פתרון (מקוצר) לתרגיל מס' 4 באופטימיזציה גאומטרית

*** הפתרונות המוצגים כאן נועדו לתת קווים מנחים לפתרון, אם כי הם בכל זאת מפורטים במידת מה. יש לציין כי במבחן או בהגשה של תרגיל, לעיתים יש לפרט/לנמק מעט יותר.**

1. (a) כדי לפתור את ה-1-mean יש לגזור את הפונקציה $\sum_{i=1}^{n}\|p_i - c\|^2$ ולהשוות ל-0.

מקבלים פתרון בנקודה $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i$.

כדי לפתור את ה-2-mean נסתכל על האנך האמצעי שבין 2 נקודות הפתרון האופטימלי ונשים לב שהוא מחלק את המישור ל2 תתי קבוצות כך שעבור כל תת קבוצה המינימום מתקבל באמצעות נקודת הפתרון המתאימה. נקודת פתרון זו היא ה- 1-mean של תת הקבוצה המתאימה. לכן נרצה לעבור על כל החלוקות האפשריות ל2 תתי קבוצות ע"י ישר מפריד ולכל חלוקה לחשב את ה-mean 1 עבור תת קבוצה אחת ואת ה-1-mean עבור תת קבוצה שניה ולקחת את המינימום מבין החלוקות האפשריות. לצורך כך נבנה את מערך הישרים הדואליים לנקודות הקלט. כל תא במערך מתאים לישר מפריד. הישרים שמעל התא מתאימים לנקודות של תת קבוצה אחת והישרים שמתחת לתא מתאימים לנקודות של תת קבוצה שניה. נתחיל מתא מסוים במערך ונחשב 1-mean עבור כל אחד משני תתי הקבוצות המתאימים לו. כעת נעבור מתא לתא שכן במערך כך שבכל צעד נקודה אחת תעבור מתת קבוצה אחת לתת קבוצה השניה ונעדכן את פתרונות ה-1-mean בזמן קבוע לכל צעד. נבחר את הפתרון האופטימלי מבין הפתרונות שנקבל. סה"כ זמן: $O(n^2 \log n)$.

(b) 1-line mean: קל לראות שאם כיוון הישר ידוע, הפתרון מתקבל בממוצע ההטלות האנכית של הנקודות. ניתן גם לגזור את הפונקציה $\sum_{i=1}^{n}(y_i - (ax_i + b))^2$ ולהשוות ל-0.

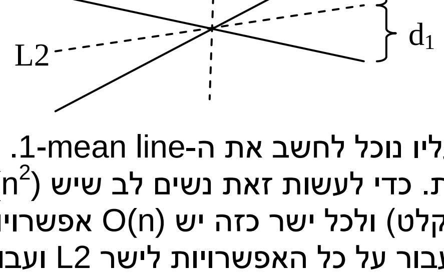
מקבלים 2 משוואות:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = b\sum_{i=1}^{n} x_i + a\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = bn + a\sum_{i=1}^{n} x_i$$

כלומר ערכי a ו-b תלויים בסכומי x^2, x, y ו- xy של נקודות הקלט לכן ניתן לחשב את ה- 1 line mean בזמן לינארי ולעדכנו בזמן קבוע כאשר מתווספת או יורדת נקודה בדומה לסעיף a.

כדי לפתור את בעיית ה-line mean 2 נשים לב שבהינתן 2 ישרי הפתרון ניתן לחלק את המישור לארבעה חלקים ע"י ישר אנכי L1 דרך נקודת החיתוך וישר נוסף L2 (לאו דווקא חוצה זווית כמו בציור כך שבכל חלק של המישור נמצאות כל הנקודות שקרובות יותר לישר פתרון אחד מאשר לשני. נרצה לקחת בחשבון את כל האפשרויות לחלוקה כזו ע"י 2 ישרים. כל שני חלקים נגדיים



בחלוקה כזו מגדירים תת קבוצה של נקודות קלט שעליו נוכל לחשב את ה-line-mean-1. ולבסוף ניקח את החלוקה האופטימלית מבין החלוקות. כדי לעשות זאת נשים לב שיש $O(n^2)$ כיוונים אפשריים לישר כגון L2 (מוגדר ע"י 2 נקודות קלט) ולכל ישר כזה יש O(n) אפשרויות לישר אנכי (כגון L1) (מוגדר ע"י נקודת קלט אחת).נעבור על כל האפשרויות לישר L2 ועבור כל ישר כזה נעבור משמאל לימין על כל הישרים האנכיים האפשריים כך שבכל צעד תעבור נקודה אחת מתת קבוצה אחת לשניה ונעדכן את ה-line mean1 של כל אחד משני תתי הקבוצות שמוגדרות ע"י החלוקה.

