G מישורי ⟸ $\#edges \le 3n-6$ ⟸ $\#vertices\ on\ \partial U \le 2(3n-6)$

אולי הציור שלנו לא מושלם, אך בתכלס הטענה היא:

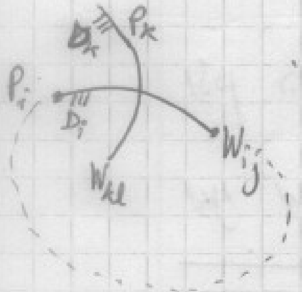
כל זוג של קשתות של G שאין להם endpoint משותף, מצטלבים כמות זוגית של פעמים.

וזו, משפט של Hanani-Tutte - שאם הטענה מתקיימת, זה מספיק כדי ש-G יהיה מישורי. זה הטענה הכבד.

נשים לב שכל edge הוא איחוד של 2 "חצאי-קשתות", ואנו נטען שכל זוג של חצאי קשתות נחתך מספר זוגי של פעמים.

(בניגוד לציור משמאל)

אם כן, צריך להראות שחצאי קשתות לא יכולות להחתך רק פעם אחת.



נצייר מצב שבו זה כך (שוב) ונראה שזה לא יתכן.

P_i, P_k הינן על ∂U וגם W_{ij}, וגם W_{kl} ולא ניתן לצייר כך שכל ה- endpoints יהיו מחוץ לדיסקים.

היות וגם P_i וגם W_{ij} חייבות להיות בחוץ, אבל אז יש 4 נק' חיתוך, וזה גם סותר.

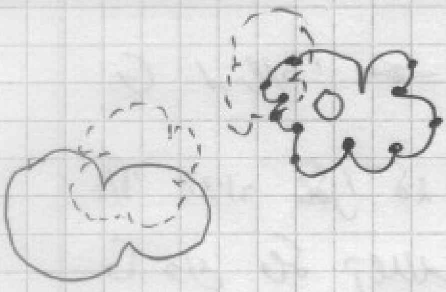
וזהו. עם חנני-טאט מקבלים את מה שרצינו.

<u>הרצאה</u>

נמשיך עם הפסאודו-דיסקים...

ניתן לחשב את האיחוד של n פסאודו-דיסקים בזמן של $O(n\log^2 n)$ (פשוט, בשיטת D&C.

הנחה לשם הפשטות (למרות שבכלליות ניתן להסתדר גם בלי זה) שמדובר ב-פסאודו-דיסקים קמורים.

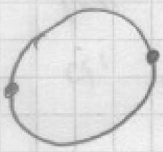


__נאיבי:__

D - קב' n פ"ד.

$D=D_1\cup D_2$, $|D_1|,|D_2|\sim\frac{n}{2}$

U_1 - איחוד D_1. U_2 - איחוד D_2. (רקורסיבית...)



משכים $U=U_1\cup U_2$ בעזרת line sweep.

העלות של sweep כמו העלות של אלגו' של סגמנטים:

$O((input+output)\log n)$

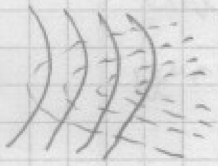
רק שכאן הנקודות הם קבוצות קשתות, ונק' אקסטרמליות.

כי אלו פ"ד.

השאלה הי"א כמה קשתות יש שכן input. לינארי ב-n. הוכח 6 כפול...

וכמה output - גם $O(n)$. כי כל intersection שפוגשים הוא __קדקד של U__.

אה, ויש רק $O(n)$ כאלו...



יש נק' intersection

ולכן ה-אלג' ייתן עוד $\log n$ וסה"כ $O(n\log^2 n)$.

ואנו מנצלים את העובדה שסיבוכית האיחוד הינה לינארית, וזה קריטי.

העובדה שלאיחוד של n __דיסקים__ יש סיבוכית $\leq 6n-12$, ניתן להראות גם בדרך אחרת.

ניתן להשתמש ב-lifting ל-R^3: $(x,y)\to(x,y,x^2+y^2)$

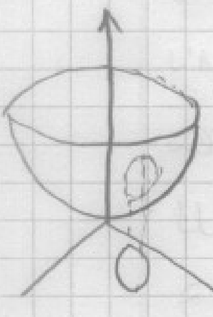
כלומר, לפרבולואיד $z=x^2+y^2$.

אז אם יש לנו מעגל: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

פותחים סוגריים ומקבלים: $\underbrace{x^2+y^2}_{z}-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0$

$$\Rightarrow z=2ax+2by-(a^2+b^2-r^2)$$

וזהו מישור ב-R^3.



