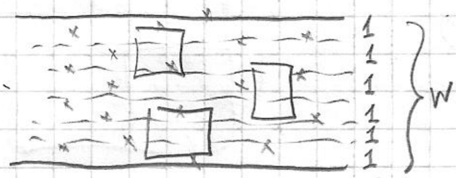
k-center במישור

נפתור למטריקת L_∞ $\square$ (ואח"כ נתאים את עצמנו למקרה הרגיל).

<u>בעיית ההכרעה</u>: האם אפשר לכסות ע"י k ריבועים בגודל 1.

<u>אבחנה</u>:

נסתכל על פס אופקי מינימלי שמכיל את P.



אז או שקיים ישר אופקי שחותך $\le \sqrt{k}$ ריבועים של הפתרון האופטימלי, או שעובי הפס $\le \sqrt{k}+2$

W ישרים, כ"א פוגע ב $> \sqrt{k}$ ריבועים, כל ריבוע נפגע בדיוק פעם אחת ולכן $k > \sqrt{k}W$.

אינטואיציה ופרטים בפעם הבאה.

<u>הרצאה</u> (11)

ממשיכים עם ה-k-center. המעבר מהכרעה לאופטימיזציה הוא קל.

<u>בע"ת ההכרעה</u>: האם אפשר לכסות את P ע"י k ריבועים בגודל 1 מקבילים לצירים?

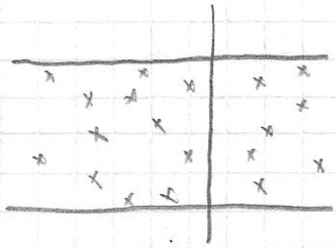
ראינו את <u>התכונה/אבחנה</u>: או שקיים ישר אופקי שחותך $< \sqrt{k}$ ריבועים, או שכל הנק' בפס אופקי שעוביו $O(\sqrt{k})$.

נסמן $w = \sqrt{k}$.

אם הנק' מוכלות בפס אופקי שעוביו w, נראה פתרון בזמן $O(n^{cw})$. אחרת, נפתור ע"י תכנות דינאמי.

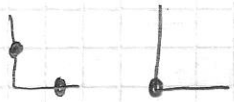
אז איך פותרים עבור פס עם עובי קטן?

פתרון עבור קטן:



נריץ sweep משמאל לימין.
בכל רגע נחזיק אוסף F של פתרונות
=קב' של ריבועים.

נניח שכל ריבוע מעוגן (anchored), כלומר הצלע השמאלית והצלע התחתונה מכילות נק' של P, כלומר האפשרות שהפינה השמאלית תחתונה היא קדקד של P. כל זה, כדי שתהיה לנו כמות דיסקרטית סופית של ריבועים אפשריים ולא כמות רציפה. יש $O(n^2)$ כאלו.



אנו רוצים ש- F יקיים את התכונות הבאות:

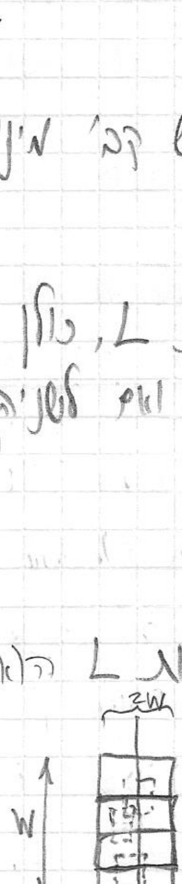
1) כל קב' ריבועים ב-F מורכבת מריבועים מעוגנים שמכסים את נק' P משמאל ל-L.

2) אם קיים פתרון, אז F מכיל קב' ריבועים שאפשר להרחיב אותה לפתרון.

הערה בסוגריים: בכל שלב באלגוריתם נחפש קב' מינימלית של ריבועים שאיחודם מכיל את P.

3) תתי הקבוצות של הריבועים שחותכים את L, כולן שונות זו מזו. (אם יש שניים, נשמור את זו שעם גודל יותר קטן, ואם לשניהן אותו גודל, אז נזרוק אחת מהן שרירותית).

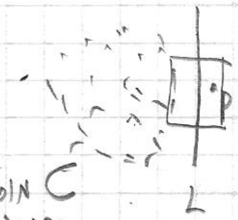
אבחנה:
מס' הריבועים של פתרון אופטימלי שחותכים את L הוא לכל היותר $2w$.
הוכחה בציור:



$\Leftarrow$ n^2 ריבועים מעוגנים, וצריך לבחור $\le 2w$ מהם מתוך אלו שחותכים את L.

