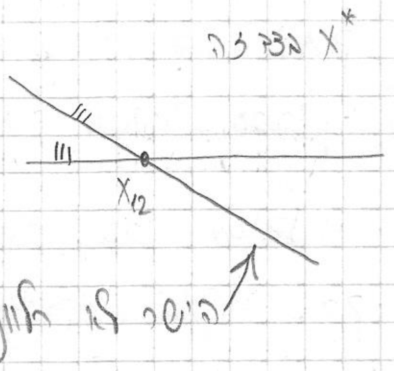


אילו ישרים זורקים?
כל הזמן שיודעים את התשובה,
זורקים את הישר כפי שמשמאל
כי האופטימום לא יהיה עליו.

זהו אלג' דטרמיניסטי שרץ בזמן לינארי: $O(n)$.
מגידו הכליל את העניין לכל ממד בייסורים גבוליים. כל ההכללות רצות בזמן nC_d כאשר C_d גדל אקספוננציאלית ב-d, וגם האלג' מאוד מסובכים.

כיוון אחר שנפתח הוא גישה רנדומית, בה כל פעם מוסיפים את האילוצים בסדר רנדומי, והאזור הפיזיבילי הולך ומצטמצם, כאשר כל פעם צריך (אולי) לתקן את הפתרון עד שבסוף יהיה קדקד של K.

הרצאה (6)

עד עכשיו ראינו את האלג' של מגידו שהוא אלג' דטרמיניסטי. כעת נדבר על אלגוריתמים רנדומיים. עסקנו בכאלו גם בקורס הבסיסי והנה זה שוב.

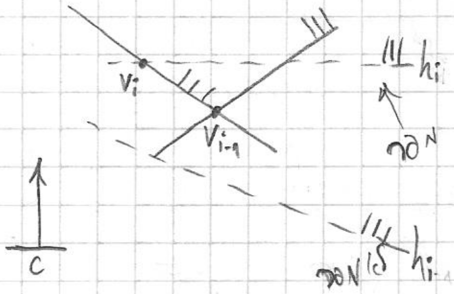
אלג' של Seidel

כמובן שאנחנו רוצים זמן לינארי ב-n, ולא מצליחים פתאום אקספ' ב-d, אבל רוצים כמה שפחות ב-d. זהו אלג' randomized incremental.
יש לנו n אילוצים, כל א' שוויון לינארי, שמייצג חצי מרחב.
אנחנו ב-$\mathbb{R}^d$ עם חצאי המרחבים $h_1, h_2, \dots, h_n$ ומעוניינים למצוא את $K=\bigcap_{i=1}^{n} h_i$.
אנו מחפשים קדקד של K שמביא למינימום פונק' מטרה לינארית c^Tx.
הרעיון הוא להוסיף את האילוצים אחד אחרי השני בסדר אקראי, ונתחזק את הקדקד המינימלי ביחס לפונק' המטרה לאחר כל הוספה.
יש כל מיני בעיות טכניות, כגון שלוקח זמן עד ש-K בכלל נהיה חסום וכו', אך כרגיל נתעלם מהם, כי זה באמת בקלות.

נסמן בתור v_i = הקדקוד המינימלי אחרי הוספת i אילוצים.

כאשר מוסיפים את h_i בודקים האם הוא מפר (violates) את v_{i-1}.

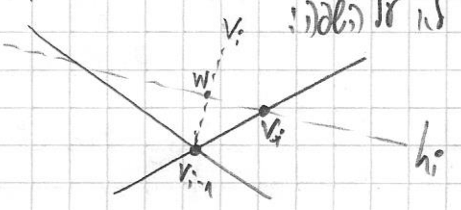
אם לא מפר, $v_i \leftarrow v_{i-1}$.



אם כן: צריך לעבוד כדי למצוא את v_i. הטענה היא ש-v_i חייב להיות על שפת h_i.

שכנוע ש-v_i על שפת h_i:

אם v_i לא על השפה:

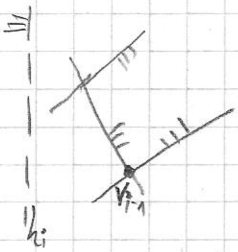


לכן: $c^T v_{i-1} \le c^T w \le c^T v_i$ (או $\le$ אם אנחנו במצב מאוד מנוון).

w הוא גם פתרון אם יש שוויון, והוא סתירה למינימום ב-v_i אם אין שוויון, ובכל מקרה, מקבלים ערך יותר קטן על השפה.

עת, פותרים בעיה רקורסיבית על שפת h_i (פחh_i) במרחב ממד $d-1$ עם האילוצים שהיו לנו עד כה, $h_1, \dots, h_{i-1}$.

