ישנם 2 מקרים. או שהקדקד הנ"ל ברמה 0, ההסתב': $\frac{n-2}{n}$ וזה $V_0(S)$

או 1- ההסתב': $\frac{1}{n}$ וזה $V_1(S)$

$$\Rightarrow E[V_0(R)] = \frac{n-2}{n}V_0(S) + \frac{1}{n}V_1(S) \geq \frac{n-2}{n}V_0(S) + \frac{1}{n}V_0(S) - 1$$

$$V_0(S) \leq V_1(S) + n$$

$$\Rightarrow \boxed{V_0(n-1) \geq \frac{n-1}{n}V_0(n) - 1}$$

ובצורה אחרת: $\frac{V_0(n)}{n} \leq \frac{V_0(n-1)}{n-1} + \frac{1}{n-1}$

וזה אומר נוסחת נסיגה לפתור. זה טור טלסקופי.

$$\Rightarrow \frac{V_0(n)}{n} \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} + \frac{V_0(1)}{1} = O(\log n)$$

$$\Rightarrow V_0(n) = O(n\log n)$$

זו טכניקה הדומה לבודג' שאנסק', שהצליח בעזרת הטריק הזה למצוא כמה חסמים ללא שום ε (משהו מלפני 15 שנה באוניברסיטה).

<u>הרצאה</u>

היום נראה כמה חסמים על מבנים ממימדים גבוהים.

נתחיל משם דוגמה הדק על:

מעבר ומתנה של סימפלקסים (סגמנטים - הכללה)

ב-2 מימדים זה קטעים.

ב-3 מימדים זה אוסף של משולשים.

ב-d מימדים, נניח שיש לנו n, $(d-1)$ סימפלקסים.

נגיד ב-3 מימדים, גם יהיו לנו קדקודים של 3 משולשים שנפגשים,

ויהיו תבנית קומה לכל-מימד אם נשים מישור שחותך

הראינו שזה $O(n^{d-1}\alpha(n))$.
והראינו שזה הדוק ב- WorstCase.
ראינו ב- R^3: $O(n^2\alpha(n))$.
אבל זה היה עבור משולשים.
אבל אילו זה היה עבור מישורים, היינו מקבלים משהו לינארי.

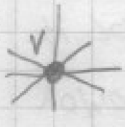
ובאופן כללי, ב- R^d, המעטפת התחתונה של n היפר מישורים, שקולה למצולע קמור במימד זה ולכן הסיבוכיות הינה the upper bound theorem: $O(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$

מה שראינו פעם שעברה היה $O(n^{d-1+\varepsilon})$, כלומר ~~[illegible]~~ במקרה הכללי זה לפעמים פחות טוב, ומגיעים אליו אם ~~[illegible]~~ עוסקים בחלקי מישורים או היפר-מישורים

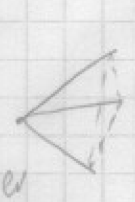
ב- upper bound th. יש גופים ובנית ~~[illegible]~~ לנגיד מימד d - כמה נק' יש, כמה ישרים וכו'.

נסתכל על היפר מישורים ב- R^d. ונספור רק את כמות הקודקודים כרגע.

כל קודקוד משותף ל- d היפר מישורים.

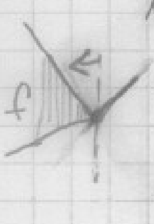


בסביבתו של v ... יש לנו d צלעות שיוצאות ממנו.
(או 2d בגלל מימד).
יש $\binom{d}{2}$ 2-faces. כל אחד מוגדר ע"י 2 צלעות.
⋮
יש $\binom{d}{j}$ j-faces. כל אחד מוגדר ע"י j צלעות.



משולשות מימד... (נפרש ע"י 3 צ...

נסתכל על d הצלעות. לפעמים אחד הולך ימינה, ולפעמים אחד שמאלה..
נסתכל על הצד, בו יש יותר צלעות, לפחות חצי מהם $k=\lceil \frac{d}{2} \rceil$
נסתכל על ה- k-face אותו k הצלעות פורשות



אפשר לראות בקלות ש- v הוא הקודקוד הכי ימני של f
(או הכי שמאלי, תלוי לאיזה צד פונים).
לכל פאה יש לכל היותר 2 כאלו.