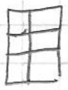
$\underline{\underline{|F| = O(n^{4w})}}$

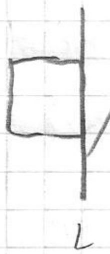
כש-L עובר דרך נק' p, לכל קב' ב-F עם ריבוע שמכיל את p -
נשאיר אותה ללא שינוי. לכל קב' אחרת, ניקח ריבוע מעוגן כלשהו
שמכיל את p ונוסיף אותו לקבוצה.



תכונה (1) מתקיימת אוטומטית.

תכונה (2): אז שריבוע מ-C מכיל את p
אז שמוסיפים ריבוע שמכיל את p והוא יהיה חלק
מהאוסף האופט'. בכל מקרה C יהיה חלק מהפתרון האופט'.

תכונה (3): ניקיון: אם כרגע קב' הריבועים שחותכים את L, גודלה
הינו גדול מ-2W, אז נצרך ריבועים לפי הציור , עם העיגון שלהם,
כך שמספרם יהיה $\leq 2W$. אם נקבל 2 קבוצות עם אותה תת-קבוצה
של ריבועים שמכילים את L לפי הכלל עם העיגול שהוזכר קודם. גם
בתנאי זה לא מאבדים שום דבר.

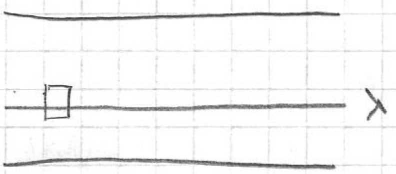


כשריבוע יוצא צריך לעשות ניקיון כזה- אם נשארות
תת קבוצות עם אותה קב' על L, מנקים...

כל זה יהיה מספר גבול של $O(n^{2+4W})$.

היות וה-W שלנו הוא $\sqrt{n}$ בערך, החסם בזבזני...

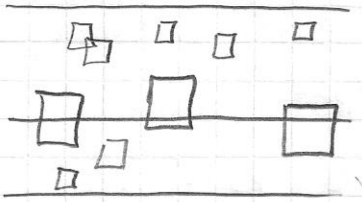
<u>לפסים יותר רחבים</u>: הרעיון הוא לנחש דרך לפרק פס שרוחבו 2-פסים.



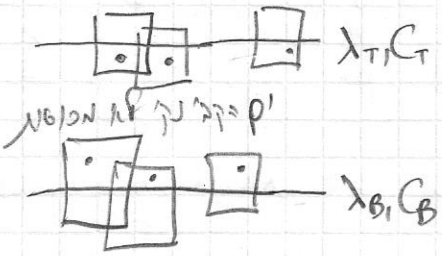
הריבועים מעוגנים. λ יחתוך כמה
מהם. אלא אם λ עובר דרך נק'
(לא סביר) אז ההזזה של ε כדי
1 בכיוון מסוים יעברו דרך אותו ריבוע.
שוקלים ישרים שהם בגובה נק' או בגובה נק' +1.
יש n^2 ישרים כאלו. נסתכל רק בישרים שחותכים $< \sqrt{n}$ ריבועים.
במקרה זה יודעים שיש ישרים כאלו.

ננחש ישר מפריד ונחפש $\sqrt{k}$ ריבועים שחותכים אותו. ~ $O(n^{2\sqrt{k}+1})$.
רק שנוכל לפתור בנפרד.

(הריבועים אותו גודל)



ובכל שלב יהיו לנו קב' C_T ו-C_B של $\sqrt{k}$ ריבועים שחותכים את λ_T, λ_B.



מתעלמים מהנק' בפס שמוכלות בריבועים...

המטרה: למצוא כיסוי מינימלי של נק' ע"י ריבועים שמוכלים בשלמות בפס.

לכל ניחוש ממשיכים את האלג' ברקורסיה, עד שמגיעים למצב ה-sweep.
נצטרך פתרונות שחוצים את גבול הפס.
ובמנגנון של התכנות הדינאמי, כל פעם שומרים מונה לכמה הריבועים המינימליות מעל ומתחת ל-λ וכמה ריבועים עוברים בתוך λ.

