חדו"א 2 - תרגיל מס' 6

1. בדקו האם טורי הפונקציות הבאים מתכנסים במידה שווה:

(א) $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$ ב- $[-q,q]$ עבור $q<1$ (ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ ב- $\mathbb{R}$

(ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ ב- $\mathbb{R}$ (ד) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-|x-n|}$ ב- $[0,\infty)$

2. תהי $\{f_n : E \to \mathbb{R}\}$ סדרת פונקציות המתכנסת במ"ש ב- E לפונקציה f. הוכיחו:

(א) $\sup_E f_n \to \sup_E f$

(ב) $\inf_E f_n \to \inf_E f$.

3. תהי $\{f_n : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ סדרת פונקציות רציפות המתכנסת במ"ש לפונקציה f. נתונה סדרה מתכנסת $a_n \to L$ שכל איבריה ב- $[a,b]$. הוכיחו ש- $f_n(a_n) \to f(L)$.

4. (א) מצאו דוגמא לסדרת פונקציות שאינן רציפות המתכנסות במ"ש לפונקציה רציפה.

(ב) מצאו דוגמא לסדרת פונקציות רציפות המתכנסות לא במ"ש לפונקציה רציפה.

5. (א) עבור $f_n(x) = nx/(1+nx)$, ו- $x \in [0,1]$, חשבו את $\lim_{n\to\infty} \int_0^x f_n(t)dt$.

(ב) האם מותר לגזור איבר־איבר את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{n^2}$? (ולקבל נגזרת של הסכום, כמובן)?

6. היזכרו בהוכחת משפט דיני, והוכיחו את הטענה הבאה: תהי $\{f_n : (a,b) \to \mathbb{R}\}$ סדרת פונקציות גזירות המתכנסת נקודתית לפונקציה f. נניח שקיים $M>0$ כך ש-

$$\sup_n \sup_{x\in[a,b]} |f_n'(x)| \le M.$$

אזי ההתכנסות היא במידה שווה.

7. (א) הוכיחו ש־ $\int_0^1 x^n \ln^m x\,dx = \frac{(-1)^m m!}{(n+1)^{m+1}}$ לכל $m,n\geq 0$.

(ב) הוכיחו ש־

$$\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$$

(רמז: $x^{-x} = e^{-x\ln x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\ln^n x$.).

8. נסמן ב־ $R_n(x)$ את השארית בפיתוח טיילור מסדר n סביב אפס של הפונקציה

$$f_n(x) = \left[(n+1)\binom{2n+1}{n}\right]^{-1}(1+x)^{2n+1}.$$

הוכיחו ש־ $\sqrt{\pi} \overset{n\to\infty}{\longleftarrow} 2\sqrt{n}R_n(1)$ (רמז: השתמשו באינטגרל הגאוסי).

9. ★ תהי $\{P_n(x)\}$ סדרת פולינומים המתכנסת במידה שווה <u>בכל $\mathbb{R}$</u> לפונקציה $P(x)$.

(א) הראו כי $P(x)$ הוא פולינום.

(ב) איך זה מסתדר עם משפט ויירשטראס על קירוב פולינומיאלי של פונקציות רציפות?