נניח ש- $\frac{Q(n)}{n^c}$ עולה לאיפשהו $c>0$, ו- $\frac{P(n)}{n^{1+c_1}}$ כנ"ל (כלומר מראש זמן השאילתה הוא יותר מלוגריתמי...)

איך עושים חלוקה לשתי קבוצות? קל. פשוט נחלק ל-2 קב' בגודל $n/2$, נקבל נגיד את הקטע הקרוב ביותר והתשובה תהיה, הקרובה מבין השניים.

אם כן, $P = P_1 \cup P_2$ $(|P_2|=|P_1|=\frac{n}{2})$. כעת $P'(n)$ ו-$Q'(n)$:

* $Q'(n)=O(Q(n))$ זמן השאילתה עבור ray shooting. עבור segment intersection

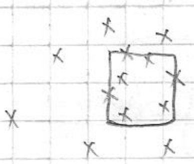
* $P'(n)=2P'(\frac{n}{2})+O(P(n)) \Leftarrow P'(n)=O(P(n))$ וזה בגלל שהנחנו שהוא סופר-לינארי. אחרת היינו מוסיפים איזה log

הכנת המבנה של seg.int. עבור P_1 ו- P_2.

הרצאה (4)

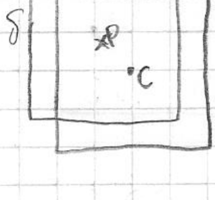
נמשיך עם השיטה של צ'אן, ונראה כמה דוגמאות נוספות.

בעיה: נתונות n נק' במישור ופרמטר $n \geq k$. רוצים למצוא ריבוע מינימלי מקביל לצירים שמכיל k נק'.



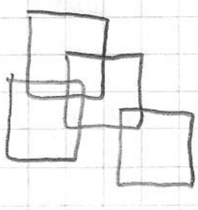
בעיית הכרעה: בהינתן ℓ, האם קיים ריבוע שגודל צלע שלו היא ℓ, שמכיל k נק'?

במקום להסתכל על ריבוע אחד עם נקודות, נבנה ריבועים רבים, ממורכזים בנק' שמייצגות אותם, והצלע גם ℓ.



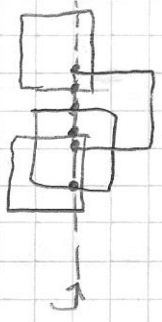
ריבוע בגודל ℓ שמרכזו ב-c מכיל את p $\Leftrightarrow$ הריבוע בגודל ℓ שממורכז ב-p מכיל את c.

$\Leftarrow$ לכל נק' קלט p, נבנה ריבוע בגודל ℓ, ממורכז ב-p ונשאל האם קיימת נק' c המוכלת לפחות ב-k ריבועים?



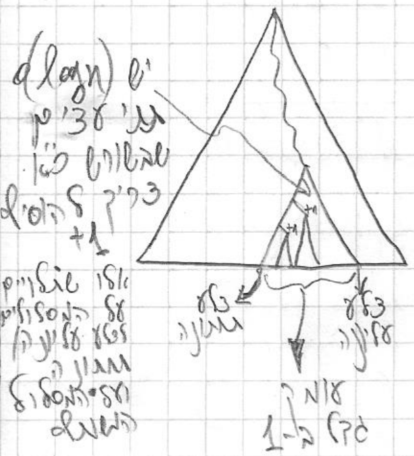
נחפש נק' בעומק מקסימלי, ובעצם מספיק עומק $\geq k$.

נחשב ע"י sweep עם $2n$ אירועים קריטיים: ריבוע נכנס/יוצא מה-y-str.



יש כאן עניין מה"ר שעוזר לנו. כשמכניסים את צלע
הריבוע המסומן משמאל, אז הוא משנה את העומק
בכל מה שהוא חותך עם הצלע הימנית מיידית.
יש $O(n^2)$ חיתוכים, אבל צריך פעם עדכונים. למעשה
העומק גדל בכל התחום שהוא חותך.

