique propre de L) nuls, donc est dans $(\mathrm{Alg}\ L)_{qc}$ (2.4), et il existe D tel que $r_P^G W$ ait une composante non nulle dans (Alg L)(D) (1.20.1).

Proposition-définition 2.8. (Alg G)(L,D) *est la sous-catégorie de* (Alg G) *formée des représentations* W *vérifiant les conditions équivalentes suivantes* :

(i) W *se plonge dans une somme, sur* P *de* *Levi* L, *de représentations* $i_P^G(W_P)$, *avec* W_P *dans* (Alg L)(D).

(ii) W est sous-quotient d'une somme de représentations comme en (i).

(iii) Quel que soit (M,E) comme en 2.6, non conjugué à (L,D), et le parabolique Q de Levi M, la composante dans $(\mathrm{Alg}\ M)(E)$ de $r_Q^G W$ est nulle.

(iv) Pour P un parabolique de Levi L, $r_P^G W$ est dans la somme des $(\mathrm{Alg}\ L)(E)$, pour (L,E) conjugué à (L,D). Soit $(r_P^G W)(D)$ la composante de $r_P^G W$ dans $(\mathrm{Alg}\ L)(D)$.

L'application naturelle $\varphi : W \longrightarrow \bigoplus_P i_P^G (r_P^G W(D)$ est injective.

Il est clair que (iv) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii). Pour vérifier que (ii) $\Rightarrow$ (iii), il suffit de le faire pour W de la forme $i_P^G X$, avec X dans $(\mathrm{Alg}\ L)(D)$. Puisque pour tout parabolique propre Q' de L, on a $r_{Q'}^L X = 0$, la décomposition 2.5 de $r_Q^G i_P^G$ en foncteurs ir montre que $r_W^G i_P^G X$ admet une suite de composition de quotients successifs dans $(\mathrm{Alg}\ M)(E)$, pour (M,E) conjugué à (L,D), ou des représentations induites, auxquelles on applique 2.4.

Prouvons que (iii) $\Rightarrow$ (iv). Appliquant 2.7 à L et à la composante dans $(\mathrm{Alg}\ L)$ (hors un $N_G(L)$-conjugué de D) de $r_P^G W$, on trouve que r_P^G est dans la somme voulue. Appliquant 2.7 à Ker φ, on trouve que φ est injectif.

Lemme 2.9. Soient X dans $(\mathrm{Alg}\ G)(L,D)$ et Y dans $(\mathrm{Alg}\ G)\ (M,E)$. Si (L,D) et (M,E) ne sont pas conjugués, on a $\mathrm{Hom}(X,Y) = 0$.

Soit $f : X \rightarrow Y$. Utilisant 2.8 (iii), on déduit de 2.7 que $\mathrm{Im}(f) = 0$.

Proposition 2.10. La catégorie $(\mathrm{Alg}\ G)$ est la somme directe, indexée par les (L,D) comme en 2.6, pris à conjugaison près, des sous-catégories $(\mathrm{Alg}\ G)(L,D)$

Vu 2.9, il reste à montrer que tout objet de $(\mathrm{Alg}\ G)$ se plonge dans une somme $\bigoplus X_{L,D}$ avec $X_{L,D}$ dans $(\mathrm{Alg}\ G)(L,D)$. Procédant par récurrence, on peut supposer le théorème déjà connu pour les sous-groupes de Levi des paraboliques propres de G. Soit W une représentation de G. On a $W = W_{qc} + W_{nqc}$ (2.3.1) avec

W_{qc} dans $(\mathrm{Alg}\ G)_{qc} = \bigoplus (\mathrm{Alg}\ G)(G,D)$ (1.20.1), et

W_{nqc} s'injectant dans une somme de $i_P^G(X_P)$ (2.5.1).

L'hypothèse de récurrence permet de décomposer les X_P , et il ne reste qu'à utiliser la transitivité de l'induction.

Proposition 2.11. *Soit* z *dans le centre de la catégorie abélienne* $(\mathrm{Alg}\ G)\ (L,D)$. *Pour* P *un parabolique de Levi* L *et* π *dans* D , z *agit comme un scalaire dans* $i_P^G(\pi)$. *Ce scalaire* $z(\pi)$ *est indépendant de* P , *et la fonction* $\pi \mapsto z(\pi)$ *est une fonction régulière sur la variété algébrique* D .

