5.1.09

תכנות ליניארי

נתון אוסף של n אי שוויונות ליניארים במשתנים $x_1,\dots,x_d$

ופונקציית מטרה ליניארית.

מבין כל הפתרונות לאי שוויונות, רוצים להגיע למינימום של פונ' המטרה.

- נניח ש-d הוא קבוע "קטן" ו-n משמעותית גדול.
- n חצאי מרחבים ב-$\mathbb{R}^d$, K - החיתוך שלהם (האזור ה-feasible).

* עבור K:

ריק - בעיית LP (linear programming) לא פיזיבילית

לא חסום ופונ' המטרה לא משיגה מינימום - הבעיה לא חסומה

אחרת - K פאון קמור ויש מינימום בנק' (אולי באינסוף נק').

* בעיה פתוחה:

האם ניתן לפתור בעיית LP בזמן פולינומיאלי חזק?

כלומר ע"י אלגוריתם שזמן ריצתו הוא פולינום ב-n,d בלבד.

* נפתר ב-79 ע"י Khachyan (שיטת האליפסואידים) וב-84 ע"י Karmarkar (שיטת interior point) עבור פולינומיאלי חלש.

* סימפלקס: מגיעים לקדקוד כלשהו של K וממשיכים משם ע"י הליכה על הקשתות של K, לשכנים מקדקוד. ממשיכים עד למינימום.

- נראה שני אלג' בזמן $O(n)$ לפתרון LP עבור d קבוע.

* פתרון ב-2 מימדים, Meggido (83):

האילוצים: $y \ge a_i x + b_i \;\; i\in I_1$, $y \le a_i x + b_i \;\; i\in I_2$, $c \le x \le d$

פונקציית מטרה: min y, עבור פונ' מטרה כללית נסובב את המישור.

ניקח את האילוצים בזוגות, כל זוג שני אילוצים מ-I_1 או שני אילוצים מ-I_2. $\Leftarrow$ ~$\frac{n}{2}$ זוגות ~$\frac{n}{2}$ נק' חיתוך.

x^* - קואורד' x של האופטימום (בהנחה שהוא קיים),

ונניח קיום של ORACLE שעונה לנו על שאלות מהצורה $x ? x^*$

$x_{ij} < x^*$ $\Leftarrow$ אפשר לזרוק את i

$x_{ij} > x^*$ $\Leftarrow$ אפשר לזרוק את j

נקבל $\frac{n}{2}$ ערכי x קריטיים, נחשב את החציון (x_0) ונקרא לאורקל עם x_0.

בכל איטרציה, נזרוק את האילוצים השווים עבור חצי מהזוגות ($\sim\frac{n}{4}$).
עבור כל זוג כאלה נזרוק אילוץ $\Leftarrow$ נזרוק $\sim\frac{n}{4}$ אילוצים.

ההנחה שהאורקל רץ בזמן $O(n)$, נדרשנו ב-$O(n)$ לזרוק $\sim\frac{n}{4}$ אילוצים.
נחזור על התהליך עבור $\sim\frac{3n}{4}$ האילוצים שנשארו עד שישאר מס' קבוע של אילוצים, ואז נפתור ב-brute force.

$$T(n)\le Cn+T\left(\frac{3n}{4}\right) \Rightarrow T(n)=Cn+\frac{3}{4}n+\left(\frac{3}{4}\right)^2n+\dots+O(1)=O(n)$$

- עבור האורקל: אם הוא אומר ש:

$x^*>x_0$ - אם x^* קיים אז הוא גדול מ-x_0, כנ"ל עבור $x^*<x_0$.

$x^*=x_0$ - מצאנו פתרון.

$K=\emptyset$ - אין פתרון.

נראה מה קורה עבור $x=x_0$: $c\le x\le d$

אם $x_0<c$ $\Leftarrow$ $x^*>x_0$

אם $x_0>d$ $\Leftarrow$ $x^*<x_0$

נחתוך את שאר האילוצים עם $x=x_0$.

נחשב את המקסימום של חיתוכי I_1 (y_1) ואת המינימום של חיתוכי I_2 (y_2).

* נניח ש-$y_1\le y_2$ $\Leftarrow$ $K\neq\emptyset$:

נסתכל על y_1 ועל הישרים העוברים דרכו.

א. אם כולם שיפוע חיובי $\Leftarrow$ $x^*<x_0$

כי יש לנו ב-K משמאל ל-x_0 עם ערך y יותר קטן ולא ייתכן שזה גם קורה מימין ל-x_0.

ב. אם כולם שיפוע שלילי $\Leftarrow$ $x^*>x_0$

ג. יש גם חיוביים וגם שליליים $\Leftarrow$ $x^*=x_0$

* נניח ש-$y_1>y_2$ $\Leftarrow$ K לא חותך את $x=x_0$:

נסתכל בכל הישרים שעוברים דרך y_1 ובכל הישרים שעוברים דרך y_2. לכל אחד מהם נחשב את השיפוע המינימלי/מקסימלי ב-y_1 וב-y_2. $k_1^-\le k_1^+$ ב-y_1, $k_2^-\le k_2^+$ ב-y_2

אם $k_1^+\le k_2^-$ $\Leftarrow$ $x^*>x_0$

אם $k_1^- \geq k_2^+ \Rightarrow x_0 < x^*$

לא ייתכן ששניהם יקרו, אלא אם ~~ש~~ שניהם שווים ואז $K=\emptyset$.

