הרצאה

22-25

מיכה צילם ומחלק לנו 2 דפים (4 עמודים) מהספר שלו, כדי שנעקוב אחר

פיתוח החסם התחתון:

$$\lambda_3(n) \ge \Omega(n\alpha(n))$$

נדבר על רצפים של $S_k(m)$ כאשר $m,k \ge 1$. נבנה אותם.

נשמש אותם כאוסף מגוון של קטעים.

לשם כך, נשתמש בפונק' דומה לפונק' אקרמן:

$C_1(m)=1$, $m\ge1$

$C_k(1)=2C_{k-1}(2)$, $k\ge2$

$C_k(m)=C_k(m-1)C_{k-1}(C_k(m-1))$ $\quad k\ge2,\ m\ge2$

בפונק' אקרמן הרגילה אין את $C_k(m-1)$, מה שמגדיל עוד קצת את קצב הגדילה של הפונק', בפקטור זניח למדי.

כמה ערכים של הפונק' לדוגמה:

$$C_2(m)=C_2(m-1)\cdot C_1(\dots)=\dots=C_2(1)=2C_1(2)=2$$

שזה אומר ש-$C_2(m)$ עדיין קבוע כולו. C_3 לעומת זאת:

$$C_3(m)=C_3(m-1)\cdot C_2(\dots)=2^{m+1}$$

ו-C_4 זה כבר יותר גרוע מ-A_3, פונק' המגדל:

$$C_4(m)\ge 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\Big\}m$$

אבל סה"כ זה גדל כמו פונק' אקרמן במובן הבא:

$$A_{k-1}(m)\le C_k(m)\le A_k(m+3)$$

ההוכחה בספר. אנחנו גם יכולים לעשות את זה לבד, באינדוקציה.

הרצף $S_k(m)$ מורכב מ-$N_k(m)$ סמלים כאשר: $\underline{N_k(m)=mC_k(m)}$ ומורכב מניפות (fans) כאשר כל מניפה היא רצף של m סמלים אשר מופיעים לראשונה במניפה.

$\Leftarrow$ לכן, ישנם $C_k(m)$ מניפות.

הסמל ה-i במניפה ה-γ נקרא (γ,i). כלומר, המניפה הראשונה מורכבת מ- $(1,1),(2,1),\dots(m,1)$

$\vdots$

$(1,\gamma),(2,\gamma),\dots(m,\gamma)$

$\vdots$

והמניפה האחרונה: $(1,\bar\gamma),(2,\bar\gamma),\dots(m,\bar\gamma)$

נשים לב שלפי הגדרה:

$\bar\gamma=C_k(m)$

$\bar\alpha=C_k(m-1)$

$\bar\beta=C_{k-1}(\bar\alpha)=C_{k-1}(C_k(m-1))$, $\quad \bar\gamma=\bar\alpha\cdot\bar\beta$

מרכיבים את $S_k(m)$ מתוך 2 תת רצפים: (הראשון) $S'=S_k(m-1)$.

לרצף זה יש $\bar{\alpha}=C_k(m-1)$ מניפות, כל אחת באורך m-1.

נשכפל את S' לכדי $\bar{\beta}=C_{k-1}(\bar{\alpha})$ פעמים, תוך כדי שאנו משתמשים בסטים זרים של סמלים (Disjoint):

$S'_1, S'_2, \ldots, S'_\beta, \ldots, S'_{\bar{\beta}}$

והאלמנט ה-i של המניפה ה-α של S'_β (המועתק) ייקרא: (i,α,β).

התת-רצף השני הינו $S^*=S_{k-1}(\bar{\alpha})$.

לזה יש $\bar{\beta}=C_{k-1}(\bar{\alpha})$ מניפות, כל אחת בגודל $\bar{\alpha}$. נקרא לאלמנט ה-α של המניפה ה-β במקום (α,β) נקרא: (m,α,β).