והרי ה-y-str הוא עץ. אז שומרים גם גדלי תתי עצים...

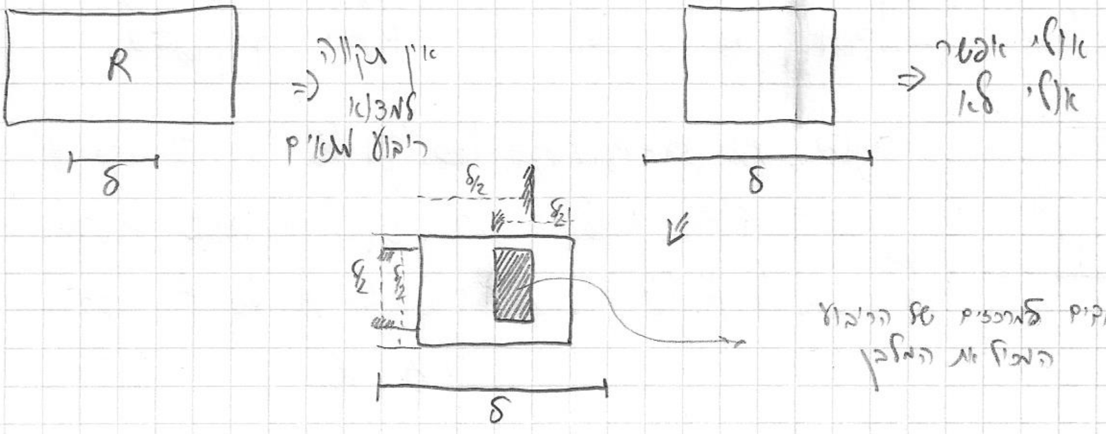


כל צומת יזכור את העומק המקסימלי שרשום
באיפשהו צומת בתוך תת העץ שלו וכן את
העומק שהוא אוגר.

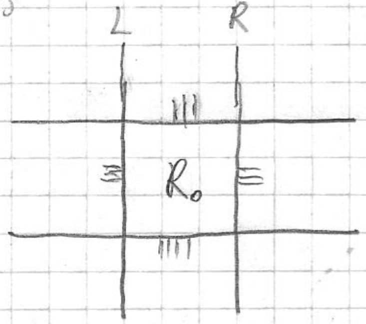
ואז, אפשר לבצע הכנסה/הוצאה ע"י
$O(\log n)$ עדכונים.

הצמתים שצריכים לעדכן את עצמם הם אלו שלאורך המסלול לצלע העליונה,
לאורך המסלול לצלע התחתונה ועל המסלול המשותף להם - שם משתנים
גדלי תתי העצים.

והרי רוצים להשתמש בשיטה של צ'אן.
נכליל את הבעיה: הקלט: P - n נק'
R - מלבן מקביל לצירים
k - פרמטר
ורוצים ריבוע מינימלי שמכיל k נק' של P ומכיל את R.



~ n/5 נק' של P



פירוק:

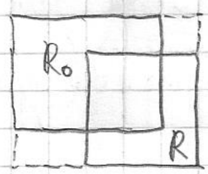
נבנה 2 ישרים אופקיים ושניים אנכיים

כל פעם מזיזים ישר בנק' ה-$n/5$ מלמטה מלמעלה מימין ומשמאל.

כעת ב-R_0 יכולות להיות לכל היותר $4n/5$ נק', אבל חייבות להיות לפחות $n/5$.
$\Rightarrow |P\cap R_0| \geq n/5$

נסמן ב-S^* את הריבוע המינימלי וכו'. 2 מקרים:

(1) S^* לא מכיל את R_0. אז S^* נמצא לגמרי משמאל לצלע הימנית של R_0, או לגמרי מימין מהשמאלית, או לגמרי מעל לתחתונה...
בכל מהמקרים האלה שקבלנו גם בעיה עם תת קב' של P בגודל $\frac{4n}{5}$.
ה-R נשאר וה-k נשאר.