המעגלים הופכים לאליפסות.

p נמצאת בתוך מעגל אמ"מ

p^* (הנק' המורמת) תהיה מתחת ל-C^* האליפסה

ואם בחוץ, אז מעל

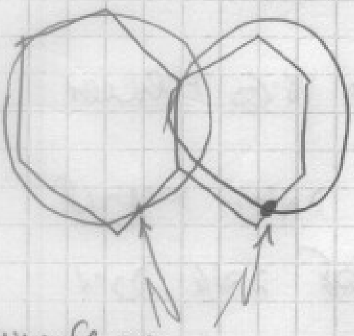
p נמצאת באיחוד, רק אם p נמצאת לפחות בתוך דיסק אחד כלשהוא,
כלומר, אם p^* מונח מתחת ללפחות מישור אחד.

$\Longleftrightarrow$ p^* נמצא מתחת למעטפת העליונה.

(חישובית) כמו שלמדנו בקורס

אז משליכים את כל המישורים, מוצאים מעטפת עליונה בגלל מימד
שזה דואלי למישוב קמור בגלל מימד... ומוצאים חיתוך עם הפרבולואיד.

החיתוך של המעטפת העליונה המורכבת ממישורים (שהם בעצם הדיסקים) בחיתוך עם הפרבולואיד
נותן פוליגון קמור...



קדקד של האיחוד.

אז כשנטיל את המעטפת התחתונה על המישור
נקבל מפה מישורית עם n פאות,
ונקבל לכל היותר $3n-6$ צלעות.
כל צלע כזו יכולה להחתך פעמיים כי, צלע
יכולה לחתוך דיסק פעמיים לכל היותר.

לכן סה"כ $6n-12$ חיתוכים לכל היותר.

והשיק הזה עובד גם עם כדורים בגלל מימד בדיוק באותה צורה,
עם מעטפת עליונה ב-4 מימדים, והחיתוך יהיה בין תא"ים לבין כדורים,
וההבדל היחיד הוא שהקמור יכולה להיות סיבוכיות $O(n^2)$ ב-4 מימדים
(כלומר למעטפת העליונה). אבל הרי כן הרמה ממימד יותר נמוך

ולכן כאן זה בדוקא $O(n^{\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor})$ במקום $O(n^{\lfloor d \rfloor})$.

ומיכה אמר משהו גם על 3 נק' חיתוך

ועכשיו נלמד שמו, (כמו בקורס בס"ס) על טכניקת קלרקסון-שור.

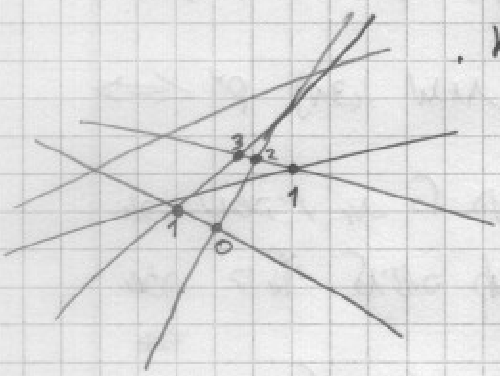
נתחיל מדוגמה. L - קב' של n קווים במישור.
המערך $A(L)$ מכיל קדקדים = נק' חיתוך של זוגות של קווים.
לכל קדקד v, ה- level שלו או המשקל, הינו:

$W(v)=$ # הקווים שעוברים מתחת ל-v

נסמן כעת:

V_k - כמות הקדקודים ברמה ה-k.

$V_{\le k}$ - " " " עד k.



אז ברור כי V_0 הוא
פשוט כמות הקדקודים שיכולים
להיות במעטפת התחתונה:

$V_0 \le n-1 \le \cancel{n}$

$V_{\le k} \le \dots \le n$ כלל

משתמשים בטיעון הסתברותי: prob. argument

לוקחים דגימה אקראית R מתוך L, ניתן לעשות בכל מיני שיטות.
מיכה אוהב לבחור כל קו באופן בלתי תלוי בהסתב' p.

אם כן, תוחלת כמות הקווים שנבחר היא: $E(|R|) = np \triangleq r$

אפשר גם לדגום subsets של r קווים, כל אחד בהסתב' $\frac{1}{\binom{n}{r}}$, אבל
זה קצת מסובך.