Soient $M = L/L^\circ$, $B = \mathbb{C}[M]$ l'algèbre affine du tore algébrique T de groupes de caractères M , et $\chi_{un} : M \to B$ le caractère "universel" de M à valeurs dans B . Soient (V,π) de classe d'isomorphie dans D , et la représentation induite

$$W = i_P^G(V \otimes B\, ,\pi \otimes \chi_{un}) \quad .$$

C'est un B-module, et pour tout $\mathbb{C}$-homomorphisme $\sigma : B \to \mathbb{C}$ correspondant à $\chi : M \to \mathbb{C}^*$ (avec $\chi = \sigma\chi_{un}$) , on a

$$W \otimes_{B,\sigma} \mathbb{C} \simeq i_P^G(V,\pi \otimes \chi) \quad .$$

Pour tout sous-groupe compact ouvert K , W^K est un B-module projectif de type fini.

On sait que pour un ensemble Zariski dense de χ dans $T(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(M,\mathbb{C}^*)$, $i_P^G(V,\pi \otimes \chi)$ est irréductible. C'est par exemple le cas pour $\pi\chi$ unitaire et non isomorphe à son conjugué par un élément non trivial de $N(L)/L$. D'après 1.17, il existe b dans B tel que z agisse dans W par multiplication par b . Pour chaque $\chi \in T(\mathbb{C})$, z agit donc dans $i_P^G(\pi\chi)$ par multiplication par $b(\chi)$. Pour η dans le groupe fini F des caractères de M tels que $\pi\eta \sim \eta$, $i_P^G(\pi\chi)$ est isomorphe à $i_P^G(\pi\chi\eta)$, d'où $b(\chi\eta) = b(\chi)$. La fonction b se descend donc en une fonction régulière sur $T/F \sim D$. Il reste à vérifier l'indépendance de P . Elle résulte de ce que pour un ensemble Zariski dense de χ , (par exemple les mêmes que plus haut), la classe d'isomorphie de $i_P^G(\pi\chi)$ est indépendante de P .

2.12. Soit $W(L,D)$ le sous-groupe de $N(L)/L$ formé des n tels que D coïncide avec son conjugué par n . Ce groupe fini agit sur D et la fonction $z(\pi)$ de 2.11 est invariante par $W(L,D)$: c'est une fonction régulière sur la variété algébrique quotient.

A chaque z dans le centre de $H(G)^{\wedge}$, i.e. dans le centre de la catégorie abélienne (Alg G), on associe ainsi une collection de fonctions régulières sur les $D/W(L,D)$ pour (L,D) comme en 2.6, i.e. une fonction régulière sur la variété somme disjointe des $D/W(L,D)$.

Théorème 2.13. La construction ci-dessus établit un isomorphisme de $Z(H(G)^{\wedge})$ avec l'anneau des fonctions régulières sur $\coprod D/W(L,D)$ (somme disjointe sur les (L,D) comme en 2.6, pris à conjugaison près).

D'après 2.10 et 1.9, il reste à montrer que pour chaque (L,D), l'application $z \mapsto z(\pi)$ identifie le centre de la catégorie abélienne $(\mathrm{Alg}\ G)(L,D)$ à l'anneau des fonctions régulières sur $D/W(L,D)$. L'injectivité résulte de ce que tout irréductible de $(\mathrm{Alg}\ G)(L,D)$ est sous-quotient d'un $i_P^G(\pi)$, π dans D. Prouvons la surjectivité. Compte tenu de 1.15, appliqué à L, il suffit de prouver le

Lemme 2.14. Pour tout élément z_L du centre de $(\mathrm{Alg}\ L)(D)$, invariant par $W(L,D)$, il existe un élément z du centre de $(\mathrm{Alg}\ G)(L,D)$ qui sur toute représentation induite $i_P^G X$ (X dans $(\mathrm{Alg}\ L)(D)$, et P un parabolique de Levi L) agisse comme i_P^G(endomorphisme de X défini par z_L).

D'après 2.8 (iv), on dispose, pour tout W dans $(\mathrm{Alg}\ G)(L,D)$, d'une injection

$$(2.14.1) \qquad \varphi : W \hookrightarrow \bigoplus_P i_P^G\,[(r_P^G\,W)(D)]\ .$$

Lemme 2.15. L'image $\varphi(W)$ de φ est stable par $\bigoplus_P i_P^G(Z_L)$

Preuve de 2.15 $\Rightarrow$ 2.14. L'endomorphisme $\bigoplus_P i_P^G(z_L)$ induit sur W un endomorphisme fonctoriel, qui est l'élément cherché du centre.

