

לוגיקה 5

1. תהי T תורה בשפה \mathcal{L} . הוכיחו כי קיימת תורה T' בשפה \mathcal{L} . כך ש-

$$\mathfrak{M} \models T \Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models T'$$

אם יש נוסחה סגורה Φ כך שלכל \mathfrak{M} ,

$$\mathfrak{M} \models T \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \Phi.$$

2. תהי $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \dots \subseteq T_n \subseteq \dots$ סדרה עולה של תורות בשפה \mathcal{L} . נניח כי לכל n יש מודל של T_n שלא מקיים את T_{n+1} . תהי $T = \bigcup_n T_n$. הוכיחו כי

(א) T תורה עקבית.

(ב) לא קיימת נוסחה סגורה Φ כך שלכל מודל \mathfrak{M} , $\mathfrak{M} \models T \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \Phi$.

3. חבורה אבלית G נקראת חליקה אם לכל $x \in G$ ולכל n טבעי קיים y כך ש- $ny = x$.

(א) הצג תורה T כך שמחלקת החבורות החליקות היא קבוצת המודלים שלה.

(ב) הראו כי לא ניתן לעשות זאת בעזרת נוסחה בודדת או שקול ע"י מספר סופי של נוסחאות כלומר התורה חייבת להיות אינסופית.

4. נניח כי

$$\mathfrak{M}_0 \preceq \mathfrak{M}_1 \preceq \dots \preceq \mathfrak{M}_n \preceq \dots$$

שרשרת אלמנטרית של מודלים בשפה \mathcal{L} . נגדיר מודל $\mathfrak{M} = \langle M, \sigma \rangle$ באופן הבא:

$M = \bigcup_n M_n, \sigma(P) = \bigcup_n \sigma_n(P), \sigma(f) = \bigcup_n \sigma_n(f), \sigma(c) = \sigma_0(c)$,
סימני יחס, פונקציה וקבועים בשפה \mathcal{L} .

הוכיחו כי $\mathfrak{M} = \langle M, \sigma \rangle$ הוא מודל ולכל n מתקיים $\mathfrak{M}_n \preceq \mathfrak{M}$.