מה ניתן לומר על $A(R)$:

נסתכל על הקדקודים ברמה 0: $V_0(R) \le |R|$

$E(V_0(R)) \le np$

ואם נסתכל על כל הקדקודים:

$$E[V_0(R)] = \sum_{\substack{v \text{ ב-}\\ A(L) \text{ של}}} Prob\left[\substack{v \text{ מופיע ב-}A(R)\\ \text{ברמה } 0}\right]$$

$V_0(R)$ - זהו הסכום של כל ה-X_v - משתנה אינדיקטור -1 אם v מופיע ברמה 0 ב-$A(R)$
ואפס אחרת.

$$V_0(R) = \sum_v X_v$$

$l_1, l_2 \in R$

והשאר לא ב-R

אם $level(v)=k$ אז ההסתב' ש-v... היא $p^2(1-p)^k$

לכן, זה בעצם רק גבול בי level ולכן:

$$np \ge E\left[V_0(R)\right] = \sum_{j=0}^{n-2} V_j\, p^2 (1-p)^j$$

רוצים לחשב את $V_{\le k}$. נסמן את זה שלמעלה. מה לגבי חסם תחתון?

$$\ge p^2 \sum_{j=0}^{k} V_j (1-p)^j \ge p^2(1-p)^k \underbrace{\sum_{j=0}^{k} V_j}_{V_{\le k}} = p^2(1-p)^k V_{\le k}$$

$$\Rightarrow V_{\le k} < \frac{pn}{p^2(1-p)^k} = \frac{n}{p(1-p)^k}$$

רוצים למצוא p שממזער את זה. לכן, מקס' של $p(1-p)^k$:

נגזור:

$$(1-p)^k - kp(1-p)^{k-1} = 0 \Rightarrow 1-p = kp \rightarrow p = \frac{1}{k+1}$$

$$\Rightarrow V_{\le k} \le \frac{n(k+1)}{\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^k} = n(k+1)\underbrace{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k}_{\text{שואף ל-}e} \le en(k+1)$$

זאת אומרת שהראנו ש-$V_{\le k}$ (כמות הקודקודים ברמה לכל היותר k) הוא מספר גבול של $O(n\cdot k)$.

ועכשיו הסיפור הוא שכמעט לא השתמשנו בגיאומטריה, ואפשר להכליל את התהליך.

S - קב' של n עצמים. (למשל קווים).

העצמים יוצרים קונפיגורציות (למשל קודקודים)

כל קונפיגורציה נוצרת ע"י מס' קבוע של d עצמים (בדוגמה לעיל $d=2$).

כל קונפיגורציה נמצאת בקונפליקט עם כמה עצמים (בדוגמה לעיל v בקונפליקט עם l אם v נמצאת מעל l)

ה-level (רמה) של קונפיגורציה = # האובייקטים (עצמים) בקונפליקט איתה (לדוגמה, # הקווים מתחת לקודקוד).

V_k = # הקונפיג' ברמה k

$V_{\le k}$ = # " " לכל היותר k.

ולכן:

$$N_{\le k} = O\left((k+1)^d N_0\left(\frac{n}{k+1}\right)\right)$$

$N_0(\frac{n}{k+1})$ הנו חסם עליון על הגודל של N_0 בדגימה רנדומית של $\frac{n}{k+1}$ אובייקט

הוכחה:

כמו קודם. דוגמים כמו קודם ומקבלים $E[|R|] = np$

מסתכלים על קונפיג' ב-R שרמתם 0: $N_0(R) \leq$?? בד"כ גלוי ב-$E[|R|]$ איכשהו

חלק זה הוא הפרטני לכל בעיה, הפונק' של $E[|R|]$.

השאר, ממשיך מילה במילה.

$$N_0(R) = \sum_{configs\ c} X_c \quad \Rightarrow \quad E[N_0(R)] = \sum_c Prob(\text{c מופיעה ב-R ברמה 0})$$

אינדיקטור שאם c בקונפיג' = 1 ...

אם c ברמה j: $prob(p^d(1-p)^j)$

בד"כ אם מישהו נמצא בקונפיג', אז הוא לא חלק מה-d...

$$\Rightarrow E(N_0(R)) = \sum_{j=0}^{n-d} N_j\, p^d(1-p)^j \geq \sum_{j=0}^{k} N_j\, p^d(1-p)^k = N_{\leq k}\, p^d(1-p)^k$$

$$\Rightarrow \boxed{N_{\leq k} \leq \frac{E[N_0(R)]}{p^d(1-p)^k}}$$

ושוב גם נבחר $p \sim \frac{1}{k+1}$, אז אותו סיפור עם שואפה ל-e ומקבלים

$$N_{\leq k} \leq e(k+1)^d E[N_0(R)]$$

על מנת לקבל משהו משמעותי, צריך חסם עליון משובח על $E[N_0(R)]$.