הקדקודים הינה לכל היותר 2 כפול # הפאות ממימד $\geq \lceil \frac{d}{2} \rceil$

$(d-1)$ faces $\leq n$

$(d-2)$ faces $\leq \binom{n}{2}$

$\vdots$

לכן כמות הקדקודים הינה לכל היותר:

$$2\left[n+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{\lfloor d/2 \rfloor}\right] = \Theta(n^{\lfloor d/2 \rfloor}) \qquad \left[\binom{n}{j} \leq \frac{n^j}{j!}\right]$$

במרחב השתמשנו ב- $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor = d - \lceil \frac{d}{2} \rceil$ מישורים

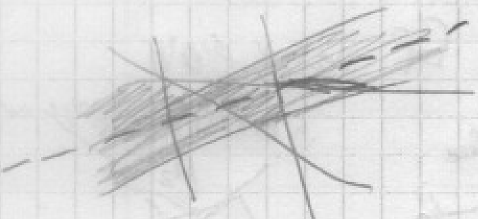
ההוכחה מיוחסת ל- KLEE.

Zones במימדים גבוהים

ב- $\mathbb{R}^d$, H הוא סט של n היפר מישורים.

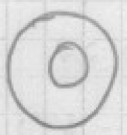
b - עוד היפר מישור.

Zone(b;H) - זהו הסט של כל התאים של A(H) הנחתכים ע"י b.



סיבוכיות ה- zone: סכום של הסיבוכיות של כל התאים ה- d-תאיים.

לו כהכללה גמיש יש קשר בין כמות הקדקודים לבין כמות פאות... למשל מעטפת ותמונה של 2 פקודים יכולה להראות כך:



אך במקרה שלנו זה כן אומר הרבה. רב המידע והמחיר הינו בקדקודים.

אז סכום סיבוכיות כל ה- d תאים = # k-dim פאות של תאים וזה על כל k ובכל התאים.

במישור כל קדקוד יכול להיספר 4 פעמים.

בכלל ממימד 3 8 פעמים (או למעשה 7).

ב- d מימדים - קדקוד נספר לכל היותר 2^d פעמים.

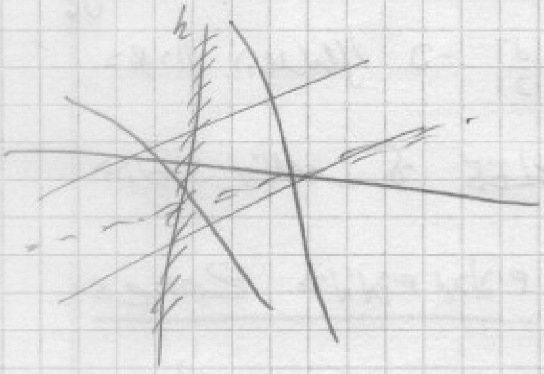
ופיצ'רים ואחרים ואפילו פאות, ישר - 4 פעמים בהלך מימד...

ו- 2^{d-k} עבור ~~פיצ'ר~~ ממימד k

נסמן בגבור $\tau_k(b,H)$ = # פאות k-מימדיות של ה-$zone(b,H)$ הנספרים פעם אחת לכל צד של ה-zone המכיל אותן.

ורוצים נוסחת נסיגה עבור:

$$\tau_k^{(d)}(n) = \max(\tau_k(b;H))$$



__הרעיון של ההוכחה:__

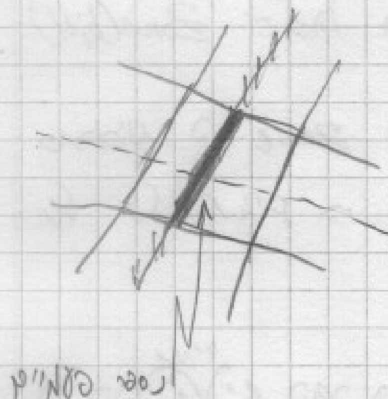
נבחר $h \in H$ ונסיר אותו. $H-\{h\}=H'$.