Preuve de 2.15. On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'ensemble des W vérifiant 2.15 est stable par sous-quotients et sommes. Ceci nous ramène au cas où W est de la forme $i_P^G X$, avec X dans $(\mathrm{Alg}\ L)(D)$. Pour un tel W, nous montrerons plus précisément que pour tout Q de Levi L, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} i_P^G X & \longrightarrow & i_Q^G\,[r_Q^G\, i_P^G\, X(D)] \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i_P^G(z_L)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i_Q^G(z_L)} \\ i_P^G X & \longrightarrow & i_Q^G[r_Q^G\, i_P^G\, X(D)] \end{array}$$

est commutatif. Dans ce diagramme, z_L désigne d'une part l'endomorphisme de X, d'autre part celui de $(r_Q^G\, i_P^G\, X)(D)$, défini par z_L. Par adjonction, il revient au même de vérifier que

<u>Lemme</u> 2.16. <u>L'endomorphisme</u> z_L <u>de</u> $r_Q^G\, i_P^G(X)(D)$ <u>coïncide avec l'endomorphisme</u> z'_L <u>déduit par fonctorialité de l'endomorphisme</u> z_L <u>de</u> X.

La décomposition 2.5 de ri en foncteurs ir montre que $r_Q^G\, i_P^G$ $r_Q^G\, i_P^G(X)(D)$ admet une filtration finie fonctorielle F, admettant les $\mathrm{Gr}_F^i := F^i/F^{i+1}$ suivants : il sont indexés par les $n \in W(L,D)$, et pour $\tilde{n}$ un représentant de n dans $N(L)$, le $\mathrm{Gr}_F^i\, r_Q^G\, i_P^G(X)(D)$ est isomorphe au foncteur $(X,\pi) \longmapsto \tilde{n}(X,\pi) = (X,\pi \circ \mathrm{int}_{\tilde{n}}^{-1})$.

La symétrie de z_L par $W(L,D)$ assure que sur chacun des $\mathrm{Gr}_F^i\, r_Q^G\, i_P^G(X)(D)$, on a $z_L = z'_L$. Ceci suffit à établir le lemme pour les X tels que, quels que soient $n_1 \neq n_2$ dans $W(L,D)$, de représentants $\tilde{n}_1$ et $\tilde{n}_2$, on a $\mathrm{Hom}_{L,\mathrm{End}(X)}(\tilde{n}_1(X), \tilde{n}_2(X)) = 0$.

L'ensemble des X dans $(\mathrm{Alg}\ L)(D)$ vérifiant 2.16 est stable par sommes et sous-quotient. Vu 1.18, il suffit donc de traiter le cas où X est la représentation $(V \otimes B, \pi \otimes \chi_{un})$ de la preuve de 2.11. Pour cette représentation, on a $B \subset \mathrm{End}(X)$. Nous allons vérifier que $\mathrm{Hom}_{L,B}(\tilde{n}_1(X),\tilde{n}_2(X)) = 0$. Pour tout sous-groupe compact ouvert K, $\tilde{n}_i(X)^K$ est un B-module projectif de type fini. Il suffit donc de vérifier que pour un ensemble Zariski-dense de $\chi \in \mathrm{Hom}(B,\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(M,\mathbb{C}^*)$, on a

$$\mathrm{Hom}_L(\tilde{n}_1(X) \otimes_{B,\chi} \mathbb{C}, \tilde{n}_2(X) \otimes_{B,\chi} \mathbb{C}) = 0$$

On a $\tilde{n}_i(X) \otimes_{B,\chi} \mathbb{C} = \tilde{n}_i(X \otimes_{B,\chi} \mathbb{C}) = \tilde{n}_i(V \otimes \chi)$, et il suffit donc de prendre χ tel que $\tilde{n}_1(V \otimes \chi)$ soit non isomorphe à $\tilde{n}_2(V \otimes \chi)$. Que la plupart des χ conviennent résulte du fait, déjà visible sur les caractères centraux, que $W(L,D)$ agit fidèlement sur D .

<u>Remarque</u> 2.17. Soient f une fonction régulière sur $\coprod D/W(L,D)$, et z_f l'élément correspondant du centre de $H(G)^\wedge$. Pour toute classe d'isomorphie de représentation irréductible π , notons $f(\pi)$ le scalaire par lequel z_f agit dans cette représentation. Si π est l'un des constituants de la représentation induite $i_P^G(\sigma)$, avec σ cuspidale, on a $f(\pi) = f(\sigma)$. Considérons z_f comme une distribution sur G (1.6) . Pour tout sous-groupe compact ouvert $K, z_f * e_K$ est à support compact - en particulier est dans l'espace de Schwartz de G - et on peut lui appliquer la formule de Plancherel. On obtient ainsi la formule intégrale suivante pour z_f . L'intégrale porte sur l'espace $\hat{G}_t$ des représentations tempérées de G , dg est une mesure de Haar et $d\pi$ la mesure de Plancherel correspondante :

