

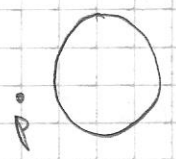
$w(F) \leq w(G) \leftarrow F \subseteq G$  : מונוטוניות

דוגמה: גודל התבונה המקינה שיש לקבוע בהיכרותה היא נכונה

העצם מתיקן SEB. נכון:

$w(G \cup \{p\}) > w(G)$  ז"כ.  $w(F) = w(G), F \subseteq G$

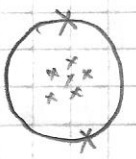
$\downarrow$  "  $w(F \cup \{p\}) > w(F)$



טוב אם  $p$  נמצא ממש מקינה של  $F$ , אז היא גם מקינה של  $G$  של  $G$ , בשל מתיקן של התבונה (ה-SEB)

$w(B) > w(B')$

מהו אורך הבסיס כגון? הוא יכול להיות 2.



הבסיס ב-2 מקינים הוא 3 על הישר. אז יש היבד.

נק' זו שטח המעטף, אכן 3 מקינים של מעטף הוא 3 מקינים יקומו בסיס. צריך 2 ומתקבלות זקן.

ב- $d$  מקינים, צריך  $d+1$  נק', שלו כגון נמצא קבוא 3 מקינים. אכן אורך הבסיס הוא  $d+1 \leq \text{אורך הבסיס} \leq 2d$

ואכן הבקיה לא רלוונטית בסיס.

\* violation-test - קל לעשות ב- $d$  סים.

\* basis(B, p) - בעזרה לא בטוחה:  $(2^d)$  באופן זקוף, אלא אם כן הפתרון עשוי להיות אפס, אפס עשוי להיות עם אורך כמה לביקש נוספים.

$\leftarrow$  אפיה יש פתרון במתן: (מקור):  $(d^2n + 4^d)$

שזה אכן נמצא - עינאי ב- $n$ ! ואפשר לחזק במתן  $d - \approx e^{(d \log d)}$  אג הוכיח הנל.

הכרזה (8)

משלימים עוק קצת היבד עם צ"מ LP-Type.

מינה מוצר קצת על היבד, מנוסחיות לוקיות, בסיס, והלמה היא למצוא בסיס  $B$  עם  $H$  ( $w(B) = w(H)$ ). עכשיו יש גם את המצב הקומבינטוריו של

2 העצם הפרימטיבית: violation-test, ואלו היתוליות בסיס.

הנשגה של תורת-בסיס ע"י משנה באלמן מהג' או ה'י"ט, אבל יכול  
 להשיג וממנה עם הסיוע הבריטני, היה ונקרא Basis-reduction  
 הוא עם הישר  $\geq$  אולימפיקים.  
 מצד שני, אם כן מה שרובים זה יאלץ לצייר ב-ח, אבל זה לא ממש  
 משנה.

כבר אומרו שהולך הקדמים עתקים מילה במילה כתוב האהל.  
 עכ"ל זל, זל, אין ממש עתיתים בסיס.  
 עכ"ל SUBEX, יש משה, ע"ש בנסח הסיטה.

יש איזו קמבנה לאשר להכריח את הבסיסים להיות באלו, כשהבניה  
 זה תורת בסיס... קצת עובדים על הבניה בעצ"ם או משהו:  
 באופן פורמלי יגיד:

לשקור ערך מדויק  $w^*(\theta) = \begin{cases} -\infty & w(\theta) < -\infty \\ \min(\theta, w(\theta)) & \text{אחרת} \end{cases}$  והספיר לקסיקלית או הולמית.

אם  $B$  בסיס, ובדיו קין  $n-\delta$ , נניח ע"י  $w$  איברים בלשה  $B^*$ .  
 $B^*$  ע"י בסיס, אם נניח אולי  $n-\delta$ , אבל אם הוא היה  $n-B$ , אז  $w$   
 ירד שנה תהיה השני  $n-\delta$   $w^*(\theta)$  ויין נניח אולי שהספנו אז  $n-\delta$   $w^*$   
 ירד ויין  $B^*$  בסיס.