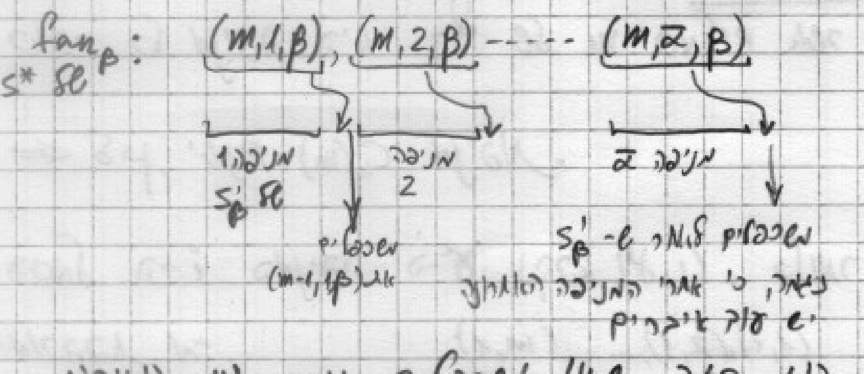
אז כל זה נראה בערך כך:

S^*: fan1 fan2 .... fan$\bar{\beta}$

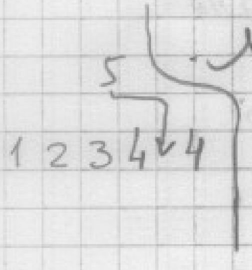
S'_1 S'_2 $S'_{\bar{\beta}}$

והרעיון הוא לשלב כל S' למניפה המתאימה. הציור בצילום ממש טוב. לוקחים איבר ממניפה מסוימת ב-S^* וכל אחד מהם הולך למניפה אחת ב-S' מתאים.

האלמנט ה-$\bar{\alpha}$ של מניפה β של S^* הולכת ל-$\bar{\alpha}$ מניפות ב-S'_β:



הרעיון שלנו הוא בזה שאנו משכפלים איבר בין המניפות. וגם לאחר כל האיברים של S'_β.



כלומר אם קודם היה רק מופע בודד של 4, כעת יהיה 5 ואחריו 4.

אם כך, $S=S_k(m)$ הוא האיחוד של S^* ו-$\bar{\beta}$ העותקים של S'.

זה שווה ערך לכך ש-S^* הוא גל כבוסה מאוד ארוך וגלים עמוקים מיקרוסקופיים של S'.

המניפות הינן המניפות המורחבות של S^*_β הרצפים, כל אחת באורך m.

$$\# \bar\alpha \cdot \bar\beta = \bar\gamma = C_k(m)$$

אז כמה סמלים יש לנו:

$$N_k(m) = \bar\beta \cdot N_k(m-1) + N_{k-1}(\bar\alpha)$$

נוודא ש- $N_k(m) = mC_k(m)$ באינדוקציה:

$$= \bar\beta\cdot(m-1)\underbrace{C_k(m-1)}_{\bar\alpha} + \bar\alpha\, \underbrace{C_{k-1}(\bar\alpha)}_{\bar\beta} = \bar\beta(m-1)\bar\alpha + \bar\alpha\bar\beta = (m-1)\bar\gamma + \bar\gamma = m\bar\gamma$$
$$= mC_k(m)$$

הבניה עצמה:

$S_1(m)$ היא מניפה בודדת בגודל m:

$$(1,1),(2,1),(3,1),\ldots(m,1)$$

מספר המניפות אכן $C_1(m)=1$ באורך m.

$S_2(m)$ היא 2 מניפות (עם $C_2(m)=2$ מניפות):

$$\underbrace{(1,1),\ldots(m,1)}_{\text{המניפה I}},(m-1,1)\ldots(1,1),(1,2),\ldots(m,2),(m-1,2),\ldots(1,2)$$

נשים לב לאורכים: $\sigma_k(m) = |S_k(m)|$. האורכים בינת״ים: $\sigma_1(m)=m$, $\sigma_2(m)=4m-2$

כעת, $S_k(1)$ יהיה כמו $S_{k-1}(2)$ אשר לו יש $C_{k-1}(2)$ מניפות בגודל 2 שכל
היא 2 מניפות בגודל 1.

ואכן ל- $S_k(1)$ אמורים להיות $C_k(1)$ מניפות שזה $2C_{k-1}(2)$ מניפות, כל באורך 1

לכן, באורך: $\sigma_k(1) = \sigma_{k-1}(2)$

כך ממלאים את השורה הראשונה, ואז את השורה השניה, ואז בונים
את העמודה של "המדרגה"...