אם לא זה ולא זה $\rightarrow K=\emptyset$.

* <u>אלג' רנדומי אינקרמנטלי ל-LP על d:</u>

נוסיף את האילוצים בסדר אקראי, אחד אחד, ונתחזק את הקדקוד האופטימלי לאחר כל הוספה.

נסדר את האילוצים בסדר אקראי $h_1,\dots,h_n$, ונסמן ב-w_i^* את האופטימום אחרי הוספת $h_1,\dots,h_i$.

אם $w_i^* \in h_{i+1}$ אז $w_{i+1}^* \leftarrow w_i^*$

נניח $w_i^* \notin h_{i+1}$, טענה: w_{i+1}^* נמצא על הישר החוסם את h_{i+1}.

הוכחה בשלילה: נניח שלא על הישר החוסם, נחבר את w_i^* ל-w_{i+1}^* בקטע, הקטע חותך את הישר החוסם ונק' החיתוך של הקטע עם הישר יותר טובה מ-w_{i+1}^* $\rightarrow$ סתירה.

נמצא את w_{i+1}^* ע"י פתרון הבעיה במימד אחד שהוא, כלומר על l_{i+1}. כלומר עם האילוצים $h_1 \cap l_{i+1},\dots,h_i \cap l_{i+1}$.

אלו קרניים על l_{i+1} ואת החיתוך ניתן לחשב בזמן ליניארי ולמצוא את הנק' הכי נמוכה בחיתוך. $\Leftarrow$ זמן $O(i)$.

$T(n)$: תוחלת זמן הריצה על n אילוצים.

backward analysis:

נסתכל על המצב אחרי הוספת i האילוצים הראשונים, w_i^* - האופטימום.

ננסה לבטל את ההוספה האחרונה.

נניח מצב כללי: יש שני ישרים בלבד דרך w_i^*.

w_i^* השתנה (לעומת w_{i-1}^*) $\Leftrightarrow$ האילוץ האחרון היה h או h', וזה קורה בהסתברות $\frac{2}{i}$

בהסתברות זו נשקיע $O(i)$ בצעד האחרון, ובהסתברות המשלימה $O(1)$.

$$\Rightarrow T(i) = T(i-1) + \frac{2}{i}O(i) + \left(1-\frac{2}{i}\right)\cdot O(1) = T(i-1) + C \Rightarrow T(n) \leq Cn$$

לגבי חסימות/אי חסימות: נוסיף 2 אילוצים: $x \geq -M$, $y \geq -M$, "$M=\infty$".

כך תמיד תהיה אופטימום נק', שיכולה להיות "וירטואלית".

ב-d מימדים נפעל באופן דומה.

ההבדל הוא שאם $v_i \notin h_{i+1}$ אז v_{i+1} נמצא על המישור h_{i+1}

החוסם את h_{i+1}, ונמצא אותו ע"י פתרון בעיה ב-d-1 מימדים על h_{i+1}

עם האילוצים $h_{i+1}\cap h_1, \dots, h_{i+1}\cap h_i$, $h_1, \dots, h_i$.

$T_d(i)$: תוחלת זמן הריצה על i אילוצים ב-d מימדים.

נראה: $T_d(i) \le C_d \cdot i$

לפי אותו backward analysis:

$$T_d(i) = T_d(i-1) + \frac{d}{i} T_{d-1}(i) + \left(1-\frac{d}{i}\right)\cdot B_d = T_d(i-1) + \underbrace{d\cdot C_{d-1} + B_d}_{C_d \sim d! \sim \left(\frac{d}{e}\right)^d}$$

$$\Rightarrow T_d(i) \le C_d \cdot i$$

* בעיה של [illegible]:

נתונות n נק' במישור.

רוצים למצוא עיגול ברדיוס מינימלי שמכיל אותן.

המשתנים: x, y, r כאשר (x,y) - מרכז העיגול, r - רדיוס

הנק': $P_1(a_1,b_1), \dots, P_n(a_n,b_n)$, רוצים: $\min(r)$

אילוץ i: P_i בתוך העיגול $\Leftarrow$ $(x-a_i)^2+(y-b_i)^2 \le r^2$

$$\underbrace{(x^2+y^2-r^2)}_{z} - 2a_i x - 2b_i y + a_i^2 + b_i^2 \le 0$$

$$\Rightarrow \quad z \le 2a_i x + 2b_i y - (a_i^2+b_i^2)$$

$$\min(r) = \min(r^2) = \min(x^2+y^2-z)$$

$F(x,y,z) = x^2+y^2-z$ פונק' קמורה