* אותו דבר היה עובד גם עם המקרה האוקלידי והעיגולים.
קצת קשה לראות מה צריך לעשות שם בדיוק, אבל זה אפשרי, ובערך לכל נורמה שעולה בראשנו. בגדול, כיסוי ע"י צורות יעבוד...

* ב-d ממדים, האלג' גם יעבוד, ויהיה בזמן $O(n^{ck^{1-\frac{1}{d}}})$
למשל, ב-3D, זה יהיה $O(n^{ck^{2/3}})$ והסיבה היא בגלל ההבחנה שהתחלנו איתה לגבי העובי - או שיש מישור שחותך מעט יחסית, או שהעובי הוא לכל היותר יחסית. עושים sweep עם מישור, ובודקים מי חותך אותו...

והנה כמה וריאנטים לפתרונות מקורבים

פתרון מקורב:

נתון $\varepsilon>0$, k קבוע (נניח חלק מהקלט) ורוצים למצוא כיסוי ע"י k ריבועים שגדלם $\le \sigma^*(1+\varepsilon)$

גודל אופטימלי

קירוב עד כדי פקטור 2 יש בזול. ע"כ מקבלים: $\sigma^* \le \sigma_0 \le 2\sigma^*$

נבנה סריג (גריד) שגדלו $\frac{\varepsilon\sigma_0}{3}$ (ב-d ממדים).

כאמור, כל נק' p בקב' שלנו נעביר לנק' סריג קרובה ביותר.

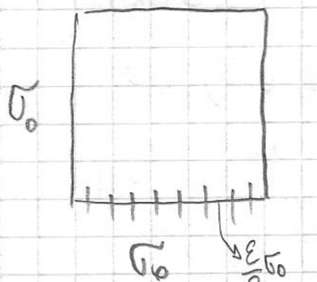
נסמן ב-Q את קב' נק' הסריג שמחליפות/מייצגות את P לפי ?.

קל לראות שהגודל של Q: $|Q|=O\left(\frac{k}{\varepsilon^d}\right)$

בעצם אפשר לכסות את הקב' ע"י k קוביות בגודל σ_0

יש $3/\varepsilon$ תאים בכל כיוון

$\Rightarrow$ $(3/\varepsilon)^d$ תאים.



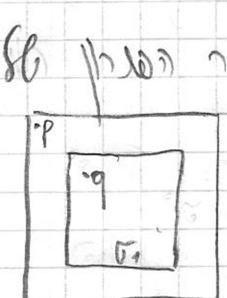
נקווה ש- $n \gg |Q| = O\left(\frac{k}{\varepsilon^d}\right)$

נפתור את הבעיה במדויק עבור Q, ונקבל k קוביות בגודל σ_1.

ננפח כל קוביה להיות בגודל $\sigma_2=\sigma_1+\frac{\varepsilon}{6}\sigma_0$.

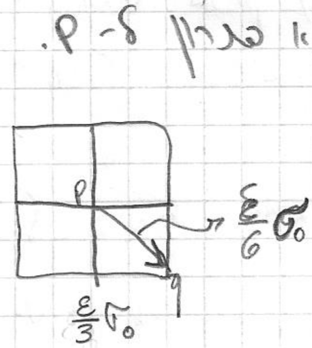
הטענה: $\sigma_2 \le (1+\varepsilon)\sigma^*$

קודם כל צריך לוודא שהפתרון הוא פתרון. כלומר הפתרון של Q לאחר ניפוח הוא פתרון ל-P.



$p \to q$

$\in P$ סריג



ניקח פתרון אופטימלי ל-P. נקבל k קוביות בגודל σ^*. ננפח כ"א ב- $\frac{3}{\varepsilon}\sigma_0$

אזי הן מכסות את Q, ולכן

$\sigma^*+\frac{3}{\varepsilon}\sigma_0 \ge \sigma_1$

כלומר קיבלנו $\sigma^* \ge \sigma_1 - \frac{\varepsilon}{3}\sigma_0$

אם $\sigma_2 > (1+\varepsilon)\sigma^*$

$$\sigma_1 + \frac{\varepsilon}{6}\sigma_0 > \sigma_2 > (1+\varepsilon)\left(\sigma_1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)\sigma_0$$