ה-bounding box של שניהם

$R \vee R_0$

(2) S^* מכיל את R_0.
כעת S^* מכיל את כל הנק' שב-R_0 ועליהם לא צריך לחשוב. הבעיה במקרה זה היא עם $P\setminus R_0$ שגודלה $\leq \frac{4n}{5}$, $R\vee R_0$, וכמות הנק' המבוקשת $|P\cap R_0|-k$.

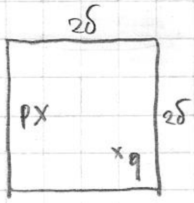
כלומר, יש לנו 5 תתי בעיות, אחת לכל ישר, ואחת נוספת ל-R_0.
ממשיכים את התהליך עם R שהוא הקב' הריקה.

בסה"כ, בתחילות זה יוצא $O(n\log n)$.

עוד בעיה: מרחק האוסדורף מינימלי תחת הזזות במטריקת L_∞.

תזכורת: L_∞ זה: $\|p-q\|_\infty = \max(|p_x-q_x|,|p_y-q_y|)$

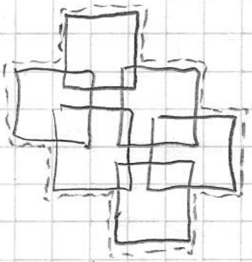
אז $\delta \geq \|p-q\|_\infty$ אמ"מ ריבוע שמרכזו ב-p וגודלו 2δ מכיל את q ולהפך.



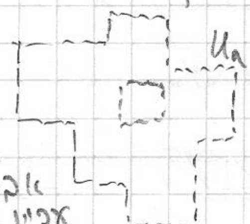
יש לנו 2 קב' של נק' כמו קודם $n=|B|=|A|$. פונק' ההכרעה בזמן $O(n\log^2 n)$. רוצים לבדוק האם קיימת הזזה + של A שמביאה כל נק' של A למרחק $\leq \delta$, מאיזושהי נק' של B?

סביב כל נק' b של B, נבנה ריבוע $S_\delta(b)$ = ממורכז ב-b וגודלו 2δ.
ועושים מה שעשינו פעם שעברה רק שהפעם ריבועים במקום מעגלים וזה
הרבה יותר נוח.

האיחוד: $U = \bigcup_{b\in B} S_\delta(b)$



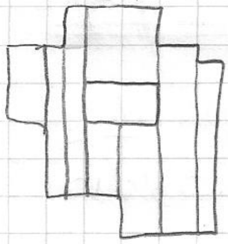
כאן אפילו יותר קל לראות שהאיחוד הוא לינארי.
הסיבה: ברגע שצלע נכנסת לריבוע, היא כבר
לא תצא. במילים אחרות: כל צלע משתתפת באיחוד רק פעם אחת (לכל היותר).



עלולים להיות חורים, אבל אין מה. עדיין הטענה נכונה: כל צלע, פעם אחת לכל היותר.

כמו קודם, נגדיר את ההזזה של U, בכ"א מנק' A,
$U_a = U - a$, נחשב את החיתוך של כולם $K = \bigcap_{a\in A} U_A$
ונבדוק האם החיתוך לא ריק.
$\Leftarrow$ נחשב האם העומק של כל הצורות הללו
(מוזזות כ"א בהתאם) באיזור מסוים הוא n.

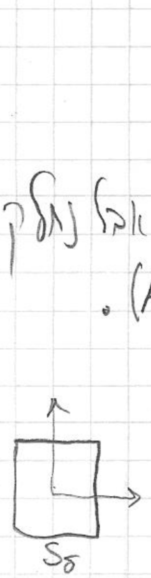
נפרק כל U_a למלבנים זרים מקבילים לצירים. זה קל (ע"י sweep ?).
מקבלים מכל U_a - $O(n)$ מלבנים.



אז יש לנו $O(n^2)$ מלבנים מקבילים לצירים, ורוצים
נק' בעומק n, באוסף $\{U_a\}$.