כמה דוגמאות:

* n מישורים בתלת מימד. $= H$

מקבלים $A(H)$, קדקדים, והרמה היא כמות המישורים מתחת לקדקד.

מוגדר ע"י 3 מישורים

$$\Rightarrow N_{\leq k} \leq e(k+1)^3 E(N_0(R))$$

המספר הממוצע של משולשים-קדקדים הם בדיוק אלו שברמה 0,
וראינו בדיוק בנושא הקודם שזה $3n-6$.

$$\Rightarrow \quad N_0(R) \le 3|R|$$

$$E[N_0(R)] \le 3E[|R|] = \frac{3n}{k+1}$$

$$N_{\le k} \le 3en(k+1)^2$$

דוג' דוגמה: פונקציות (עקומות).

$F=(f_1, f_2, \ldots f_n)$

כל f_i מוגדרת ב-R. כל זוג נחתך $\le s$ פעמים.

קדקדים ורמות כמו קודם.

d הוא 2.

אז $N_{\le k} \le e(k+1)^2$

$$N_0(R) \le \lambda_s(|R|)$$

$$E[N_0(R)] \le E(\lambda_s|R|) \sim \lambda_s(E(|R|))$$

אבל לא כל כך ברור כיצד עכשיו להמשיך.

הטריק הוא להשתמש בשיטת הדגימה השנייה, ששם אגב הדגימה גמיש
אותו דבר.

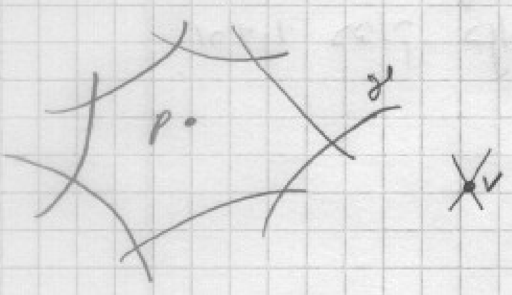
ההסתב' ש-c מופיע ברמה 0, אם $level(c)=j$, ~~אם~~ אם $r=|R|$ קבוע,
אז כמה בחירות יתנו את מה שרצינו (שבהם בוחרים את ה-d האובייקטים
הנחוצים להגדרת הקונפיג'. צריך לבחור עוד $r-d$ אובייקטים מתוך $n-d-j$

$$\frac{\binom{n-d-j}{r-d}}{\binom{n}{r}} \qquad r \approx \frac{n}{k}$$

$$\Rightarrow \quad O\left((k+1)^2 \lambda_s\left(\frac{n}{k+1}\right)\right) \le O(k\lambda_s(n))$$

לסיום עם פסאודו-דיסקים - level יכול להיות בדיוק כמו ~~כמה~~ פ"ד נקודה נמצאת
בפסאודו-הנק' בתוך Φ, היא לא בקונפליקט עם שום פ"ד, מה נקבל אותו
גבול.

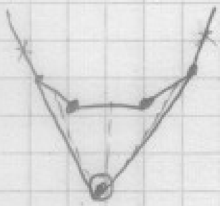
לפעמים קונפליקטים אינם מוגדרים היטב. למשל כמו במקרה של single face.



~~[x]~~ ℓ מסגירה את ה-single face מ-v.
אבל הנק' שבה עקום יהפוך את v לגלוי
מה-single face, אז נגדיר (נשרשם) בה? בעיה.
ובכלל v בי' קרוב ל-single face.
אפשר להחליט באופן מלאכותי מי נמצא בקונפליקט עם v וכו'...

ישנם 2 שימושים חשובים של השיטה.

הסיבה שלומדים את זה בקורס הבסיסי הינה כדי לנתח אלגוריתמים רנדומייזד (אי-דטרמיניסטיים)
נסתכל על זה גם כאן לרגע: אלג' רנדומי אינק' לחישוב CH ב-$\mathbb{R}^3$.
ישנם n נק' $p_1, \dots, p_n$ ומכניסים אותם בסדר אקראי.
שומרים על ה-CH המתאים של הנק' המוכנסות.



הנק' החדשה - אם היא בפנים, אז לא צריך כלום.
אם היא בחוץ, צריך להבין אילו פאות הנק' רואה.