נחלק $\varepsilon\sigma_1$; $\frac{\varepsilon\sigma_0}{6}(1+2(1+\varepsilon)) > \varepsilon\sigma_1$

$$\rightarrow \sigma_1 < \frac{\sigma_0}{6}(3+2\varepsilon)$$

$$\sigma_2 < \frac{\sigma_0}{2}(1+\varepsilon) < \sigma^*(1+\varepsilon) \Leftarrow \sigma_2 < \frac{\sigma_0}{6}(3+3\varepsilon)$$

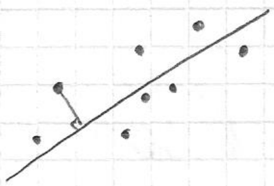
$$\Downarrow$$

$$\sigma_2 < \sigma^*(1+\varepsilon)$$

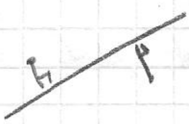
בגבול, אם לוקחים קבוצה ומציצים בקצת, הפתרון שנקבל יהיה אופטימלי עד כדי בערך ואמו קצת.

עד עכשיו המרכזים היו נק', אבל אפשר לחשוב על הכללות. למשל, אם המרכזים = ישרים/מישורים/עיגולים. קוראים לז'אנר projective clustering.

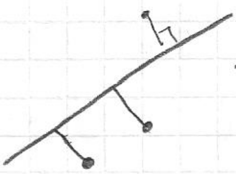
נניח P = n נק' במישור. למצוא ישר 1-center. כלומר כל נק' משפרת את מרחקה מהישר, ורוצים שהמרחק המקס' יהיה קטן ככל האפשר.



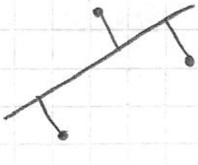
מיד חושבים ורואים שצריכות להיות (לפחות) 2 נק' שמשיגות את המרחק הזה, והן צריכות להיות מצדדים שונים של הישר. אבל זה עבור כיוון מסוים. אבל אז אפשר לסובב, ועבור 2 הנק' המרחק יקטן.

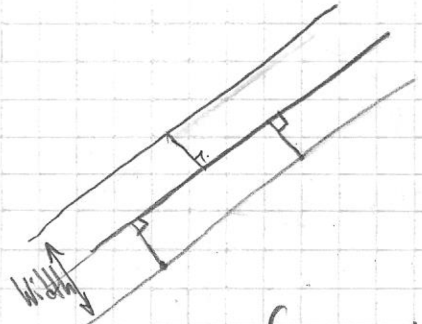


אז צריך 3 נק', 2 מצד אחד ועוד אחת בצד השני ואפילו במצב מסוים כי למשל במצב זה



מה שצריך זה 3 נק' כלקמן





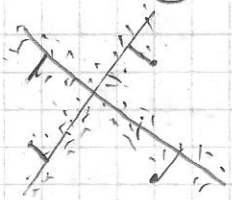
נרחיב את הישר ונמקם דרך
הנק' המאוזנת, כך שהאחד עובר
דרך צלע של הקמור והשני דרך
קדקוד של הקמור.
זה מה שנקרא עובי, ויש $O(n)$ מועמדים לזוגות ישר + קדקוד,
ובזמן לינארי אפשר לעבור על הזוגות ובכך $O(n\log n)$ אפשר לפתור
את הבעיה.

ב-3 ממדים, נגיד שרוצים מישור 1-center של הכללה, ושוב מחפשים
מין מצבים כאלו, שהמישור שלנו יהיה ~~מאוזנת מול~~ ויהיו 4 נק' מאוזנות אולי רוצים ישר?
ואולי רוצים ב-d ממדים ושם זה יהיה אקספ' בממד...
ב-3 ממדים יהיו לנו מועמדים של פאה מול קדקוד נגד' או צלע מול
צלע וב-d ממדים האפשרויות גדלות.
וזה רק 1-center. אנו מעוניינים ב-k-center!

<u>למשל:</u>

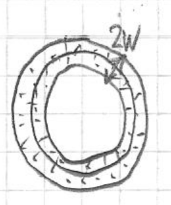
<u>k-line center במישור</u>

למצוא k ישרים כך שמרחק הנק' מהישרים הקרובים ביותר, המרחק
המקס' מינימלי. נהוג לקרוא לבעיות מהסוג הזה shape fitting.



למה? למשל אם קב' הנק' היא בצורת סוג
של איקס, אז ננסה 2 ישרים... ואולי
אנו חושבים שקב' הנק' היא מעגל...