בזה מטפלים כמו קודם, עם עומקים של ע"י עצים עם sweep: $O(n^2\log n)$.
מעולה! פרוצ' הכרעה ב-$O(n^2\log n)$.

איך <u>מפרקים</u>?
פירוק: נשאר עם הנק' המקוריות.
S_δ = ריבוע בגודל 2δ סביב הראשית.
נבנה את הקב' $B-A = \{b-a \mid b\in B, a\in A\}$. יש כאן n^2 נק', אבל נחלק
לנק' n צבעים. לנק' b-a ניתן צבע a (n צבעים, לפי נק' A).

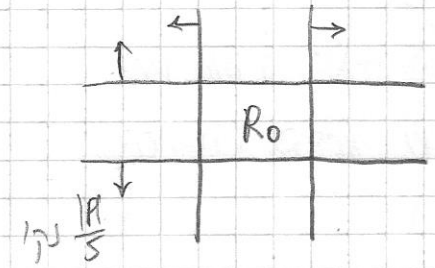


<u>המטרה</u>: למצוא הזזה של S_δ שמכילה נק' מכל צבע.
$$d_\infty(b-a,t)\le\delta \equiv d_\infty(b,a+t)\le\delta$$
שזה שקול לכך ש-$a+t$ נמצא במרחק $\le\delta$ מאחת הנק' של B.

S_δ

האופטימיזציה: למצוא ריבוע מינימלי (מקביל לצירים) שיכיל את כל הצבעים.

באופן כללי יש לנו קב' שצבועה ב-n צבעים ונחפש ריבוע מינימלי שיכיל מלבן נתון R לפחות k צבעים.



הפירוק זהה לפירוק הקודם

5 תת בעיות. ב-4 מהן S^* מוטל בצד אחד של אחד הישרים ← גודל הקב' יורד ל-$\frac{4|P|}{5}$. בחמישית S^* מכיל את R_0. הקבוצה היא $P \setminus R_0$ בגודל $\le \frac{4|P|}{5}$, המלבן הוא $R \vee R_0$ והצבעים: מקבלים את כל הצבעים של R_0 במתנה. נראה אילו צבעים יש שם, ונמחק אותם ואת הנק' של P בצבעים אלו. $k' = k$ פחות מס' הצבעים ב-R_0.

⇐ מקבלים אלג' שרץ ב-$O(n^2\log n)$ בתוחלת.

מספיק עם שיטה זו. הבה נראה עוד שיטה אלגנטית לחיפוש פרמטרי:

שיטות: 1. חיפוש פרמטרי 2. גישה הסתברותית 3. כיוון 4→

חיפוש במטריצות מונוטוניות

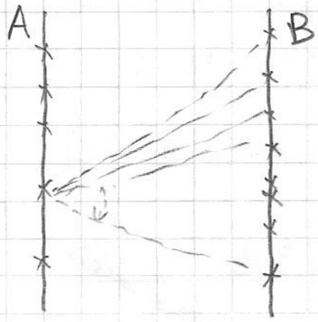
הנחה: הערכים הקריטיים שביניהם מסתתר האופטימום x^* מסודרים במטריצה n×n.

(לכן, השיטה כמובן שימושית רק אם פרוצ' ההכרעה עובדת בפחות מזמן ריבועי).

כמו כן: המטריצה מונוטונית: בכל שורה ובכל עמודה האיברים בסדר עולה.
כלומר אם $M = M_{ij}$ אז לכל i,j: $M_{ij} \le M_{i,j+1}$

$M_{ij} \le M_{i+1,j}$

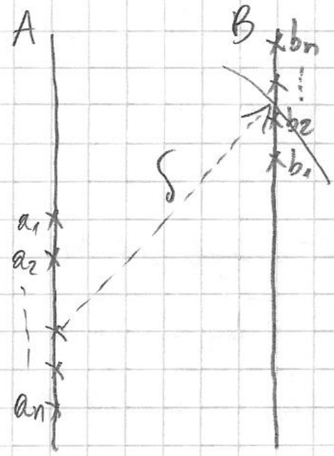
הנה בעיה קלאסית שבה זה המצב:



נתון פרמטר $k \le n^2$ ורוצים למצוא את המרחק ה-k בגודלו בין נק' מ-A לנק' מ-B.