האורך במקרה הכללי יהיה:

$$\sigma_k(m) = \underbrace{\bar\beta\cdot\sigma_k(m-1)}_{\text{עותקים של } S'} + \underbrace{\sigma_{k-1}(\bar\alpha)}_{S^*} + \underbrace{\bar\alpha\cdot\bar\beta}_{\text{שכפול של האיברים האמצעיים של כל איבר של } S^*} + \underbrace{\bar\beta}_{\text{שכפול של האיבר האחרון של כל מניפה של } S^*}$$

<u>נגדיר</u> משהו חדש:

$$Z_k(m) = \frac{\sigma_k(m)}{C_k(m)}$$

<u>והטענה</u>:

$$Z_k(m) \ge km - 2 + \frac{1}{C_k(m)}$$

סדר בערך שקול ל:

$$\Rightarrow \quad \sigma_k(m) \sim k m C_k(m) = k N_k(m)$$

<u>נבדוק</u>: (או נוכיח באינדוקציה):

$$z_1(m) = \frac{\sigma_1(m)}{C_1(m)} = m \geq 1\cdot m - 2 + 1 \quad \checkmark$$

$$z_2(m) = \frac{4m-2}{2} = 2m - 1 \geq 2m - 2 + \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$z_k(1) = \frac{\sigma_k(1)}{C_k(1)} = \frac{\sigma_{k-1}(2)}{2C_{k-1}(2)} = \frac{1}{2} z_{k-1}(2) \geq \frac{1}{2}\left[(k-1)2 - 2 + \frac{1}{C_{k-1}(2)}\right]$$

$$\rightarrow \quad = k - 2 + \frac{1}{2C_{k-1}(2)} = k - 2 + \frac{1}{C_k(1)} \quad \checkmark$$

ולמקרה הכללי:

$$\frac{\sigma_k(m)}{C_k(m)} = \frac{\bar\beta\,\sigma_k(m-1) + \sigma_{k-1}(\bar\alpha) + \bar\alpha\bar\beta + \bar\beta}{\bar\alpha\cdot\bar\beta} = \frac{\sigma_k(m-1)}{C_k(m-1)} + \frac{1}{\bar\alpha}\frac{\sigma_{k-1}(\bar\alpha)}{C_{k-1}(\bar\alpha)} + 1 + \frac{1}{\bar\alpha} \geq$$

$$\geq k(m-1) - 2 + \frac{1}{\bar\alpha} + \frac{1}{\bar\alpha}\left[(k-1)\bar\alpha - 2 + \frac{1}{\bar\beta}\right] + 1 + \frac{1}{\bar\alpha} =$$

$$= k(m-1) - 2 + \frac{1}{\bar\alpha} + k - 1 - \frac{2}{\bar\alpha} + \frac{1}{\bar\gamma} + 1 + \frac{1}{\bar\alpha} = km - 2 + \frac{1}{\bar\gamma} \quad \checkmark$$

כל זה טוב ויפה, אבל הבה נראה את העיקר: $S_k(m)$ הוא רב $DS(N_k(m),3)$.

שתי התכונות שצריך להראות:

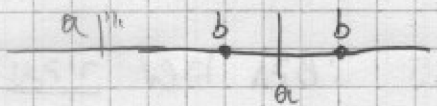
① אין aa: זה לא מתרחש בשום S' ולא ב-S^* וכל השכפולים אינם אחד אחרי השני.

② אין a-b-a-b-a: אם מסתכלים רק על S^* ועל S'_β יחד מוחקים שכפולים מקבלים את S^* או S'_β. כלומר ואנחנו משכפלים שכפולים ללא שינוי שלהם.

$\Leftarrow$ אם $a,b\in S^*$ או לאותו עותק של S' $\Leftarrow$ לא יהיה ababa.

ואין בכלל שום alternation בין עותקים שונים של S'.

המקרה האחרון: $a\in S^*, b\in S'_\beta$.



אם זה המצב, משמע a הוא במניפה ה-β של S^*. בגלל התכונה שפעם ראשונה ש-a מופיע, זה במניפה בה הוא נולד...

ואם זה ההפך, כלומר $a\in S'$ אז זה עוד יותר פשוט כי אין אותו מופע של איבר פעמיים ב-S' או משהו.

אם כך כל סמל מגיע בממוצע k פעמים, ועם $N_k(m)$ סמלים...

נקבע את k = Fix; ונגדיר: $m_k = C_{k+1}(k-3)$ ואז:

$$N_k(m_k) = m_k C_k(m_k) = C_{k+1}(k-3)\, C_k(C_{k+1}(k-3))$$

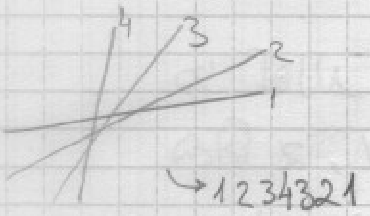
$$n = N_k(m_k) C_{k+1}(k-2) \le A_{k+1}(k+1) = A_{k+1}$$

$$\alpha(n) \le k+1 \rightarrow k \ge \alpha(n)-1$$

$$\Rightarrow G_k(m_k) \underset{\approx}{\geq} k m_k C_k(m_k) = k N_k(m_k) \ge n(\alpha(n)-1)$$

אז מיכה מתנצל על הסיבוך, אבל זה מה יש. כעת נראה כיצד לתרגם את זה לבנ"ה (2 בנ"מ) של קטעים ישרים.