ואז מחפשים טבעת מינימלית (smallest annulus)



וכמובן ב-3D כבר נחפש קליפה כדורית, עם אותו העובי'

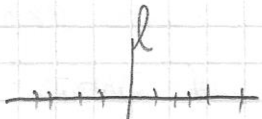
ומעניין ה-2 ישרים. אולי אפילו קטעים... זה בא מעולם
הגרפיקה ששם מעוניינים בסגמנטציה, והרי פה זה. מחפשים
אולי 100-segment center. ואולי רוצים סכום מרחקים, או סכום ריבועי
המרחקים... (k-mean, k-median)

תכף נראה כמה טריקים שעוזרים בכמה מהווריאציות.

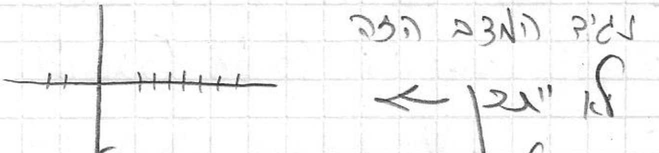
1-line median

n נק' במישור. רוצים ישר שמביא למינימום את סכום מרחקי הנק' ממנו!

נניח שכיוון l ידוע.



כעת l הוא נק' על ציר ה-x (כלומר אם l אנכי) ורוצים חציון.



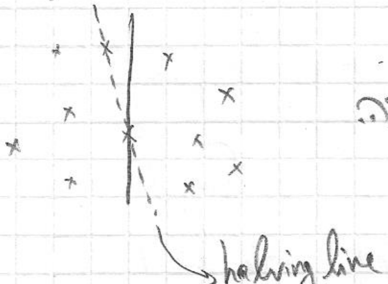
כי אנו נוסיף להזיז ולהזין הרבה מרחקים באופן מסוים ולהגדיל רק 2 באותו גודל. לכן, הפתרון הוא לשים את l בחציון.

אם כיוון הישר θ ידוע, נטיל את הנק' במאונך ל-l ונעביר את l דרך הנק' החציונית.

כעת, כל שנותר הוא לסובב את l ולעקוב אחר שינויים בנק' החציונית.

בין כל שינוי, אפשר לבטא את הסכום כתלות ב-θ, לגזור ולמצוא כיוון אופטימלי.

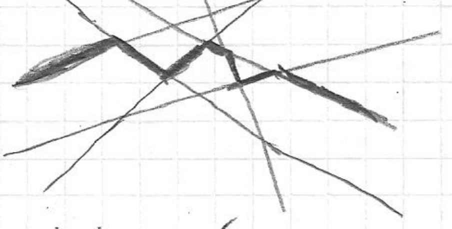
כל ישר שכזה נקרא halving line ומכיל אותו מס' של נק' בכל צד (עד כדי זוגי/אי זוגי).



כל halving line עובר דרך זוג נק' ומחצה את הקבוצה.

יש $O(n^2)$ מעברים.

בדואלי, נצ"ר את n הישרים המתאימים לנק', ורוצים את ה-median level



כמה קדקודים יש ברמה החציונית??

עבר הרבה שנים הבעיה פתוחה.

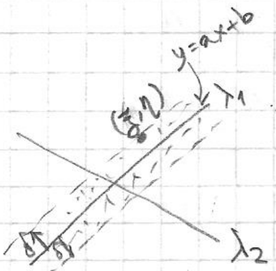
חסם עליון $O(n^{4/3})$. חסם תחתון $\Omega(n\cdot 2^{c\sqrt{\log n}})$. יותר מדויק $O(nk^{1/3})$

יש אלגוריתמים שרצים בכמות הפנ'את כפול log או משהו, והוא output sensitive

ולא באמת יודעים כמה זמן הוא ירוץ.

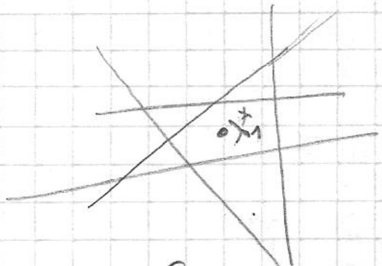
אבל, אם למשל רוצים 1-mean (line) זה פשוט רגרסיה, מינימום ריבועים, שיודעים לפתור בקלות בזמן לינארי. מפתיע שבמקרה ה-median כבר קשה.