זה כמו להסיר גדר, או מכשול.

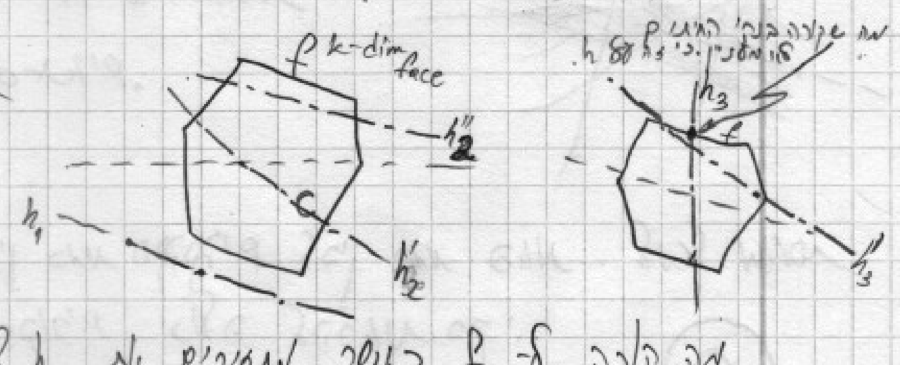
ואז נסתכל על $zone(b;H')$

ומקבלים $\tau_k(b,H')$.

נוסיף את h בחזרה, ונעריך את העליה במספר ה-k-פאות של ה-zone הלא מוכלות ב-h.



עושים את זה לכל h.



מה קורה ל- f כאשר מחזירים את h?

מקרה 1: h_1 - f לא יושפע. $h \cap C = \phi$ ← (f,c) נשאר פיצ'ר k-מימדי של ה-zone.

2: h_2' - אומנם C מתפצל לפחות 2 חלקים, אבל עדיין סופרים את f פעם אחת

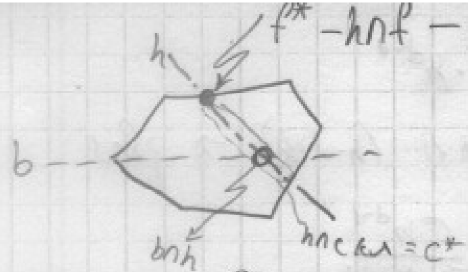
3: h_2'' - לא סופרים את f כעת.

⇐ גם h_2 וגם h_3: $h \cap C \neq \phi$ אבל $\phi = f \cap h$ ולכן f נספר פעם אחת או בכלל לא.

מקרה 3: h_3 - $h \cap f \neq \phi$: f נחצה ל-2 - f_1, f_2. אז סופרים את f פעמיים, כלומר סופרים פעם אחת יותר, __אבל__ רק אם h חוצה את b. אם הוא לא:

h_3' - עדיין סופרים רק פעם אחת. כי החלק השני כבר לא בתוך.

פאה ג-א מימדית — $f\cap h - f^*$



עושים charge של הפיצול ל- $f\cap h = f^*$

הפאה הי ג-א מימדית.

עוברים למרחב ה- $(d-1)$ מימדי של h, איפה ש- f^* ג'. מימד כן צלע.

בתוך h, כל $h'\in H-\{h\}$ חותך את h בהיפר מישור $(d-2)$ מימדי.

בתוך h יש לנו $n-1$ היפר מישורים. f^* הוא פאה ג-א מימדית של התא $b\cap h$ של ה-zone של $b\cap h$ במערך של $n-1$ היפר מישורים.

בגלל נגיע זה בכל המישורים

⇐ # של ה-k-פאות אושר "purely blue" ב- $zone(b;H)$ הינו $\geq$

$$(*)\quad \underbrace{\tau_k(b;H\setminus\{h\}) + \tau_{k-1}(b\cap h, H\setminus\{h\}|_h)}_{\le \tau_k^{(d)}(n-1)+\tau_{k-1}^{(d-1)}(n-1)}$$

cross sections
בתוך h של n-1 היפר מישורים

נסכם על כל ה-h את הא' שוויון:

$$(**)\quad n\left(\tau_k^{(d)}(n-1)+\tau_{k-1}^{(d-1)}(n-1)\right) \le (*)$$

k-פאה f של ה-$zone(b;H)$ אינה נספרת $\underbrace{d-k}$ פעמים.