$$z_f = \int_{\hat{G}_t} f(\pi) \cdot (\Theta_\pi(g^{-1})dg)d\pi$$

<u>Exemple</u> 2.18. Soient H une algèbre à division sur F et $G = GL(n,H)$. Les classes de conjugaison de paraboliques correspondent aux partitions ordonnées de n , le Levi L du parabolique correspondant à $(n_i)_{1\leq i\leq m}$ étant le produit des $GL(n_i,H)$ et $N(L)/L$ le sous-groupe du groupe symétrique de $[1,m]$ respectant la fonction $i \mapsto n_i$ (un produit de groupes symétriques). Soit, pour chaque i , π_i une classe d'isomorphie de représentation cuspidale de $GL(n_i,H)$, et soit D_i l'orbite de π_i par torsion par un caractère non ramifié $\omega_t : h \mapsto t^{v(Nrdh)} (t \in \mathbb{C}^*)$. Si F_i est le sous-groupe du groupe des racines $(n_i[H:F]^{1/2})^{\underline{e}}$ de 1 tel que $\pi_1 \sim \pi_i.\omega_t$ pour $t \in F_i$, on a $\mathbb{C}^*/F_i^* \xrightarrow{\sim} D_i$. Soit π la représentation $\otimes \pi_i$ de L , et $D = \prod D_i$ son orbite par torsion par un caractère de L/L° . Le sous-groupe $W(L,D)$ de $N(L)/L$ est le sous-groupe du groupe symétrique de $[1,m]$ respectant $i \longmapsto (n_i,D_i)$; c'est un produit de groupes symétriques, et son action sur $D = \prod D_i$ est l'action évidente. Le quotient $D/W(L,D)$ est donc une variété algébrique non singulière.

<u>Exemple</u> 2.19. Par contre, déjà pour $G = SL(n,F)$, un quotient $D/W(L,D)$ peut avoir des points singuliers. Prenons L = le groupe des matrices diagonales et D = l'ensemble des caractères de L/L° . Il s'identifie au quotient $(\mathbb{C}^*)^n/\mathbb{C}^*$ diagonal), et $W(L,D)$ est le groupe symétrique, agissant de façon évidente. Soit ζ une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de I et u l'image dans D de $(1,\zeta,\zeta^2,\ldots) \in \mathbb{C}^{*n}$. Le stabilisateur de u

dans $W(L,D) \sim S(n)$ est le sous-groupe cyclique engendré par le cycle $(1,\dots,n)$. Pour $n > 2$, le quotient $D/W(L,D)$ présente en l'image de u une singularité isolée.

3. APPLICATIONS : PROPRIETES DE FINITUDE.

3.1. Pour V une représentation de G , nous aurons à considérer les propriétés de finitude suivante :

V admissible : les V^K sont de dimension finie.

V de type fini : il existe une famille finie d'éléments $v_i \in V$ $(i \in I)$ telle que les gv_i $(g \in G, i \in I)$ engendrent linéairement V .

Pour B une $\mathbb{C}$-algèbre, et pour V un B-module muni d'une action de G , on définit de même B-admissible (condition (B-adm) de 1.16) et B - de type fini.

En tout cas pour B noethérien, les foncteurs r_p^G et r_P^G transforment représentation B-admissibles (resp. B-de type fini) en représentations B-admissibles (resp. B-de type fini) . Pour

i_P^G et B-admissible, et pour

r_P^G et B-de type fini,

c'est une conséquence facile de la compacité de G/P (voir [1] 3.13). Les deux autres cas de figure seront traités en 3.11 et 3.5.3.

3.2. Une représentation V de type fini (voire B-de type fini) n'a de composant non nul que dans un nombre fini de $(\mathrm{Alg}\ G)(L,D)$: dans la décomposition $V = \oplus V(D,L)$, chaque générateur n'a qu'un nombre fini de coordonnées non nulles. On peut préciser les (D,L) qui apparaissent en terme d'un sous-groupe compact ouvert fixant les générateurs.

Soient en effet K un sous-groupe compact ouvert de G , et (L,D). Montrons que les conditions (3.2.1), (3.2.2) suivantes sont équivalentes.

(3.2.1). Pour tout W dans $(\mathrm{Alg}\ G)(L,D)$, on a $W^K = 0$.

Soient P un parabolique de Levi L et W une représentation irréductible de L , de classe d'isomorphie dans D . Pour tout conjugué K' de K , soit K'_L la projection dans L de $K' \cap P$. A conjugaison près, $(g\,Kg^{-1})_L$ ne dépend que de la double classe de g dans $P \backslash G/K$.

(3.2.2). Pour chaque conjugué K' de K , $W^{K'_L} = 0$.