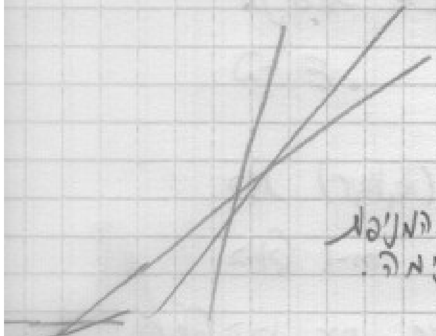
יש בספר בניה מורכבת ומכוערת שמיכה וסטודנט שלו בנו ויש עוד בניה יותר פשוטה של Shor.



אוקיי, אז מניפה נראית בערך כך: 4-fan :

ואם נרכיב זוג של גוף S^* :

ורואים שאכן ישנו שכפול של האיבר האחרון ב-S



מכניסים את המניפות פנימה.

נשים לב שהם כולם מתחילים בערך באותה נק' (כל מיני-מניפה) ונשברים לא משנה עד מתי.

לשם פישוט, נצ"ר כאילו כל המניפות מתחילות בנק' משותפת, למרות שברור לנו שעם מיקרוסקופ נראה את ההבדל כמו שמצו"ר למעלה.

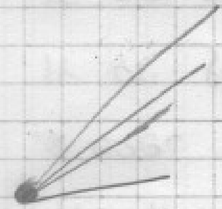
נבנה קב' (co) $G(k,m,r)$ של קטעים שכולם ממשיכים את $S_k(m)$. r הוא פרמטר Real הגדול מ-1. הוא לא משתתף בקומבינטוריקה. רק פרמטר לבניה.

ל-$G(k,m,r)$ יש $C_k(m)$ מניפות (אוסף של קטעים כנ"ל) כ"ו בגודלה. לכל מניפה יש נק' (fan point) שהיא הקצה השמאלי של כל הקטעים שלה.

הקטעים מתקצרים להם, כך שהיום של ט 2 קטעים עוקבים
במניפה הינו $> r$.

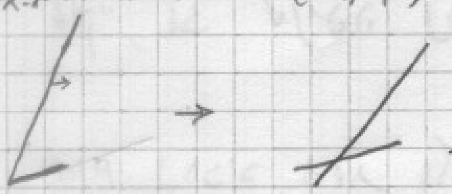
נניח שקיים $\varepsilon>0$ (התלוי ב-G) כך שאם נזיז כל קטע בלכל היותר ε,
השינויים היחידים (הקומבינטוריים) שיתרחשו במספר החתכים, יהיו ליד נקודות המניפה.
ורק קטעים של המניפה יהיו שם. כלומר לא יזוזו פתאום קטעים
רחוקים.

והבחנה נוספת: למספר החתכים אין חורים. רצ"ל מקו שמאלי ביותר
לקו הימני ביותר.

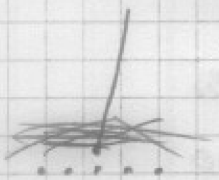


אם כן; $G(1,m,r)$ הינו מניפה בגודל m:

כדי לבנות את $G(k,1,r)$ נתחיל מ-$G(k-1,2,r)$ שיש לו $C_{k-1}(2)$ מניפות
בגודל 2, ומ"צרים מזה 2
מניפות בגודל 1. מזיזים
ב-ε.



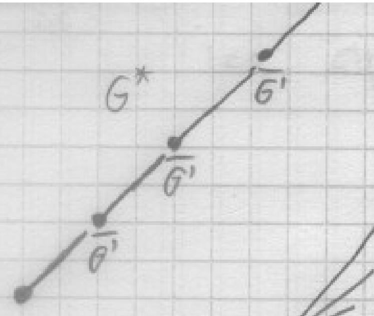
כעת, $G(k,m,r)$, עבור $k\ge 2$, $m\ge 2$: נגדיר $G'=G(k,m-1,r)$ שיש לו $\bar{\alpha}$ מניפות
בגודל $m-1$. ואנחנו משנים אותו (מכווצים אותו) $y\to cy$, כך
⊛ שכל קרן עם שיפוע ≤ 1 תחצה את המספר החתכים (ז) בנק' בודדת.
⊛ ה-x-distance בין המניפות של G' >> y-value שלהם.
* השיפוע המקס' הינו $\frac{1}{r}$.