זהו, זה האלגוריתם, שבסופו של דבר נקבל את הקדקוד המינימלי של A. במהלך האלג' אפשר לגלות כל מיני דברים, כגון אי פיזיביליות, אם בשלב יהיה לנו קדקוד זמני ויגיע אילוץ באופן הבא



הערה: אנחנו לא לגמרי משליכים אילוצים שלא מפרים כשמכניסים אותם, כי יתכן שנצטרך אותם אח"כ עם אילוץ שכן מפר.

הבה נעצור ונראה מה התוחלת מקסימום זמן הריצה $T_d(n)$ (ל-n אילוצים ב-d ממדים):

נוסחת נסיגה:

$$T_d(n) = O(1) + T_{d-1}(n-1) \cdot Prob + T_d(n-1)$$

בדיקה האם הכנסת אילוץ מפרה או לא

יותר נכון זה $O(d)$, לבדוק הפרה בכל קואורד'.

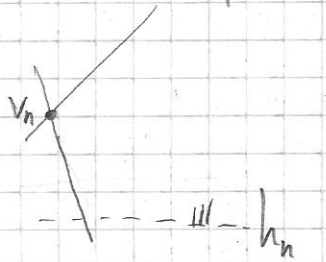
במצב שהאילוץ החדש מפר את הקדקוד הנוכחי

ההסתב' שזה קורה שהאילוץ מפר

מה עשינו עד כה

עוד כל מיני "פינות": יש עניינים טכניים, כאשר יורדים לממד יותר נמוך, ומטילים אילוצים על אילוץ מסוים ומקבלים אי שוויונים חדשים וגם כאן הזמן לביצוע של זה הוא תלוי ב-d...

ואנו נראה שפתרון נוסחת הנסיגה הוא לינארי ב-n, אבל לשם כך, צריך להבין מה ההסתב' שהאילוץ האחרון ישפר את הפתרון ל-n-1 הקודמים.
את ההסתב' לכך נחשב בעזרת backward analysis. כלומר, במקום לשאול את השאלה הנוכחית, נשאל את השאלה ההפוכה:
מה הסיכוי, בהנתן v_n של כל האילוצים, שהאילוץ האחרון היה כזה ש-$v_{n-1} \neq v_n$.



כמה אילוצים (במצב כללי) מגדירים קדקד? d.
⇐ h_n הוא אחד מ-d האילוצים שמגדירים את v_n. כלומר ישנם d אילוצים שאם נמחק אחד מהם, v_n ישתנה.
⇐ <u>ההסתב' היא $\frac{d}{n}$.</u> (רוצים <u>מקס'</u> תלות...)

$$\Rightarrow \quad T_d(n) \le T_d(n-1) + O(1) + \frac{d}{n} T_{d-1}(n-1)$$

נוכיח שהפתרון $T_d(n) \le C_d n$ נכון באינדוקציה.

$$T_1(n) \le C_1 n$$

זה ברור שזה נכון כי זה על הישר. אפשר לעשות את זה בקלות.
נניח את ההנחה:

$$C_d(n) \overset{?}{\le} C_d(n-1) + A_d + \frac{d}{n} C_{d-1}(n-1) \le$$
$$\le C_d n - C_d + A_d + d C_{d-1}$$

$$C_d > A_d + d C_{d-1}$$

וזה אומר ש-C_d הוא בערך מסדר כמו $d!$
כלומר: $C_d > d!$ מביא ש-$T_d(n) \le C_d n$.

<u>זהו</u>.
תכל' נראה עוד כמה אלגוריתמים, קצת יותר מסובכים אך גם יותר יעילים.
לצורך כך, נגדיר כמה מושגים לצורך שימוש מאוחר יותר.

* ישנה בע"ת הגיאומטרית. נעקוב אחרי! נוסיף לאילוצים $Ax \le b$ המקוריים שלנו את האילוצים $x \ge 0$ לכל משתנה ונניח גם שכל רכיבי c גדולים מ-0 ($c \ge 0$).
במקרה כזה ← הבעיה תמיד חסומה.

הגדרות:

* נסמן H = קב' האילוצים הנתונה.
H^+ = האילוצים $0 \le x$.

של האזור הפיזיבילי של G

לכל תת קבוצה של $G \subseteq H \cup H^+$ אילוצים נסמן ב- v_G את הקדקוד המביא למינימום את פונק' המטרה. (ברוב המקרים G יכיל את H^+ כדי שהבעיה תשאר סבבה).