למעשה יש כאן מרחקים שיורדים ויורדים עד לנק' מסוימת ואז עולים ועולים (אלו שמצוירים בשמאל).

יש טריק פשוט שאינו מסבך את העניין: לשים את כל הנק' של A
שמאל לכל הנק' של B.



$\Rightarrow M_{ij} = d(a_i, b_j)$

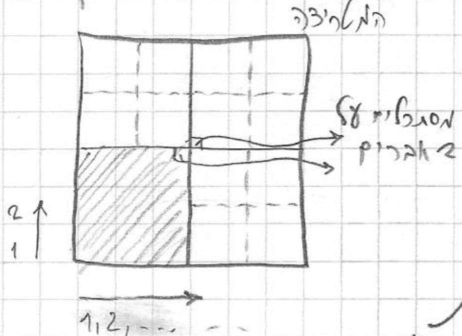
אפשר לקחת מרחק אוקלידי או פשוט מרחק על ציר y כי המרחק על ציר x תמיד אותו פקטור קבוע בבעיה זו.

<u>פרוצ' הכרעה:</u>

בהנתן ℓ, כמה זוגות במרחק $\geq \ell$.
לכל נק', בונים "מעגל" ורואים היכן הוא חותך את הישר השני. כך יודעים מהן הנק' שמתחת ומי יותר קרוב מ-ℓ.
במילים של מיכה: כל נק' מ-A מוצאת את ה-prefix של נק' B שמרחקן $\geq \ell$ ממנה, ע"י חיפוש בינארי $\Rightarrow O(n\log n)$.

אם פונק' ההכרעה עולה $D(n)$, אז חיפוש במטריצה אחר x^* יקח זמן $O(D(n)\log n + n)$.

כיצד? הטריק הוא לפרק את המטריצה לתתי מטריצות בגודל הולך וקטן.



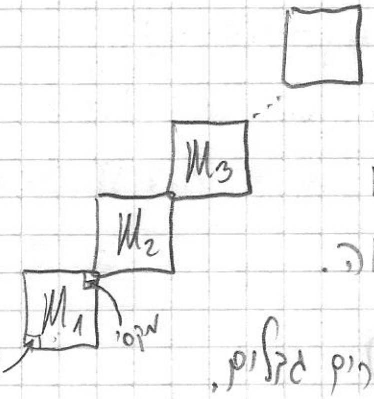
בכל שלב נפטרים ממטריצה אחת וממשיכים עם הנותרות...
בכל שלב יהיה אוסף של תתי מטריצות באותו גודל. כל נפרק ל-4 תתי מטריצות מחצי הגודל ונפטור להעיף בערך $\frac{1}{2}$ מהמטריצות.

נניח שאני מתחיל עם $n=2^k$. בסוף נשאר עם מטריצות סינגלטון (כלומר 1x1) אבל מספרן יהיה $\sim n$. אז, יהיו לנו רק n ערכים קריטיים, וע"י חיפוש בינארי ביניהם נמצא את x^*.

בכל שלב אפשר לסמן את המטריצות שנמצאו באלכסונים:

אם כרגע יש מטריצות בגודל $2^{k-i}\times 2^{k-i}$ בשלב ה-i, אז יש $2^{i+1}-1$ אלכסונים.

1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6
4	5	6	7



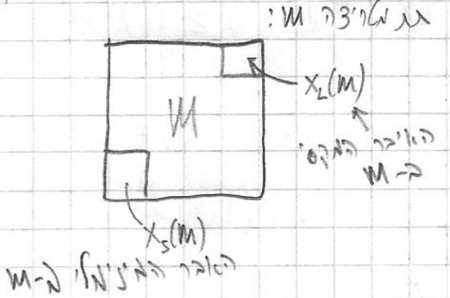
באלכסון שכזה ←
כל איברי M_1 < כל איברי M_2
< כל איברי M_3 וכן הלאה.