כמות ההיפר מישורים המכילים את f

$$(n-d+k)\tau_k(b;H) \le (**)$$

ולבסוף קיבלנו:

$$(n-d+k)\tau_k^{(d)}(n) \le n\tau_k^{(d)}(n-1) + n\tau_{k-1}^{d-1}(n-1)$$

נראה כי $\tau_k^{(d)}(n)=O(n^{d-1})$ ע"י אינדוקציה על d.

$d=2$ ⇐ $O(n)$. הוכחנו זאת במישור.

צ"ל: $n\tau_{k-1}^{(d-1)}(n-1) = n\cdot O((n-1)^{d-2}) \to O(n^{d-1})$

$$(n-d+k)\,\tau_k^{(d)}(n) \le n\,\tau_k^{(d)}(n-1) + C\cdot n^{d-1}$$

נחלק ב- $n(n-1)\cdots(n-d+k)$:

$$\Rightarrow \frac{\tau_k^{(d)}(n)}{n(n-1)\cdots(n-d+k+1)} \le \frac{\tau_k^{(d)}(n-1)}{(n-1)\cdots(n-d+k)} + \frac{Cn^{d-1}}{n^{d-k+1}}$$

2 ביטויים דבר עם הבדלה באינדקס של n.

$$\to F(n) \le F(n-1) + C\cdot n^{k-2}$$

רושמים את כל ה- n שוויונים (כי זה טלסקופי). סוכמים ומקבלים:

$$F(n) \le C\cdot\sum_{j=1}^{n} j^{k-2} = O(n^{k-1})$$

אם $k\ge 2$

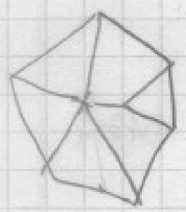
כי נשארו עם אינטגרלים... נטפל ב- $k=0,1$ בהמשך.

$$\Rightarrow \tau_k^{(d)}(n) \le F(n)\cdot n^{d-k} = O(n^{k-1}\cdot n^{d-k}) = O(n^{d-1})$$

$k=0$ אלו קדקדים. ←

$k=1$ אלו צלעות edges. ← מקבלים $\log n$

ל-2 מקרים אלו נסתכל על 2-פאות ו-1-פאות, של 3-פאות.



סכום כל ה-2-פאות של e (סכימה על כל c)

היא $\approx \tau_2(b;H)$ (עד כדי קבוע).

ואנו יודעים שזה $O(n^{d-1})$.

נוסחת אוילר אומרת לנו שבהינתן t פאות דו-מימדיות $\Rightarrow \ge 3t$ צלעות ו- $\ge 2t$ קדקדים. ולכן החסם טוב גם ל- τ_0 וגם ל- τ_1.

וכעת לדוגמה הבאה...

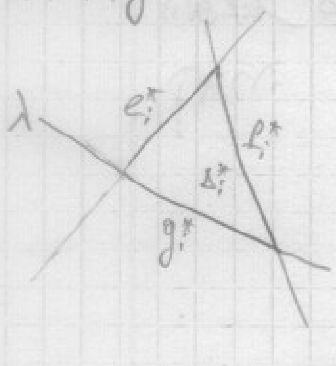
ל-n $(d-1)$-סימפלקסים ב-$\mathbb{R}^d$ יש מעטפת תחתונה בעלת סיבוכיות (מקס') $O(n^{d-1}\alpha(n))$

$d=3$. n משולשים: $\Delta_1,\dots,\Delta_n$. T - כל n המשולשים.
גם כאן נניח וצלעות קצת בעייתיות. ואז נעבוד רק פאות קו-מימד לפחות..
נספור את # הפאות ה-2D של המעטפת E: $\varphi(T)$.

$\varphi(n)$ - ה-$\varphi(T)$ המקס' על הסטים T של n משולשים.