Pour W une représentation de L , on a

$$(i_P^G\ W)^K \sim \bigoplus_{P\backslash G/K} W^{K'_L} .$$

La condition (3.2.2) équivaut donc à $(i_P^G\ W)^K = 0$. En particulier, (3.2.1) $\Rightarrow$ (3.2.2). Puisque $K'_L \subset L^\circ$, elle est indépendante de W , et assure que pour toute représentation W dans $(\mathrm{Alg}\ L)(D)$, on a encore $(i_P^G\ W)^K = 0$. Pour W irréductible, la classe d'isomorphie de $i_P^G\ W$ ne dépend en général pas de P de Levi L . La condition (3.2.2) est donc indépendante de P , et on a (3.2.2) $\Rightarrow$ (3.2.1).

Nous noterons $\mathfrak{Z}(G)$ le centre $H(G)^\wedge$, le produit des centres $\mathfrak{Z}(G)\ (L,D)$ des catégories $(\mathrm{Alg}\ G)(L,D)$. Si une représentation V de G n'a de composante non nulle que dans les $(\mathrm{Alg}\ G)\ (L_i,D_i)$ $(i \in I$, supposé fini), $\mathfrak{Z}(G)$ agit sur V via son quotient $\prod_i \mathfrak{Z}(G)(L_i,D_i)$. Un tel quotient est une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini, et en particulier noethérienne.

<u>Proposition</u> 3.3. <u>Toute représentation de type fini est</u> $\mathfrak{Z}(G)$-<u>admissible</u>.

On se ramène à supposer la représentation V dans un $(\mathrm{Alg}\ G)\ (L,D)$, et à prouver que V est $\mathfrak{Z}(G)\ (L,D)$-admissible. Posons $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(G)\ (L,D)$. Traitons d'abord du <u>cas où $L = G$</u> : il existe alors une représentation cuspidale (V°,π°) de G° telle que $V|G^\circ$ soit somme de copies de G-conjugués de (V°,π°) . Procédant comme en 1.12 , avec $M = G/G^\circ$, on écrit

$$V = \mathrm{Ind}_{G_1}^G\ (V^\circ \otimes X) \quad ,$$

X étant un $\mathbb{C}[\widetilde{M}_1; z^{-1}]$-module (1.13) . Pour que V soit de type fini, il faut et il suffit que le module X le soit. Puisque $\mathbb{C}[\widetilde{M}_1;z^{-1}]$ est de rang fini sur son centre Z , X est de type fini sur Z . Ce centre n'est autre que $\mathfrak{Z}$. Parce que V° est admissible, et X de type fini sur Z , la représentation $V^\circ \otimes X$ de G_1 est Z-admissible. Enfin, l'admissibilité est préservée par $\mathrm{Ind}_{G_1}^G$.

<u>Cas général</u>. Par définition de $(\mathrm{Alg}\ G)(L,D)$, V est contenue dans une somme de représentations

$$V \hookrightarrow \bigoplus_P\ i_P^G\ X_P \quad ,$$

où P parcourt les paraboliques de Levi L et où X_P est dans $(\mathrm{Alg})(D)$.

Puisque V est de type fini, on peut prendre les X_P de type fini. Les X_P sont $\mathfrak{Z}(L)(L,D)$-admissibles, et donc $\mathfrak{Z}$-admissibles, puisque $\mathfrak{Z}(L)(L,D)$ est un module de type fini sur $\mathfrak{Z}$. On obtient en effet $\mathfrak{Z}$ par passage aux invariants sous un groupe fini. Parce que i_P^G préserve l'admissibilité, $\bigoplus_P i_P^G X_P$ est $\mathfrak{Z}(G)(L,D)$ admissible, et V l'est également, l'anneau $\mathfrak{Z}$ étant noethérien.

Variante 3.3.1. Soit B une $\mathbb{C}$-algèbre noethérienne. Si G agit sur un B-module V, et que V est B-de type fini, alors V est $\mathfrak{Z}(G) \otimes B$-admissible. La preuve est la même, compte tenu que $\mathfrak{Z}(G)(L,D) \otimes B$ est quotient d'un anneau de polynômes sur B, donc est un anneau noethérien.

Corollaire 3.4. *Pour tout sous-groupe compact ouvert* K *de* G, *l'algèbre de Hecke* $\mathcal{H}(G,K)$ *est un module de type fini sur* $\mathfrak{Z}(G)$.

Preuve. Appliquer 3.3 à la représentation régulière de G sur $L_c^\infty(G/K)$ fonctions à support compact sur G, invariantes à droite par K). Elle est engendrée par un générateur : la fonction caractéristique de K. On a $L_c^\infty(G/K)^K \simeq \mathcal{H}(G,K)$.