השאלה היא כמה פאות ייווצרו בממוצע?
אפשר להשתמש בקלרקסון-שור בקלות.
אובייקטים = n נק'.
קונפיג' = פאות. במצב כללי $d=3$.
קונפליקט = בין פאה f לנק' p - p נמצא מעל לפאה f (אז הנק' רואה את f)

$$N_{\le k} = O\Big(k^3 \underbrace{N_0\left(\tfrac{n}{k}\right)}_{\le 2\frac{n}{k}}\Big)$$

מסקנות נוסחת אוילר

$$\Rightarrow N_{\le k} = O(nk^2)$$

אבל מה שאכפת לנו הוא כמה פאות ייווצרו בתהליך...
פאה f המוגדרת ע"י a,b,c ובקונפליקט עם j נק'. ~~[x]~~ f מופיעה אם"ם a,b,c
מוכנסות לפני j הנותרות.

$j+3$ נק':

וההסתב' לנק': $\text{prob.} = \frac{3!\,j!}{(j+3)!} = \frac{6}{(j+1)(j+2)(j+3)} \sim O\left(\frac{1}{j^3}\right)$

אם כן, מה שאנו מעוניינים בו הוא: $\sum \frac{N_j}{j^3}$

זו תוחלת # הפאות שנוצרת ע"י האלג'.

אנחנו לא יודעים מה לומר על N_j, כמעט אף פעם, אבל ניתן לכתוב כמתמטיקאי:

$$\sum_i \frac{N_{\le j} - N_{\le j-1}}{j^3} = \sum N_{\le j}\left(\frac{1}{j^3} - \frac{1}{(j+1)^3}\right) = \sum \frac{N_{\le j}}{j^4}$$

ולכן יש לנו חסם ולכן:

$$= O\left(\sum \frac{nj^2}{j^4}\right) = O\left(n\cdot\sum\frac{1}{j^2}\right) = O(n)$$

והאלג' רץ ב-nlogn בתוחלת, בלי שצריך לסמוך על מבנה הנתונים...

קצת על ההבדל בין N_k לבין $N_{\le k}$.

$N_{\le k}$ - יודעים עליו כל מיני דברים מקלרקסון-שור.

N_k - כלום.

למשל, עם קווים ונק' - כמה נק' נמצאות ברמה k, (קודקודים)

החסם העליון הידוע הכי טוב: $O(nk^{1/3})$

התחתון: $\Omega(n\cdot 2^{c\sqrt{\log k}})$

ובמימדים יותר גבוהים, זה אפילו יותר קשה.

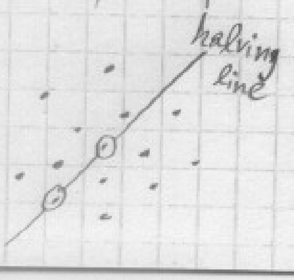
המקרה הכי הכי מעניין וגם בד"כ הכי קשה $k=\frac{n}{2}$.

הבעיה הדואלית לבעיה זו גם כן די מעניינת:

n נק' במישור.

כמה נק' עוברות דרך זוגות של נק' ויש להן בדיוק k נק' מצד

כלשהו (למשל מתחת)



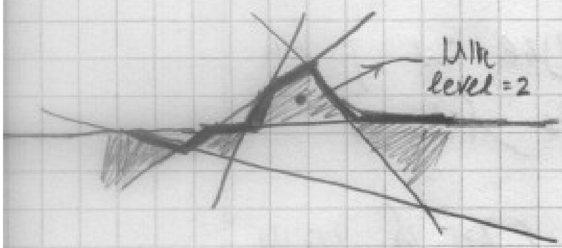
ובכן גם אם הישר לא יחתוך נק', אלא רק

יחלק לכמות שווה של נק' מכל צד.

⇐ כמה תת קבוצות של k נק' יכולות להיות מופרדות ע"י קו.

תת קבוצה כזאת נקראת k-set

והבעיה נקראת k-set prob..



ואם מסתכלים על רמה של נק',

אז גם לכל הפאה יש את אותה רמה

וגם לישר התומך את הפאה, (ורק כמה נק' בדרך, יש ישר תומך נוסף)

וגם אפשר לעבור דרך המחליפים ולראות עוד פאות כאלו.

ראינו פעם, שנוסעים מזרחה, והשאלה כמה פעמים נפנה.

ואם במקום ישרים יש פרבולות וכד', יודעים אפילו פחות.