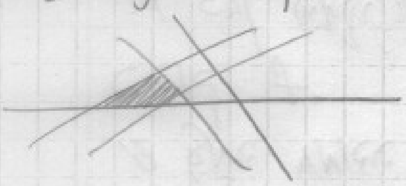
כמו בעיפה של הספר של מיכה, הבעיה שיש הרבה פאות לא קמורות אשר יכולות להיווצר במעטפת תחתונה של משולשים.

לכל משולש Δ_i יש 3 צלעות g_i, f_i, e_i
Δ_i^* - ההטלה של Δ_i על מישור xy - נקבל הטלה של הצלעות: g_i^*, f_i^*, e_i^*
והן נמצאות על 3 ישרים.



נקבל 3n ישרים במישור xy.
לכל ישר λ, נקח את המישור הורטיקלי דרך λ ונוסיף מישורים אלו ל-T.

נקרא לכל 3n המישורים ונסתכל על עוד ומקבלים מנסרות שכאלו.



מעל כל פאה במישור xy, כל משולש או מופיע או לא. מעל כל תא כזה תהיה מעטפת ^תחתונה^ קמורה מוגבלת.

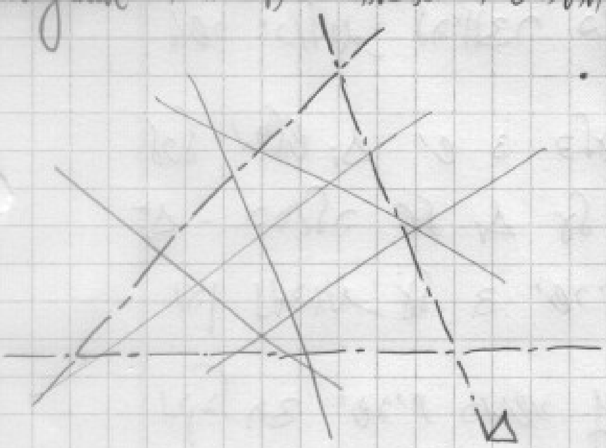
נסתכל על המעטפת התחתונה של T בנוכחות V.
כל הפאות קמורות, אבל יש יותר פאות מאשר קודם.

מה קורה על V? 3n מישורים אנכיים. נקבע מישור כזה π. המשולשים של T החותכים את π יוצרים לכן היטל n סגמנטים עליו, ו-E היא המעטפת התחתונה (restricted to π) של קטעים אלו, יש $O(n\alpha(n))$ קודקודים וצלעות. על כל המישורים π נקבל: $O(n^2\alpha(n))$.

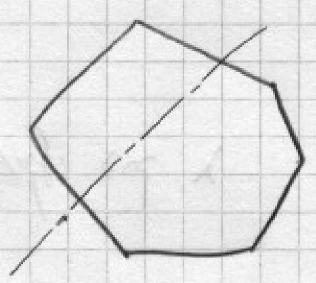
בתוך ג ו-C במעבר על עץ של אחד הישרים, כל משולש גורם לכל
היותר פאה אחת ל-E. $\varphi(T) = \#$ ה-2-פאות בנוכחות V.
אבל יכול להיות שמשולש אחד יצבע למיליון תאים, ובאופן הזה נקבל יותר מדי.
לכן, נעשה אנליזה דומה כמו במקרה של ה-zones.

נסיר משולש Δ ואת המישורים האנכיים שלו.
$T \setminus \{\Delta\}$ - רק n-1 משולשים $\Leftarrow$ # של 2-פאות $\leq \varphi(T\setminus\{\Delta\}) \leq \varphi(n-1)$.

כעת אנו מוסיפים בחזרה את Δ ואת 3 מישוריו ומעריכים בכמה גדל # ה-purely blue
2-פאות = פאות הלא מוכלות ב-Δ.