En particulier, $\mathcal{H}(G,K)$ est un module de type fini sur son centre (qui contient $e_K\mathfrak{Z}(G)e_K$), et ce dernier est une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini. On peut prouver des résultats plus précis - voir 3.13, 3.14.

Si on travaille avec $\mathbb{Q}$ - plutôt que $\mathbb{C}$ - comme corps des scalaires, il résulte du cas complexe que $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(G,K)$ est encore de type fini sur son centre, et que ce dernier est une $\mathbb{Q}$-algèbre de type fini. On peut en déduire que toute $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(G,K)$-module irréductible est de dimension finie sur $\mathbb{Q}$, et que toute $\mathbb{Q}$-représentation irréductible de G est admissible, de commutant un corps de degré fini sur $\mathbb{Q}$. Tout ce qui a été dit avec $\mathbb{C}$ pour corps des scalaires peut être redit avec $\mathbb{C}$ remplacé par un quelconque corps algébriquement clos de caractéristique 0.

3.5. Soient P et $\overline{P}$ deux paraboliques opposés, de Levi commun L et de radicaux unipotents respectifs U et $\overline{U}$. Soit K un sous-groupe compact ouvert, et considérons la condition de 2.1 b) :

(3.5.1) $\qquad [K] = [K \cap U] * [K \cap L] * [K \cap \overline{U}]$.

Proposition 3.5.2. *Si la condition* (3.5.1) *est vérifiée, pour toute représentation* V *de* G, *on a*

$$V^K \twoheadrightarrow (V_U)^{K \cap L}$$

Par passage à la limite inductive, on se ramène à supposer V de type fini. La représentation de L sur les coinvariants V_U est encore de type fini (3.1) et $(V_U)^{K \cap L}$ est un 3(L)-module de type fini. On en déduit que c'est un 3(G)-module de type fini (pour la structure de module déduite de celle de V). Soit un système fini de générateurs $(v_i)_{i \in I}$ et relevons chaque $v_i \in V_U$ en $\tilde{v}_i \in V^L$. Quel que soit a dans le centre de L, a agit par automorphisme sur V_U, et commute à 3(L). Les $a\tilde{v}_i$ engendrent donc V. Ce sont les images des av_i. Chaque v_i est fixe par un sous-groupe ouvert de $\overline{U}$; si a est assez dilatant sur $\overline{U}$, chaque av_i sera fixe par $[K \cap \overline{U}]$, et la condition (3.5.1) assure que $w_i := [K \cap U]\, av_i$ est fixe par K. Les w_i ont encore av_i pour image dans V_U, et le 3(G)-module engendré par les w_i - contenu dans V^K - s'envoie sur $(V_U)^{K \cap L}$.

<u>Remarque</u> 3.5.3. Si V est B-admissible, on déduit de 3.5.2 que $r_P^G(V)$ l'est également.

<u>Reformulation</u> 3.6. Prenons pour V la représentation régulière gauche de G sur l'espace $L_c(G)$ des fonctions localement constantes à support compact. L'application $L_c(G) \to L_c(U \backslash G)$:

$$f \longmapsto \int_U f(ug)\, du$$

identifie $L_c(U \backslash G)$ au quotient $L_c(G)_V$ de $L(G)$. On trouve que pour toute fonction $f \in L_c(U \cdot (L \cap K) \backslash G)$, il existe une fonction F sur $L_c(K \backslash G)$ telle que

$$f(g) = \int_U F(ug)\, du \quad .$$

Il ne serait pas difficile de déduire 3.5.2 de ce cas particulier.

3.7. Il résulte de 3.5.2 qu'il existe des sous-groupes compacts ouverts arbitrairement petits K vérifiant les deux conditions suivantes

(3.7.1) Soit L un sous-groupe de Levi. Pour $P = LU$ un parabolique de Levi L et K' un conjugué de K, la classe de conjugaison dans L de $K'_L = (K' \cap P)/(K' \cap U)$ est indépendante de P et de K'.

(3.7.2) Pour tout parabolique $P = LU$ et toute représentation V de

G , on a

$$V^K \longrightarrow (V_U)^{K_L}$$

Soient en effet A un tore déployé maximal et K_o tel que pour tout parabolique P on ait $G = K_o P$. Si K est invariant dans K_o , les conditions (3.7.1) et (3.7.2) sont impliquées par (3.5.1) pour toute paire de paraboliques opposés $P,\bar{P}$ contenant A . En effet :

a) Il suffit de vérifier (3.7.1) pour $L \supset A$. Posons $K' = (pk_o) K (pk_o)^{-1} = pKp^{-1}$, on trouve que K'_L est conjugué à $K \cap L$. Pour (3.7.2), on se ramène de même à supposer que $P \supset A$, et on applique 3.8 . Les arguments 2.1 b) fournissent l'existence de K dès qu'il existe dans l'algèbre de Lie g de G un réseau Λ stable par K_o et somme de ses intersections avec les sous-espaces g_α , α poids de A dans g . Un tel réseau existe si K_o est défini par un point spécial de l'appartement défini par A .

