17.11.08

גאומטריה חישובית

נמשיך לדבר על שימושים של בעית הקמור...

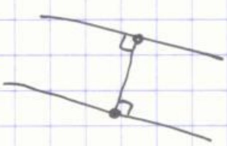
• חישוב עובי של קבוצה P של n נקודות -

(עובי = המרחק הקצר ביותר בין זוג ישרים תומכים מקבילים)

ונרצה לקרב את P ע"י ישר שמביא למינימום את המרחק של נק' ממנו ("ישר "אמצעי" בין זוג הישרים המגדירים את העובי)

נשים לב לתכונה של הישרים המגדירים את העובי - כ"א מהם הוא ישר תומך העובר דרך נקודה של P (אחרת נקרב עד שזה יקרה). יתר על כן, לפחות אחד מהם עובר דרך זוג נקודות

(הסבר -



במצב — ניתן לסובב ב 2 הכיוונים עד שנגע לעוד נקודה

במצב — ניתן לסובב בכיוון שמקטין את הזווית החדה).

לכן, לפחות אחד מהישרים מכיל צלע של הקמור.

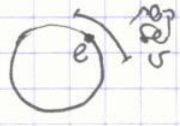
במצב כללי, בדיוק ישר אחד יהיה כזה. לכן, אנו מחפשים זוגות צלע e וקודקוד v של הקמור כך שהישר שעובר דרך v ומקביל ל e הוא תומך, ומבין הזוגות האלה נרצה למצוא את הזוג עם המרחק המינימלי בין הישרים.

איך נעשה את זה?

ניקח את דיאגרמת הנורמלים N של הקמור, ניקח את הדיאגרמה $\bar{N}$ המסובבת ב $180°$ ונמזג.

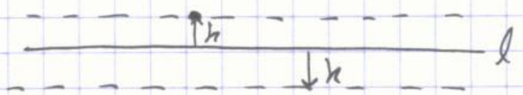
לכל קודקוד של הדיאגרמה המקורית (= צלע e של הקמור) נמצא באיזו קשת של הדיאגרמה המסובבת הוא נמצא (= קודקוד v).

נקבל פחות מ $2n$ (ולמעשה פחות מ n) זוגות מועמדים ונמצא את מינימום המרחק.



כדי לעשות זאת ניתן להציב בנוסחה $\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$ או,
אם לא רוצים לחשב שורש, לעשות זאת בעזרת דטרמיננטה.

אם המרחק בין הישרים המגדירים את הסוכי הוא w, אזי המרחק המקסימלי של נק' מישר האמצע הוא $\frac{\omega}{2}$. טענה זו מתקיימת גם בכיוון ההפוך.
לכן, אם l ישר עם מרחק מקסימלי h של נקודות ממנו (קרוב L^∞) אז מנקודה זו ניתן למצוא את הסוכי.



נרחיב את הבעיה שלנו לקמור במימדים גבוהים:
- המימד בד"כ יהיה קבוע ויסומן ב d
- P קבוצה של n נקודות ב $\mathbb{R}^d$

ההגדרה של $CH(P)$ היא עדיין חיתוך כל הקב' הקמורות המכילות את P רק שקבוצה קמורה מוגדרת ע"י הפרדה בעזרת על-מישור (שהוא תת מרחב ממימד $d-1$)
אם C קב' קמורה, $p \notin C$ אזי קיים על מישור h שמפריד ביניהם
לכן, גם במקרה זה הקמור של P הוא חיתוך כל חצאי המרחבים המכילים את P. הקמור אם כך יוגדר ע"י אוסף פאות (face).
סימון -
פאה ממימד $d-1$ (מקסימלי) תקרא facet
אנו נדבר כרגע בעיקר על $d=3$. בתלת המימד אנו למעשה נסתכל על חצאי ~~[illegible]~~ מרחבים שהמישורים התוחמים אותם נוצרים ב 3 נקודות של P.

נוכיח את הנוסחא באינדוקציה על E.

נוסיף קשתות אחת אחר השנייה תוך כדי שנשאר על קשירות.