אז אם משקים  $(B, h)$  basis, אם ענה יהיה אולי  $\delta$  עבר הולמית  $w^*$ ,  
 בהנחה של  $B$  יש אולי  $\delta$ :

$$w^*(B, h) = (w(B, h), \delta)$$

פירוט אולי ניסו את הבסיס האהל, נראה עם תיבוא...  
 כל זה, בעיקר ניסח הסיטה, שסבב את המילים כפי שניסח הסיטה גרויה  
 נכונה, שנה משקים בניי שיש לנו אולי קבוצ של בסיס.  
 אז נקבעים (מאוננים שמקבילים):

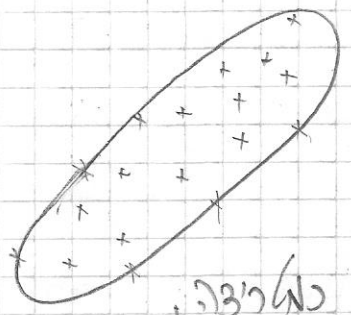
$$e^{(\frac{1}{\epsilon} \delta)} + \delta$$

קריאה לקבואה.

violation-test בד"כ בלטה. גילוב בסיס מדויק - יש ויש...

קוארנטר אלסטר:

# אליפסואיד פון מינימל (נפח) - $\mathbb{R}^d$



יש קב' קטן א נק'.  
העל' פוסטאיו סלנו הוא:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F \leq 0$$

כאשר ה-2 י'ם זה כולל שאפסו לנטוב או זה כאלר'צה,

אבל לו ס נוסרה כטג היו אליפסואיד וקורט'ים שהנ' גרה ו'וביו  
כני שפר ערה אליפסואיד. גע'ע מקאווי'ע'ג הוחס'ני'...  
ואס עבר מ'ק'ים גכ'ה'ים, אל נכטוב אל הע'ים האלר'צ'י':

$$(x \ y \ 1) \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0$$

כמג הנעלמ'ים כאן היא בעצם 6- ס ל מה שמה האלר'צ'יון.

עוד י'מר בעצם, פר'ק יק 5 כי אפסו לעכס'יו אל כולס בקבוט  
ובה ערה <sup>ל'פר</sup> ו'וביו אליפסואיד.

אפסו לפטר אל הערה כמ'ת ע'ני'ן ה- LP-Type. זו בע'ג LP-Type.

כאילו,  $\delta = 5$  ומחמק  $d$ , כמג הנעלמ'ים האלר'צה היא

$$\delta = \binom{d+2}{2} - 1 = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 1 = \frac{d(d+3)}{2}$$

כמג נעלמ'ים  
ק'ס שורה  
ו'וביו 1 כי זה עצם כני קבוט

John : האליפסואיד מחוס בעל נפח מינימל הוא י'מי. לא נוסיו

אק י'ט אל הטוב'ה. (י'מי בחסן שורה הוא הנפח).

וה'י האלר'צ'יו מבל'ט עוק'ים. אס י'ס 2 קבוצה בעלג אלו אליפסואיד  
מינימל, ו'ט נק' שמורה אל החמק אל שמורה אל הע'ן. מוק'אני'ג אפ'יו  
יג'ר בורה.

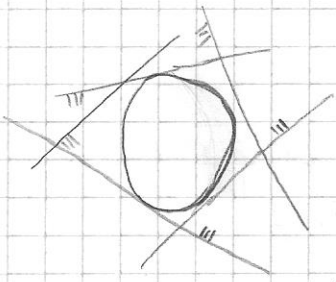
החמק הקואבי'ק'יה קבוט.

הערה לא העוק'ים כס'ים, כמ'עס כקור מוס מינימל, לא כורה  
ס'ה נק' מקב'רת אל האליפסואיד. כאילו, כהנ'ן ע'טן, למצ'ה  
אליפסואיד שורה ק'יכ, אוב' אלו חלפ'סה הימימל'ג גכ'ה'וק ק'ק צ'ג נק'...