* עת, נק' פדנטית אך חשובה: אם v_G לא יחיד, נגדיר אותו להיות המינימלי בסדר הלקסיקוגרפי של הקואורדינטות. כלומר, אם יש פאה שמשיגה כולה את המינימום, נבחר את הקדקוד עם ה- X הכי קטן ואז y הכי קטן אם יש יותר מאחד וכן הלאה.

* אם הבעיה עבור G <u>לא חסומה</u>, נגדיר $v_G = -\infty$.
* אם הבעיה <u>לא פיזיבלית</u>, נאמר ש- $v_G = +\infty$.
* <u>נסדר</u> את כל ה- v_G-ים: $\infty >$ כלה $v_G > -\infty$.
* עבור F,G כלשהן, $v_F < v_G$ אם $c^T v_F < c^T v_G$ או אם הם שווים אז $v_F \underset{LEX}{<} v_G$
בקיצור מגדירים סדר מלא על הנק' במרחב (פלוס מינוס).
(המוטיבציה: בקרוב נעסוק עם אלגוריתמים שעוסקים בתתי קבוצות של אילוצים).

* עוד <u>הגדרה</u>: <u>בסיס</u>: $B \subset H \cup H^+$, כך שלכל $B' \subsetneq B$: $v_{B'} < v_B$.
במילים אחרות: זו קבוצה מינימלית שמשמרת את הקדקוד שלה v_B.

* B <u>בסיס של G</u> אם $B \subseteq G$, B בסיס ו- $v_B = v_G$.
מוטיבציה: בבסיס אני נצפה לראות d אילוצים.

תזכורת לתכנות ליניארי.
אם $-\infty < v_B < \infty$, אז $|B| = d$.
אם הבעיה לא פיזיבלית, לא ברור מה גודלו של הבסיס... בעצם, גודל הבסיס הוא d+1. ברגע שנוריד אילוץ, נקבל נק' חיתוך אבל תמיד כשזה לא פיזיבלי, ניתן למצוא d+1 אילוצים שיוצרים א' ריק (במצב כללי) וזה לא קשה מדי להוכיח עבור תבא' מחבים, ועבור ממדים יותר מורכבים יש עניין שנקרא משפט הילי.
עבור בעיה לא חסומה, הבסיס הוא ריק.

קודם אמרנו שאילוץ h מופר (מפרים) ע"י קבוצה G אם $h \notin V_G$ (אם $h \notin G$)
ובדרך שמנצלת את ההגדרה:

$$\boxed{V_{G\cup\{h\}} > V_G}$$

אילוץ h קיצוני ב-G אם:

$$\boxed{V_{G\setminus\{h\}} < V_G}$$

יש כמה תכונות:

1) מונוטוניות: $F\subseteq G \Leftarrow V_F \le V_G$. קל להראות.

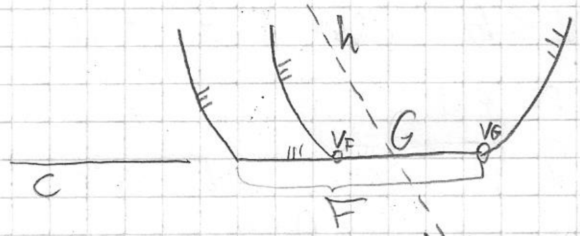
2) לוקליות: אם $F\subseteq G$, $V_F=V_G$, אז לאילוץ h מתקיים

h מפר את F $\Leftrightarrow$ h מפר את G

כלומר:

$$V_{G\cup\{h\}} > V_G \iff V_{F\cup\{h\}} > V_F$$

הסבה לכך: $V_G \notin h \iff V_F \notin h$ והרי $V_F=V_G$, כלומר זה ממש אותה נק'.



היינו צריכים את ההגדרה
המדוייקת ושהקודקודים יוגדרו באופן
יחיד כך שלא ייווצר המצב שבציור
כך ש-h "יפר" את V_G (ואת G) ולא את V_F (ואת F).
אם זה היה רק הערך, לא יכולנו לומר זאת, אלא אנחנו משתמשים
ממש בקודקד. בסדר. סבבה. משתמשים פה במונוטוניות ובמינימליות...

3) מינימליות (כבר אמרנו עם גודל הבסיס וכל זה).

G העניינים האלו מאפשרים לנהל את הדיון ברמה הרבה
יותר אבסטרקטית, ויהיה נכון גם כשיש אילוצים קצת אחרים.

נראה 2 אלגוריתמים של קלרקסון.