שלב הבסיס הוא  $E=1$ $V=2$ $F=1$ ולכן מתקיים

אחרי זה, או שאנחנו מוסיפים צלע מקודקוד שהחשבנו לקודקוד חדש

ואז V,E גדלים ב 1 או שמחברים 2 קודקודים קיימים ואז

F,E גדלים ב 1

הערה-

מדוע ניתן לראות כל קמור (שמכונה גם פאון קמור) כמפה מישורית?

כי אם ניקח פאון כזה, נוציא את אחת הפאות "נמתח" ונשטח

אותו אז נקבל מפה מישורית שיש העתקה טופולוגית בינה

ובין הפאון (כאשר הפאה שהוצאנו הפכה לפאה האינסופית החיצונית)

שבה נשארים יחסי השכנויות.

הערה (לא קשור לקמור)-

אפשר כעת לגלות כמה פאונים משוכללים יש במרחב

מכיוון שלכל פאה k צלעות אז $2E = kF$

לפי נוסחת אוילר $V+F=E+2$

$$\Rightarrow V = E+2-\frac{2}{k}E = E\left(1-\frac{2}{k}\right)+2$$

$$\Rightarrow F = 2E/k \qquad k \geq 3$$

אם $k=3$ אז $V=\frac{E}{3}+2$ $F=\frac{2E}{3}$ כלומר

$$E=3V-6 \qquad F=2V-4$$

לכל קודקוד l צלעות ולכן $lV=2E$ ואז

$$lV = 2E = 6V-12$$

$$V=\frac{12}{6-l}$$

והצירופים האפשריים הם $l=3$ $V=4$

$l=4$ $V=6$

$l=5$ $V=12$

שפת הקמור ב $\mathbb{R}^3$ מורכבת מפאות דו מימדיות (משטחים), קשתות חד מימדיות וקודקודים.

מספר הבחנות על פאות, צלעות וקודקודים...

* כל צלע משותפת בדיוק לשני פאות
* בכל פאה לפחות 3 צלעות/קודקודים. במקרה הכללי מתקיים שוויון
* כל קודקוד סמוך לפחות ל 3 פאות/צלעות

לכן, בחישוב קמור תלת מימדי נרצה לחשב את כל הקודקודים, צלעות ופאות של הקמור ואת כל יחסי השכנות ביניהם. בעצם, נרצה לספק "מפה מישורית"

מפה מישורית-

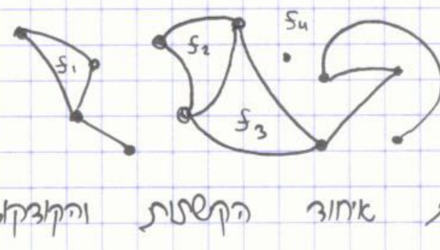
חלוקה של המישור המושרה ע"י גרף המצויר במישור.

קודקודי הגרף הם נקודות

קשתות הגרף באופן כללי הן קשתות עקומות קשירות המחברות זוגות של קודקודים ואינן חותכות זו את זו (ואינן עוברות דרך קודקוד שלישי).

למעשה, מבחינה פורמלית אלו הן "קשתות ז'ורדן" (תמונה חח"ע ורציפה של הקטע $[0,1]$, כלומר $f:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ חח"ע ורציפה).

דוגמה-



המישור פחות איחוד הקשתות והקודקודים מתפרק לרכיבי קשירות שיקראו faces (לדוגמה, בדוגמה למעלה יש 4 כאלו)

נוסחת אוילר-

במפה מישורית קשירה מתקיים $V+F=E+2$ כאשר

V = מס' הקודקודים, E = מס' הצלעות, F = מס' הפאות

הוכחה-

אם $K=4$ אז נקבל עוד 1 אפשרויות

" $K=5$ " " " " " "

בתזכרה לשינון...