נחזור לוריאציית ה-2-line Center במישור



בעיית ההכרעה: האם אפשר לכסות את P ע"י 2 פסים ברוחב w.

אפשר לפתור פתרון בזמן $O(n^2)$ שדומה לפתרון (הרגיל) של ה-2-center (הפתרון יעיל). סוג של לעבור על כל הפסים האפשריים בעובי w, ולהסתכל על כל מה שנשאר (לשאול האם ניתן לכסות את היתר על ידי פס נוסף ברוחב w.



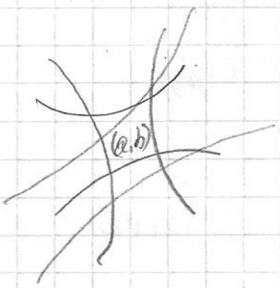
במישור הדואלי, x_1^* נק' במערך של n ישרים.

הפס

$$\frac{|a\xi-\eta+b|}{\sqrt{a^2+1}} \le w$$

כל נק' (ξ,η) מגדירה אזור, נתון במישור (a,b) של כל הנק' המקיימות את האי שוויון. אם עושים את החשבון, נקבל מין אזור היפרבולי

במקום לצייר את הישרים הדואליים, נצייר את האזורים האלו.



נקבל ע"י n ההיפרבולות $O(n^2)$ תאים, ובכל אזור נדע בדיוק מי הן הנק' שמספיק קרובות לישר.

לכל פאה יש קב' נק' שלא מוכלות בפס המתאים.

צריכים לקבוע האם אפשר לכסות אותן בפס שרוחבו w = הוא העובי של הקב' w. ורוצים בעצם מבנה דינאמי שתומך בהכנסות והוצאות של נק' רוצים לעדכן את עובי הפס. יש מבני נתונים שמעדכנים עובי. מוצאים פאה וע"י DFS עוברים על כולן תוך כדי עדכונים דינאמיים.

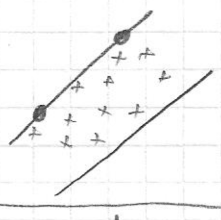
K-line Center במישור

אגב, ל-2-line לא ידוע משהו יותר טוב מריבועי.
ל-k-line Center, מגיעים ומישהו מפה הוכיח שזה בע"ה קשה אם k חלק מהקלט, כלומר בע"ת ההכרעה האם אפשר לצייר k ישרים שמכילים את כולן? זה NPC. (עבי' אפס).

לכן, יש כאן גם קושי של קירוב, כי אם כן יכולנו לקרב עד כדי עבי' מסוים, היינו יכולים לפתור את זה, ואנו לא יכולים. כלומר לא עד כדי פקטור. אולי פקטור אדיטיבי אפשר.
במקום זה, מסתכלים מה קורה עם קצת יותר ישרים...

נסתכל על בע"ת ההכרעה: האם אפשר לכסות את P ע"י k פסים בעובי w (שהיא קשה וקשה לקירוב), ונענה על השאלה עם $ck\log k$ פסים בעובי w. במילים אחרות, מהו קירוב למספר האופטימלי של פסים, עם פקטור קירוב של $O(\log k)$.

זה יהיה אלג' רנדומי שאם זה אפשרי, הוא יצליח בהסתב' גבוהה.
<u>הנה האלג':</u>
מסתכלים על פסים <u>מעוגנים</u>; אלה הישרים המוסמים עובר דרך זוג נק'. (זה יהיה צלע של הקמור של הנק' שבתוכו)



נגדיר Σ = קב' $O(n^2)$ הפסים המעוגנים
נתן לכל פס σ משקל $w(\sigma)$. בהתחלה כולם 1.
גם זה אלג' שקלרקסון הגה, והוא קצת קודם לאלג' שלו שכבר ראינו... (CL2)

<u>repeat</u>
נבחר מדגם אקראי $R\subseteq\Sigma$ של $ck\log k$ פסים
כל פס נבחר בהסתב' פרופ' למשקלו
אם R מכסה את P - מצוין
אם לא, נמצא נק' p שלא מכוסה
נחשב את סכום משקלות הפסים ב-Σ שמכילים את p (w_p)
אם $w_p < \frac{w(\Sigma)}{2k}$ הכפילו את המשקל של כל פס כזה.
<u>until</u> לפחות $8k\log n$ איטרצ'ות מכפילות (אם לא הצלחנו) ← return false