(H) CL1 ו- CL2

האלגוריתם מחזיר $V_H^+ = V_{H\cup H^+}$. נגדיר $n=|H|$.

```
CL1(H)
if n ≤ 9d² then
    return CL2(H)
else
    r := ⌊d√n⌋ ; G = ∅
    repeat
        choose random sample R ∈ (H choose r)
        v := CL2(G∪R)
        V := { h∈H | v violates h }
        if |V| ≤ 2√n then
            G := G∪V
    until V = ∅
    return v
```

ככל ש-G הולך וגדל, מקבלים יותר ויותר אילוצים, מינימום גדל, ופחות אילוצים מפרים אותו.

(CL2 מחזיר קדקד מינימלי של הקבוצה שהוא מקבל...)

טענה (1): שתוחלת $|V|$ היא $\leq \sqrt{n}$ (בכל רגע). (כלומר תוחלת מס' האילוצים שמפרים $\leq \sqrt{n}$).

$\Leftarrow$ ההסתברות ש- $|V|>2\sqrt{n}$ לכל היותר $\frac{1}{2}$, לפי א"ש מרקוב.

כלומר, בממוצע, כל סיבוב שני מגדיל את G.

טענה (2): בכל V כזה, מצוי אילוץ ששייך לבסיס B של $H\cup H^+$, וכמובן אילוץ זה לא שייך ל-G, ולכן אחרי לכל היותר d איטרציות מוצלחות, כל אברי B שייכים ל-G, $B\subseteq G$.

$$V_H^+ = V_B \leq V_G^+ \leq \boxed{V_{G\cup R}} \leq V_H^+$$

אם כן יש לנו 2 טענות להוכיח.

הוכחה (ל-2):

אם לא, אזי V זר ל-B, ואז B מוכל במשלים שלו

$$V_H^+ = V_B \leq V_{\underbrace{H\cup H^+\setminus V}} = V_{G\cup R\cup H^+} = \text{ה-}V\text{ ש-}CL2\text{ מחזיר} = V_H^+$$

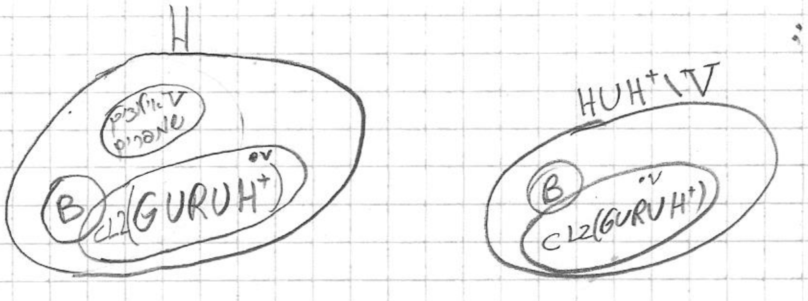
אילוצים שלו $\to G\cup R\cup H^+\cup$ מפרים במשלים את V_B

$\Downarrow$

V ריק.

$\Leftarrow$ כל עוד V לא ריק, הוא חייב להכיל אילוץ ששייך לבסיס.

רק הסבר נוסף:



$$V_H^+ = V_B \le V_{HUH^+\setminus V} = V_{GURUH^+} = V = V_H^+$$

כי האיזורים לא מפרים

כי שום דבר לא מפר אותו?

הוכחת טענה ראשונה. נזכר מה':

אם נבחר $r=\lfloor d\sqrt{n}\rfloor$ אילוצים אקראיים מ-H, אז תוחלת גודל הקבוצה של האילוצים שמפרים את V_R^+ היא: $\le \frac{d(n-r)}{r+1}$ (נכון לכל r).

אם נציב $r=d\sqrt{n}$ נקבל: $\frac{d(n-r)}{r+1} < \frac{dn}{d\sqrt{n}} = \sqrt{n}$

הוכחה:

נגדיר $\mathcal{X}$:

$$\mathcal{X}(\overset{\text{מדגם}}{R},\overset{\text{אילוץ}}{h}) = \begin{cases} 1 & h \text{ מפר את } V_R^+ \\ 0 & \text{לא מפר} \end{cases}$$

לכן:

$$|V_R| = \sum_{h\in H\setminus R} \mathcal{X}(R,h)$$

(כי $\mathcal{X}(R,h)=0$ אם $h\in R$, כלומר האילוצים שבדגימה את R לא מפרים... בהגדרה.)

התוחלת של $|V_R|$ היא:

$$E[|V_R|] = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{R\in\binom{H}{r}} \left(\sum_{h\in H\setminus R} \mathcal{X}(R,h)\right) =$$

צריך עם סוג של backward analysis:

$$= \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{Q\in\binom{H}{r+1}} \sum_{h\in Q} \mathcal{X}(Q-\{h\},h)$$

והרי $\mathcal{X}(Q-\{h\},h)=1$ אמ"מ h קיצוני ב-Q, כלומר שייך לבסיס שלו.