עבור פאון קמור, כל פאה היא לפחות משולש ולכן $3F \le 2E$

ואז מנוסחת אוילר

$\Rightarrow E \le 3V-6$, $F \le 2V-4$

(וזה נכון עבור מפה מישורית קשירה שבה כל פאה היא מדרגה של לפחות 3)

לכן, הסיבוכיות של המפה, כלומר של הפלט שלנו, היא לינארית במס' הקודקודים

(הערה (לא ברור לי איך קשורה) -
משפט קורטובסקי -
גרף פשוט מישורי ⇔ אין בו תת גרף K_5 או $K_{3,3}$)

למעשה, השתמשנו רק בהכללה של נוסחת אוילר הקובעת כי לגרף המורכב מקודקודים וקשתות של פאון קמור ב $\mathbb{R}^3$ שאינו קשיר

יש c רכיבי קשירות אז $F+V=E+C+1$

ועכשיו ניתן סוף סוף להגדיר את הבעיה

הקלט: P קבוצה של n נקודות ב $\mathbb{R}^3$

הפלט: "ייצוג" של המפה המישורית שהיא פני הקמור (לינארי ב n)

איך נייצג את המפה המישורית?

יש מס' דרכים ואנו נבחר אחת מהן שמספקת לנו "ייצוג" של יחסי השכנות ויכולת "ניווט" סבירה.

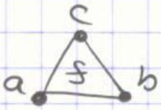
המבנה שנשתמש בו נקרא Quad-Edge (או Doubly Connected Edge List).

במבנה זה, נתייחס לכל קשר a—b כאל 2 "חצאי קשתות"

$b \to a$! $a \to b$. לכל חצי קשת e נחזיק את

1. הקודקוד שלו היא מוצאה
2. הפאה הנמצאת משמאלה
3. מצביע לחצי הקשת ההפוכה
4. מצביע לחצי הקשת הבא על הפאה השמאלית

לדוגמא,

עבור $a \to b$ ב 

נחזיק את 1. b 2. f 3. $b \to a$ 4. $b \to c$

עבור פאה, נחזיק רשימה שמצביעה על חצי קשת אחת בכל רכיב קשירות של השפה. (במקרה של קמור תמיד יהיה רכיב אחד)

הערה -

כדוגמא לפאה עם יותר מרכיב קשירות אחד ניתן לקחת את 

קיים אלגוריתם דטרמיניסטי לבעיה (Preparata-Hong) אך אנו נראה דווקא את האלגוריתם הרנדומי (בסגנון Las Vegas, כלומר תמיד מחזיר תוצאה נכונה)

הכוונה ברנדומיות היא שהאלגוריתם "מטיל מטבעות". הקלט, לעומת זאת, אינו רנדומי. כתוצאה מכך, זמן הריצה הינו משתנה אקראי. במקרה זה אנו נתעניין בתוחלת זמן הריצה

אלגוריתם רנדומי אינקרמנטלי -

האלגוריתם (בגדול) הוא להוסיף את נק' P אחת אחר השניה ולעדכן את הקמור לאחר כל הוספה. הוספת הנקודות תתבצע בסדר אקראי, כלומר מגרילים פרמוטציה של P.

לפני שנראה מהו האלגוריתם, ננסה להבין למה רנדומיות. נסתכל על

סדרת הקמורים $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$

כאשר בכל שלב באלגוריתם $P_j = \{p_1, p_2, \dots, p_j\}$

ונסתכל על כל הפאות של $C_j = CH(P_j)$. כמה פאות כאלו יש?

ב c_j יש $2j-4$ פאות (כי ראינו $F=2V-4$) ולכן

$$\sum_{j=4}^{n} c_j = \sum_{4}^{n} (2j-4) = \Theta(n^2)$$

כלומר, לא משנה איך נסדר את הקלט נקבל שבאלגוריתם
אנו עלולים להתמודד עם n^2 פאות

דוגמה -

אם נניח P כך ש $\frac{n}{2}$ נקודות נמצאות על מישור xy והשאר על
הציר החיובי של z ועוד נניח שסדר הבחירה של הנקודות
הוא קודם המישור ואז השאר לפי הגובה אז נקבל שהסיבוכיות
היא לפחות ריבועית