Pour $G = GL(n,F)$, on peut prendre pour K le sous-groupe de congruence de niveau $m \geq 1$: $K = \{k | k \equiv 1(P^m)\}$.

Proposition 3.8. Soient V une représentation de G , et K comme en 3.7. Pour que V soit engendré par V^K , il faut et il suffit que, quels que soient (L,D) , la condition suivante soit vérifiée. Soit une représentation de L de classe d'isomorphie dans D ; si $W^{K_L} = 0$, la composante de V dans $(\mathrm{Alg}\ G)(L,D)$ est nulle.

On se ramène à supposer V dans un $(\mathrm{Alg}\ G)(L,D)$. Soit W une représentation de L , de classe d'isomorphie dans D . Distinguons deux cas.

Cas 1. $W^{K_L} = 0$. Sous cette hypothèse, d'après 3.2, on a $V^K = 0$ pour tout V dans $(\mathrm{Alg}\ G)(L,D)$.

Cas 2. $W^{K_L} \neq 0$. Soit V' le quotient de V par la sous-représentation engendrée par V^K . Il faut montrer que $V' = 0$. En d'autres termes, il suffit de montrer que si $V^K = 0$, alors $V = 0$. L'hypothèse $V^K = 0$ assure que pour tout parabolique P contenant L , $[(r_P^G\ V)(D)]^{K_L} = 0$. Puisque $W^{K_L} \neq 0$, il en résulte que $r_P^G(V)(D) = 0$. Que $V = 0$ en résulte par .

Corollaire 3.9. (i) Pour K comme en 3.7, la catégorie des représentations V de G engendrées par V^K est la somme d'un nombre fini de $(\mathrm{Alg})(L,D)$.

En particulier, elle est stable par sous-quotient.

(ii) Le foncteur $V \mapsto V^K$ est une équivalence de cette catégorie avec celle des $\mathcal{H}(G,K)$-modules.

L'assertion (i) résulte de 3.8 et du théorème de finitude [1] §4 déjà utilisé (cf. 2.3).

Quel que soit K, le foncteur $V \longmapsto V^K$ a pour adjoint à gauche

$$I : W \longmapsto (\mathcal{H}(G)e_k) \otimes_{\mathcal{H}(G,K)} W .$$

On a $W \xrightarrow{\sim} I(W)^K$; l'application $I(V^K) \mapsto V$ est surjective si V est engendré par V^K, et son noyau est sans vecteur fixe sous K non trivial. D'après (i), il est nul, et (ii) en résulte.

Corollaire 3.10. Pour qu'une représentation V de G soit de type fini, il faut et il suffit qu'elle soit $\mathfrak{Z}(G)$-admissible, et n'ait de composante non nulle que dans un nombre fini de $(\mathrm{Alg}\ G)(L,D)$.

La nécessité est 3.3. Suffisance : par 3.8, V est engendrée par V^K, K convenable, lui-même de type fini sous $\mathfrak{Z}(G)$ - a fortiori sous $\mathcal{H}(G,K)$.

Variante 3.11. Si B est une $\mathbb{C}$-algèbre noethérienne, de même pour B-de type fini, avec $\mathfrak{Z}(G)$ remplacé par $B \otimes \mathfrak{Z}(G)$. Puisque i_P^G respecte l'admissibilité, on déduit de 3.10 que le foncteur i_P^G respecte la condition "de type fini". De même pour B-de type fini (pour B noethérien).

Remarque 3.12. Il résulte de 3.10 qu'une sous-représentation d'une représentation de type fini est encore de type fini : la catégorie de ces représentations est noethérienne ([1] 4.19). Les représentations de longueur finie sont celles à la fois de type fini et admissible.

3.13. Soit K un sous-groupe compact ouvert. L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G,K)$ est le produit des $\mathcal{H}(G,K)(L,D) := e(L,D)\ \mathcal{H}(G,K)\ e(L,D)$, pour $e(L,D)$ l'idempotent du centre qui projette chaque représentation sur sa composante dans $(\mathrm{Alg}\ G)(L,D)$. Il suffit d'étendre le produit aux (L,D), en nombre fini, ne vérifiant pas (3.2.1) (3.2.2).