בכלל, ככל שהולכים ימינה ולמעלה, האיברים גדלים.

באלכסון יש סדר מלא אבל מחוץ לאלכסון, לא ברור מה הולך.

אז שוב, השלב ה-i נגמר עם מטריצות בגודל $2^{k-i}\times 2^{k-i}$ שמספרן $B_i \le 2^{i+2}-1$.
נחלק כל מטריצה ל-4 ונקבל $4B_i$ מטריצות, ונרצה לפסול חצי מהן, וכך בשלב הבא יהיו $\sim 2B_i$ מטריצות.

לכל מטריצה M:



נחשב לכל מטריצה $X_S(M)$ ו-$X_L(M)$. (small, large)
לאחר מכן נחשב את החציון של כל האיברים המינימליים X_S וכל האיברים המקס' X_L. נמקם את x^* ביניהם, ע"י 2 קריאות לפונק' ההכרעה.
או ש-x^* ביניהם או שהוא קטן מ-X_S או גדול מ-X_L.

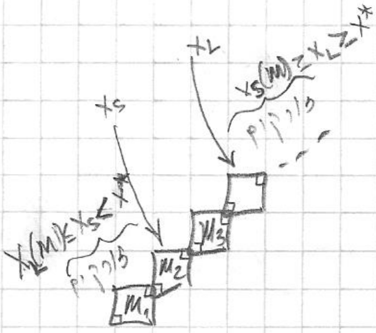
<u>אפשרות 1</u>: $\underbrace{x^* < X_S} < X_L$

← חצי מהמטריצות $\overbrace{X_S(M) \ge X_S > x^*}^{\text{מתקיים}}$ ונעיף אותן.
נשאיר את בכדי לא לאבד את X_S במקרה של אי שוויונים חלשים (לא קריטי).

נשארנו עם $2B_{i+1} \le 2(2^{i+2}-1)+1 \le 2^{i+3}-1$

<u>אפשרות 2</u>: $X_S < X_L \le x^*$: כנ"ל. נעיף חצי מהמטריצות עבורן $X_L(M) \le X_L$. נשאיר את
ליגר באותן, ואותו נסים.

המקרה המעניין ↙



אפשרות 3: $X_S \le X^* \le X_L$

נסתכל על המטריצות באלכסון מסוים.

$$X_S(M_1) \le X_L(M_1) \le X_S(M_2) \le X_L(M_2) \le \dots$$

כמה מטריצות זורקים?

בסה"כ יש $2B_i$ מטריצות שמקיימות: $X_S(M) \le X_S$. מעין באלכסון שלנו, אולם כל המטריצות הנמוכות יותר שזרקנו חוץ מאולי זו שמכילה את X_S, במובן ש- $X_S(M) \le X_S \le X_L(M)$. ⇐ בכל אלכסון, נשארת לכל היותר אחת מהמטריצות האלה.

מס' האלכסונים הוא $2^{i+2}-1$. כלומר, זרקנו לפחות $2B_i-2^{i+2}+1$.

באופן סימטרי, מתוך $2B_i$ המטריצות המקיימות $X_L(M) \ge X_L$ השארנו לכל היותר אחת בכל אלכסון, ולכן זרקנו לפחות $2B_i-2^{i+2}+1$.

⇐ סה"כ זרקנו $2(2B_i-2^{i+2}+1)$ ולכן נשארנו עם $\le 4B_i-2(2B_i-2^{i+2}+1)$

$$2^{i+3}-2 < 2^{i+3}-1$$

אם כן, בכל שלב יש 2 קריאות לפונק' ההכרעה + זמן לינארי במס' המטריצות אבל $2^{i+2}-1$ זה קטן ממה שיהיה בשלב האחרון כלומר:

$$2^{i+2}-1 \le 2^{k+2}-1 = 4n-1$$

לכן אף פעם אין יותר מ- $4n-1$ מטריצות (כלומר בכל שלב).