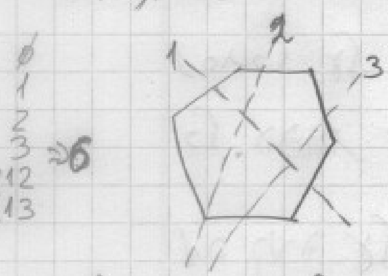


ניקח "purely blue" פאה f של
המבנה ללא Δ, וזו פאה
קמורה



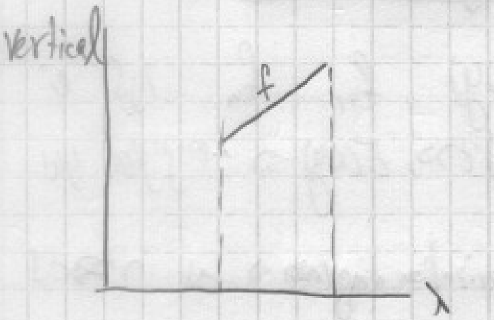
גם כאן המקרים המעניינים, המשפיעים, הם אלו שבהם המישורים עוברים
בתוך f.
יש לֶמה חמודה.

<u>למה:</u> אם f פאה קמורה במישור, נחתכת ע"י m ישרים, אז
כמות ה-subfaces שאליהם f מתפצל
שווה ל-# ה-subsets של m ישרים
שהחיתוכים שלהם בתוך f.



במישור זה פשוט. אפשר להוכיח באינדוקציה על כמות הישרים. אבל זה נכון מכל מימד.
לכן, ההתפצלויות שוות ל-1 (עבור הקב' הריקה), כמות הישרים החוצים + כמות הקודקודים בפנים

נבואם מבקב׳ הר׳קה כי זה הפאה שה״תה קודם. בלי שום ישרים.
על כל קו x, אם הוא חוצה את f, נוסיף 1 למניה.
נק׳ חיתוך הם בסדר, כי כל נק׳ חיתוך מוכלת ב-single face.
← כולם ביחד, נוסיף 3.

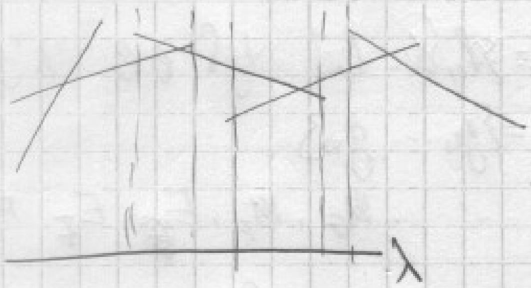


f היא קטע על המעטפת העליונה מעל x.

⇐ $O(n\alpha(n))$ כאלו פאות f.

n^{3+}

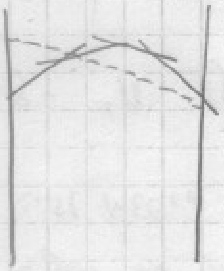
מהמישורים האנכ״ים



כי כל מישור אנכי מפצל פאה ל-2 ?

וה-$O(n\alpha(n))$ גם מוגבל ב-3 כי יש 3 ישרים לכל משולש, אבל זה עדיין $O(n\alpha(n))$.

לבסוף מוסיפים את Δ.



$\le$ ישנה המנסרה, עם כיפה קמורה חביבה.

לא מקבלים שום פאות חדשות, כי כבר דאגנו לפיצולים ? לכן:

$$\varphi(T) \le \varphi(n-1) + cn\alpha(n)$$

רק ב-פאות שלו ב-Δ

כל-פאה לא נספרת רק פעם אחת עבור המשולש המכיל אותה.

לכן: [illegible]

$$(n-1)\varphi(T) \le n\varphi(n-1) + cn^2\alpha(n)$$

$$(n-1)\varphi(n) \le n\varphi(n-1) + cn^2\alpha(n)$$

$$\frac{\varphi(n)}{n} \le \frac{\varphi(n-1)}{n-1} + c\alpha(n)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\varphi(n)}{n} \le cn\alpha(n) \longrightarrow \boxed{\varphi(n) \le cn^2\alpha(n)}$$

ובשביל כמות הישרים והקודקודים שוב משתמשים בנוסחת אוילר...
ובמימדים גבוהים, כל הסיפור נעשה באופן ממש דומה, ומקבלים (משמ׳$^{d-1}$ cn^{d}. הדוק.