Chaque $\mathcal{H}(G,K)(L,D)$ est un module de type fini sur $\mathfrak{Z}(G)(L,D)$. On peut préciser sa structure :

Proposition 3.14. Soient W une représentation de L de classe dans D, P un parabolique de Levi L et $N = \dim(i_P^G(W)^K)$. On suppose que $N \neq 0$.

(i) $\mathfrak{Z}(G)(L,D)$ est le centre de $\mathcal{H}(G,K)(L,D)$, et $\mathcal{H}(G,K)(L,D)$ est un $\mathfrak{Z}(G)(L,D)$-module sans torsion.

(ii) Il existe $f \neq 0$ dans $\mathfrak{Z}(G)(L,D)$ tel que l'algèbre $\mathcal{H}(G,K)(L,D)\,[1/f]$ déduite de $\mathcal{H}(G,K)(L,D)$ par extension des scalaires de $\mathfrak{Z}(G)(L,D)$ à $\mathfrak{Z}(G)(L,D)[1/f]$ est une algèbre d'Azumaya de rang N^2 sur $\mathfrak{Z}(G)(L,D)$.

Posons $\mathcal{H} := \mathcal{H}(G,K)(L,D)$ et $\mathfrak{Z} := \mathfrak{Z}(G)(L,D)$. Soient $B = \mathbb{C}\,[L/L^\circ]$ l'algèbre affine du tore de groupe de caractères L/L° et, comme en , la représentation $W \otimes \chi_{un}$ de L dans $W_B := W \otimes B$. Induisant, on obtient une représentation $i_P^G(W \otimes \chi_{un})$ de G , munie d'une structure de B-module. Passant aux invariants sous K , on obtient un $\mathcal{H}$, B - B-module U . En tant que B-module, il est libre de rang N . On utilisera les faits suivants

(a) Le $\mathcal{H}$-module U est fidèle.

Si h agit trivialement, il agit trivialement dans chaque $U \otimes_B \mathbb{C}$, pour tout homomorphisme $\sigma : B \to \mathbb{C}$, donc dans chaque V^K , pour V irréductible dans $(\mathrm{Alg}\ G)(L,D)$. On a alors $h = 0$.

(b) $\mathfrak{Z}$ se déduit de B par passage aux invariants sous un groupe fini (et les deux actions sur U coïncident).

(c) $\mathcal{H}$ est de type fini sur $\mathfrak{Z}$.

(d) Pour un ensemble Zariski-dense de $\sigma \in T(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(B,\mathbb{C})$, $U \otimes_{B,\sigma} \mathbb{C}$ est un $\mathcal{H}$-module simple : $\mathcal{H} \twoheadrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U \otimes_{B,\sigma} \mathbb{C})$, et sa classe d'isomorphie ne dépend que de sa restriction à $\mathfrak{Z}$.

En effet, $i_P^G(W \otimes \chi_{un}) \otimes_{B,\sigma} \mathbb{C}$ est irréductible, avec l'indépendance de σ voulue.

Pour un ensemble Zariski-dense de $\sigma : \mathfrak{Z} \to \mathbb{C}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, hook, "(a)"] & \mathrm{End}_B(U) \\ \mathfrak{Z} \arrow[u] \arrow[r, hook] & B \arrow[u] \end{tikzcd}$$

donne lieu (grâce à (b)(c)) à

$$H \otimes_{3,\sigma} \mathbb{C} \hookrightarrow \prod_{\tilde{\sigma}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}} (U \otimes_{B,\tilde{\sigma}} \mathbb{C})$$

(produit sur les $\tilde{\sigma}$ prolongeant σ) , qui par (i) se factorise par une bijection sur un $M_N(\mathbb{C})$ diagonal. L'assertion (ii) en résulte. L'assertion "sans torsion" résulte de (a), et que 3 soit le centre de H résulte de ce que 3 soit intégralement clos.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Bernstein et A. Zelevinsky : Representations of the group GL(n,F), where F is a local non archimedean field. Uspekhi Mat. Nauk 31 3 (1976) 5-70.

[2] J. Bernstein et A. Zelevinsky: Induced representations of reductive p-adic groups. I - Ann. ENS 10 (1977) 441-472.

[3] W. Casselman : Some general results in the theory of admissible representations of p-adic reductive groups (preprint).

[4] D. Flath : Decomposition of representations into tensor products. Proc. of Symp. in pure math. XXXIII (Corvallis), Vol. I, p. 179-183.

[5] F. Rodier : Decomposition spectrale des représentations lisses. In : Non commutative harmonic analysis . Lecture Notes in Math. 587. Springer Verlag 1977.