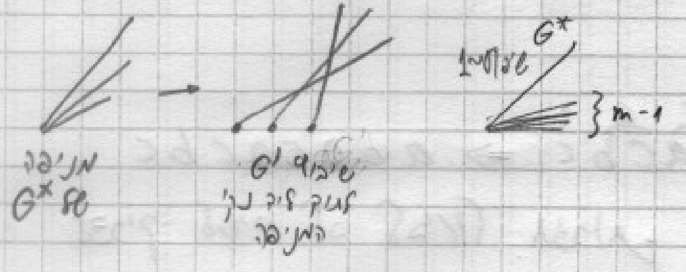
נבחר את r^* מספיק גדול עפ"י ההפרדה ב-x של
מניפות G'.

ובונים את $G^*=G(k-1,\bar{\alpha},r^*)$

משנים את G^* כך שכל השיפועים של הקווים $\ge \frac{1}{r^*}$ ואז מפעילים
עליה טרנס' גזירה: $y\to x+y$, כך שכל השיפועים הינם בין 1 ל-$\frac{1}{r^*}+1$
כלומר לקווים משהו שווה, וכוז של מסובבים ב-45°.



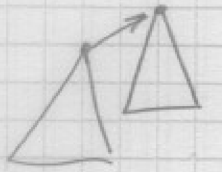
כעת G^* נראה בערך כך:
מכווצים את G' כך שהוא יוכל בתוך דיסק
קטן בעל קוטר ε



יש עוד ענין של השכפולים שמהם בעצם אנחנו מתוארים וגו' בחירה נכונה של m^* אפשר להשתכנע שהמס או משהו הוא כנדרש, ומקבלים את השכפולים הנדרשים.

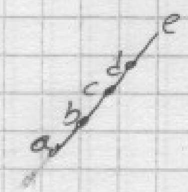
יש כמה דברים מעניינים ולאו דווקא כל כך גיאומטריים, שאפשר לומר על העניין. ניזכר שעוד מקום בו מקבלים רצף באורך (תחת הנו) בו:

Generalized Path Compressions

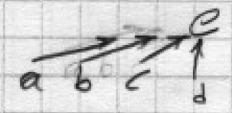


זה דומה ל- Union-find.
אז השאלה היא כמה זמן תיקח פעולת find.

ה- path Compression מייצר במקום



את

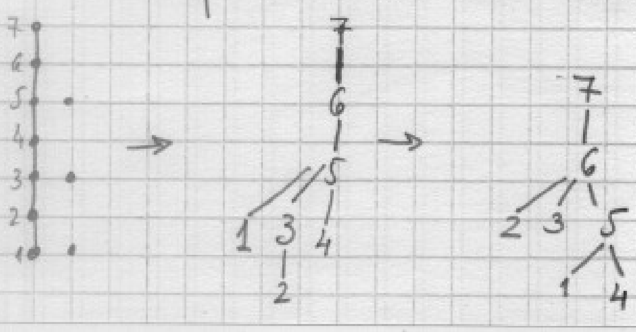


במקרה ה- Generalized רק בכמה קודקודים לאורך הדרך, ומכווצים רק לפי הקודקודים בהם ביקרנו. אם למשל ביקרנו ב- a,c,d נקבל

עוד נק' חשובה, היא שבשני המקרים, מסדרים לפי post order.

אז, במקרה כזה באופן מפתיע, הרצף של ה- GPC הוא $DS(n,3)$. כאשר הסמלים הינם הכיווצים, וכל צומת בו אנו מבקרים שומר בתוכו את הכיווצים שהוא עבר (עברו דרכו) בסדר הפוך.

לדוגמה: נתחיל מ- 1,3,5:
אז 2,3,6



וכך בונים את הרצף:

a: 135

b: 236

c: 4567

$\Rightarrow \overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{3}{\overline{ba}}\overset{4}{c}\overset{5}{\overline{ca}}\overset{6}{\overline{cb}}\overset{7}{c} \Rightarrow abacacbc$

וצריך לשים לב לבטל חזרות.