והסקנה: יש לנו אלף שמשו במתן עתה ב- $(x, y)$  האופטימלי העילי.

ואז באה "הפכה" קאלור:  
אופטימלי מסוס מקסימלי

מתוכם  $n$  זכאי מתאים ב- $\mathbb{R}^d$ ,  $h_1, h_2, \dots, h_n$   
ורזים למצוא אופטימלי קטן מקסימלי שמשו במתן  
שלהם  $K = h_1 \cap \dots \cap h_n$ , (יכול להיות שו מסוס).



זה שוב יהיה LP-type, והוא קולבניאלי יהיה  $\delta = \frac{d+3}{2}$ .  
אפשר להוכיח שהאופטימלי הוא יחיד (כי אמת מתן יחיד אפשר לקבל אמת יחיד  
קטן). אז נוסח.  $\Leftarrow$  עקבית!

אז, אם התקרה בקטור מסוס מקסימלי, אז בבעיה בע"ג נתון עתה קטן

מתן  $C$  משו מילוי, זה בעל ערכים אג  $C$  בשלמה, מתן:  
שהיא מתן:

$$a_1 x_1 + \dots + a_d x_d \leq a_{d+1}$$
$$\left| \frac{a_1 x_1 + \dots + a_d x_d - a_{d+1}}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_d^2}} \right|$$

שזה מתן של קטן משו מילוי בקרה שלי. אבל אנו זקוקים מה צריך  
ע"מ הסיון של המתן. רזים שהמתן יהיה אובי אז אפשר להסיר  
את הערך המתן, ונראה אם של המתנים יהיו קטנים או שונים לעולם:

$$r \leq \frac{a_1 x_1 + \dots + a_d x_d - a_{d+1}}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_d^2}}$$

זהו אלו אי שוויון עתהיים, וסוף הולכה היא  $\max(r)$ . כאלה:  
 $\Leftrightarrow$  אורזים עתהיים ב- $r, x_1, \dots, x_d$  אורזים  $\max$ .

זה הדיאלוג והדיאלוג הוא מן המסוג של convex programming, שם קד"כ יש  
אורזים עתהיים, ורזים לע"מ פתק מתן קלורה עתהיים.  
בזה כזו היא LP-type. לע"מ במתן הקטן מסוס העתהיים: או מסוסים  
על העתהיים, יש  $r, x_1, \dots, x_d$ , עתה קטן  $p_1, \dots, p_n$

הואלוצים יהיו

$$(x_1 - p_{11})^2 + (x_2 - p_{12})^2 + \dots + (x_d - p_{1d})^2 \leq r^2$$

(עם פונק' מטרה  $\min$ .)

$$(x_1 - p_{11})^2 + (x_2 - p_{12})^2 + \dots + (x_d - p_{1d})^2 \leq r^2$$

אבל אם נבחר את האלוצים קצת נמוך כי  $y = r^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2)$  נובע  
בה השוואה וזה נשפיע.

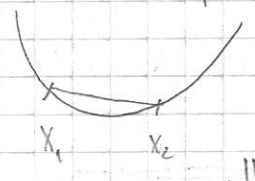
ואז א האלוצים הם עיגולים ב  $y, x_1, \dots, x_d$  אלה פונקציות המטרה  
זכשו היא:

$$\min\{r\} = \min\{r^2\} = \min\{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2 + y\}$$

ואז פונק' קמורה.

~~אם קמורה ככה אפשר קצת לשנות עם הולך של עיגלים (Self)  
בק שאלות עם עגלה מקרה כזה?~~

אם הפונק' היא קמורה וכן (strictly convex), אז הפתרון הוא יחיד.  
כאשר ל-2 ערכים  $x_1$  ו- $x_2$ , יתה ביניהם ערך  
פונק' קטן מכל מהותי האלוצים התוארים ביניהם,  
שהם לא סתומים כך בגמול עיגולי, טאור איש פאון.