כלומר אם נוסיף אותו בחזרה ל-Q אז $V_Q > V_{Q-\{h\}}$ ומספרם לכל היותר d.

$$\frac{1}{\binom{n}{r}} \sum \underbrace{\sum \mathcal{X}(Q-\{h\},h)}_{d} = \frac{d\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} =$$ בדיוק מה שצריך.

ל-CL2 קריאות גמ"ק עם $\leq 3d\sqrt{n}$ אילוצים:
כלומר אם $n \leq 9d^2$ אז סבבה
היות ו-G גדלה $\leq d$ פעמים, כל פעם ב-$\leq 2\sqrt{n}$ ולכן $|G \cup R| \leq 3d\sqrt{n}$.

אז מהו CL2?

```
CL2(H)      (מציג V_H^+)
if n ≤ 6d² then
    return SUBEX(H)
else
    r := 6d²
    repeat
        choose random R ∈ (H choose r)  לפי משקלות
        v := SUBEX(R)
        V := {h∈H | v violates h}
        if μ(V) ≤ (1/3d) μ(H) then
            ∀h∈V do μ_h := 2μ_h
    until V = ∅
    return v
```

ניתן לאילוצים משקלים. לכל אילוץ h, μ_h. בהתחלה כולם 1. המשקל יגדיל את סיכוי האילוץ להיבחר בבחירה רנדומית

(אם מקבלים רק מדגם רע, דוגמים שוב, לפי משקלים כך שבסוף יהיה ומלה מדגם)

קצת נימוקים ותכונות:
מהי תוחלת $\mu(V)$? $\frac{1}{6d}\mu_H$. תכף נראה.
לכן, בהסתברות $\frac{1}{2}$, נעבור ל"הצלחה", כלומר יכפיל משקל. כמה פעמים המשקל יוכפל סה"כ?

<u>הוכחה</u>: ראינו שהתוחלת היא $\frac{d(N-r)}{r+1}$ כאשר $N=\mu(H)$ כי נגיד שעכשיו לאיזשהו יש משקל 8, אז הוא כאילו מופיע 8 פעמים, ואמנם יש מפרט אך סך הבחירה היא מסך המשקל והחשבון עובד אותו דבר.

$$\frac{d(N-r)}{r+1} \leq \frac{d\cdot N}{r} = \frac{\mu(H)}{6d}$$

יש שוני הבדל בין 2 האלג'. אחד מגדיל את כמות האילוצים הרעים. השני עובד תמ"ק עם כמות אילוצים קבועה, שנשמרת "בקפידה".

אז מה קורה באיטרציה אחת שבה מכפילים את המשקל?
מכפילים משקל שגדול $\geq \frac{1}{3d}\mu(H)$, ולכן המשקל החדש של H הוא
לכל היותר:

$$\mu_{j+1}(H) \leq \left(1+\frac{1}{3d}\right)\mu_j(H)$$

באיטרציה הראשונה: $\mu_0(H)=n$
ועם ההתקדמות:

$$\mu_j(H) \leq \left(1+\frac{1}{3d}\right)^j n \leq e^{j/3d} n$$

אבל טיעון כמו קודם אומר שבכל איטרציה מוצלחת, אם V לא ריק, הוא
מכיל איבר של B.
לכן, לפחות איבר אחד של B הכפיל את משקלו. (מאותו טיעון כמו קודם)
$\Leftarrow$ לאחר kd איטרציות, לפחות לאיבר אחד (ב-B) יש משקל $\geq 2^k$.
(יש d דברים, כל פעם אחד מהם נתפס ומכפיל את משקלו)

$$\Rightarrow \quad 2^k \leq e^{k/3} n$$

נוציא קצת לוגים ונשתמש בזה ש-$2>e^{1/3}$ אז:

$$\left(\frac{2}{e^{1/3}}\right)^k \leq n \rightarrow k=O(\log n)$$

כלומר, מס' האיטרציות הוא d כפול לוג ב-n. $\Leftarrow O(d\log n)$ קריאות ל-SUBEX
(בתוחלת) עם קלט בגודל $6d^2$.
וזה מגניב. סך זמן הריצה אפילו לא יהיה פולינום של n... התלות
הרעה (האקספוננציאלית) ב-d תהיה תלויה רק ב-$\log d$!! סך זמן
הריצה יהיה $O(n + \underbrace{\text{דברים ב-d}}\log n)$ בתוחלת.