סה"כ זמן: $O(n^3 \log n)$

2. אם שני הריבועים המתקבלים עבור הפתרון האופטימאלי של הבעיה זרים אז ניתן להפריד ביניהם ע"י קו ישר (ולכן ניתן להפריד בין P_1 ל-P_2 ע"י ישר). אחרת, נעביר ישר דרך 2 נקודות החיתוך של הריבועים האופטימאליים. הנקודות ששייכות רק לריבוע השמאלי נמצאות משמאל לישר והנקודות ששייכות רק לריבוע הימני נמצאות מימין לישר. את הנקודות ששייכות ל-2 הריבועים נוכל לחלק בין P_1 ל-P_2 כרצוננו - נחלק אותן בין P_1 ל-P_2 ע"פ מיקומן יחסית לישר.
על מנת לפתור את הבעיה המתוארת בשאלה, נעבור למישור הדואלי. נטייל מתא לתא שכן במערך הדואלי כך שבכל צעד נקודה אחת תעבור מ-P_1 ל-P_2 או להיפך. בכל צעד נבדוק מהו שטח הריבוע המכסה את הנקודות הפרימליות של הישרים שמעל התא ומהו שטח הריבוע המכסה את הנקודות הפרימליות של הישרים שמתחת התא. נעשה זאת ע"י תחזוק הקבוצות בצורה ממוינת בשני עצי חיפוש לכל קבוצה (אחד עבור ציר x ואחד עבור ציר y) כך שעדכון (הוספת/הורדת נקודה) יתבצע בזמן O(log n), וחישוב הריבועים המכסים יעשה ע"י מציאת המרחקים בין הנקודות הקיצוניות בציר x והנקודות הקיצוניות בציר y בכל קבוצה.
נקבל אלגוריתם שרץ בזמן $O(n^2 \log n)$.

3. . <u>בעיית ההכרעה:</u> האם ניתן לכסות את P ע"י k קוביות מקבילות לצירים בגודל 1.
במקום פס נגדיר צינור שהוא חיתוך של 4 חצאי מרחבים x>a1, x<b1, y>a2, y<b2.
נתבונן בצינור מינימאלי שמכיל את P, אז או שקיים מישור מאונך לציר z שחותך לכל היותר $k^{2/3}$ קוביות של הפתרון האופטימאלי, או שעובי הצינור הוא לכל היותר $k^{1/3}$ בכיוון x ובכיוון y.
כדי לראות זאת נעביר מישורים מאונכים לציר x בהפרשי גובה של 1. במצב כללי כל קובייה נחתכת רק ע"י מישור אחד. אם קיים מישור שחותך לכל היותר $k^{2/3}$ קוביות סיימנו. אחרת נחזור על התהליך עם מישורים מאונכים לציר y. אם שוב לא סיימנו אז משיקולי ספירה עובי הצינור הוא לכל היותר $k^{1/3}$ בכיוון x ובכיוון y.
כעת נמשיך בדומה לאלגוריתם שראינו בכיתה: אם עובי הצינור הוא לכל היותר $k^{1/3}$ בכיוון x ובכיוון y, נריץ sweep משמאל לימין עם מישור המאונך לציר z ונתחזק אוסף של פתרונות F המקיים שלוש תכונות בדומה לאלו שראינו בכיתה, כאשר קובייה מעוגנת נוגעת בשלוש נקודות. כיוון שיש $O(n^3)$ קוביות מעוגנות ומישור ה-sweep חותך לכל היותר $2k^{2/3}$ קוביות, $|F|=O(n^{6k^{(2/3)}})$.
אחרת ננחש מישור שמחלק את הצינור לשני צינורות ולכל היותר $k^{2/3}$ קוביות שהוא חותך. יש $O(n^{c'k^{(2/3)}})$ ניחושים כאלה. כעת יש לנו תת בעיה בכל צד של המישור הנ"ל, נפתור ברקורסיה ונוודא שהניחוש תקף. נעשה זאת באמצעות תכנות דינאמי כדי לקבל זמן ריצה כולל של $O(n^{ck^{(2/3)}})$.

4. (a) נתאר כיצד לפתור את בעיית ההכרעה עבור בעיית ה-discrete 1-center עבור קבוצת נקודות P. בהינתן רדיוס r, נבנה את חיתוך הדיסקים הדואליים לנקודות ב-P, נעבד את המבנה שנוצר ל-point location למשל. נבדוק בזמן לוגריתמי עבור כל נקודת קלט האם היא נמצאת בחיתוך(כל נקודה כזו היא פתרון). סה"כ זמן: O(n log n).

(b) פתרון בעיית ההכרעה עבור ה-discrete 2-center . לכל נקודת קלט p, נבנה את הדיסק $D_r(p)$ ברדיוס r הממורכז ב-p. נבדוק מיהן הנקודות P' שמחוץ ל-$D_r(p)$ ונבדוק האם יש פתרון לבעיית ההכרעה ה-discrete 1-center עבור P'. סה"כ זמן: $O(n^2 \log n)$.

(c) הערכים הקריטיים של הבעיה הם מרחקים בין זוגות נקודות מ-P. נמיין אותם ונריץ עליהם חיפוש בינארי באמצעות פרוצדורת ההכרעה.
סה"כ זמן ריצת האלגוריתם: $O(n^2 \log^2 n)$.

5. (1) נזיז את הצירים כך ש-c תהיה הראשית. אז $\mu = \sum_{p \in P} \frac{p}{n}$ וע"פ אי שיוויון המשולש נקבל:

$$\sum_{p\in P} d(p,\mu) \le \sum_{p\in P} (d(p,c)+d(\mu,c)) = \sum_{p\in P} d(p,c) + nd\left(\frac{\sum_{p\in P} p}{n}, c\right) \le \sum_{p\in P} d(p,c) + \sum_{p\in P} d(p,c)$$

(2) כדי למצוא 2-קירוב לבעיית ה-1-median, נחשב את מרכז המסה בזמן לינארי ב-n, ונחזיר אותו כפתרון.

כדי לקבל קירוב לבעיית ה-2-median נבנה את מערך העל מישורים הדואליים לנקודות הקלט, ונעבור מתא לתא על מנת למצוא על מישור פרימלי מפריד שיחלק את הנקודות ל-2 קבוצות. לכל קבוצה נמצא קירוב עבור ה-1-median שלה ונחזיר את הפתרון הטוב ביותר המתקבל.