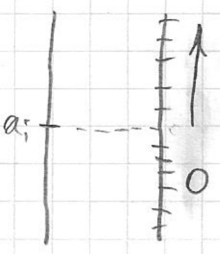
בגלל שכמות המטריצות היא טור גיאומטרי (מכפילים בכל שלב) ובסוף יש $O(n)$

סה"כ נקבל בכל התהליך בזמן $O(\overbrace{D(n)\log n}^{\text{כמות איטרציות של מיון}} + n)$.

להשלמת העניין, נחזור לדוגמה עם ה- Distance Selection המימדית.

כרגע נקבל אלג' שרץ ב- $O(n^2\log n)$.

במקרה הכללי, ללא הנחת המיקום של נק' A לעומת נק' B, נבנה 2 מטריצות M^+, M^-:



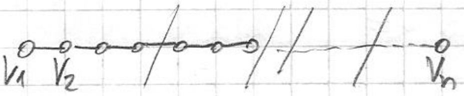
$$M^-_{ij} = \begin{cases} d(a_i, b_j) & \text{אם } a_i \text{ מעל ל-} b_j \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$M^+_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{אם } a_i \text{ מעל ל-} b_j \\ d(a_i, b_j) & \text{אחרת} \end{cases}$$

מבצעים את החיפוש בשניהם. באחת מהן נמצא ובאחת לא.

פונק' ההכרעה פעם אומרת קטן מ- או גדול מ- ובאחר שווה מכריעה בינגו.
*x מופיע באחת המטריצות אבל גם אם לא, באחת מהמט' נמצא ובשניה לא.

הטכניקה הבאה היא של זוג אנשים עתיקים Fredrickson-Johnson.
הם פתחו התעניינו בגיאומטריה, ופתרו במאמר שלהם את הבעיה הנחמדה הבאה:



בעיה: נתון גרף (במקרה עץ).
n קדקודים, לכל אחד יש משקל חיובי.
(להסיר)
רוצים לחתוך k-1 קשתות כך שהמשקל המינימלי של תתי המסלולים (שישארו קשירים) שישאר יהיה מקסימלי.

פונק' ההכרעה: בהינתן $\delta>0$, נסמן $F(\delta)$ = מס' מקסימלי של תתי מסלולים זרים, שמשקל כל אחד מהם $\geq \delta$. למצוא δ מקס' שמקיים $F(\delta)\geq k$.
למשל אם $\delta=5$, רוצים לחלק לכמה שיותר חלקים שמשקל כל אחד הוא 5.

מחשב $F(\delta)$ בזמן לינארי ע"י מעבר משמאל לימין וחיתוך כל פעם שמגיעים למשקל מעבר δ. הכי כדאי לחתוך כמה שיותר מוקדם. אין סיבה לדחות את החיתוך.

נבנה מטריצה M כך ש- M_{ij}:

$$M_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=i}^{j} w(v_k) & i \leq j \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

מה שקורה שאם j גדל (i-קבוע) אז M_{ij} גדל, אבל אם i גדל (j-קבוע) אז M_{ij} קטן! לכן, צריך להפוך את סדר השורות. למעשה אפשר גם לא לעשות את זה ופשוט באלג' הזה יעבוד אותו דבר רק לשים לב לכל מיני סימני אי שוויונים.

כדי שיהיו את איברי המטריצה ביעילות, נוכל לבנות כל איבר שנרצה אם נכין מראש את כל ה- $\sum_{k=1}^{i} w(k)$ ואז האיברים הם $\sum_{k=1}^{j} w(v_k) - \sum_{k=1}^{i} w(v_k)$. וכך במקום log אפשר ב-$O(1)$ לגשת לאיבר?