ללא הפונק' קמורה וכן, אלא האלוצים היא יחיד.

טאור בע"מ LP-type שכן גמול קמור, זה לא מאוזן מנסים, כי  
זה באמת הפלטה אבולו של גמול עיגולי.

עם בעיג האלוצים הם מהסוג  $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + \dots \leq s$  וכן  
צריך להשגות שפונק' המטרה היא קמורה והיא יחיד כאלו.

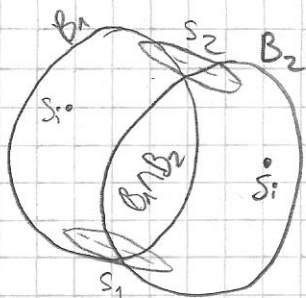
ואבל הנה בעיה קצת שונה, שאלו ניגון בקשת אחר שהיא גמול קמור...

### כזר ממק מניחא

נתנו  $n$  קבוצת קמורה קמפא'  $S_1, S_2, \dots, S_n$  כפי ש  
חזים לעצמא כזר בהיום מניחא שמוק אג כולן.  
בנוסף נקרא ל-  $S_1, \dots, S_n$  הם strictly convex, טאור אין קום שמים כספה מאון  
פומתי א קום שמה' זלע נק' בקבוצה מ'  $S$  בפנים (יקבוצה (מופ מקבוצה).

הערך = הרדיוס

הקב'  $S_1 \dots S_m$  הם האינז'ים.



הכלל האינז'י י'אק. (הוספה, בהכפלה)  
 נניח שבהם חוצים, ויש 2 כקורים.  
 $S_i$  מתאחד או  $B_1, B_2$

כיצד שפסקי האינז'י י'אק, ממה עוקביו ומתאינז'י.  
 אבל מהו המצב הקואנז'ורי? כמה קב' מקיפה בסיס.

אם כן זריק אצמך את השם הבא:  
Helly

אם  $m_1 \dots m_n$  הן  $n$  קבוצת קומט וקומפטיב' ב- $d$  מדימ, כן לכל  $d+1$   
 מהן יש מתק לא ריק, אז עבורן יש מתק לא ריק.

אם כן כמתי שנים, והתוצאה או  $\emptyset$  הישר זה קול, כי הקבוצת בולט  
 אינז'ריות. נראה כי שבת' או זה מוספר של מאוסק. ההוספה של  
 השם היא באנדוקציה על המצב. לא נראה אחר כאלו.

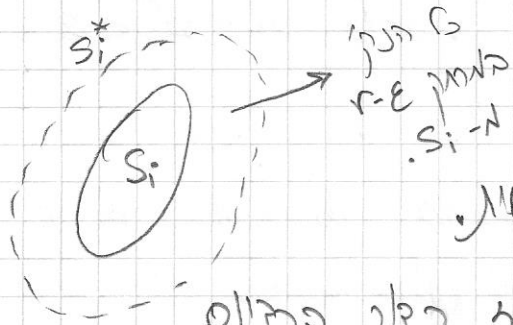


אנחנו זריכים את הכיוון ההפוך:

אם האיג'ק של כולן ריק  $\Leftrightarrow$  קיימת  $d+1$  מהן עם מתק ריק.

כדי להוסיף זוג, נניח ש- $S$  אוסף של קבוצת כאלו  $S_1 \dots S_m$  שמתק  
 הערך הוא  $r$  (עבור האינז'י מתק וג כולן). אז קיים בקור הרדיוס  
 $r-\epsilon$  מתק את כולן.

זריק אחרת אחר כאלו:



$B_{r-\epsilon} =$  כקור הרדיוס  $r-\epsilon$  סביב הנקודה.

אנחנו מנסים את  $S_i$  עם  $B_{r-\epsilon}$  אבל כקור הרדיוס  
 $r-\epsilon$  מתק את  $S_i$  אלא  $S_i^*$  מכיל את  $S_i^*$ .

פונקציה:  $S_i^*$  היא מה שנקראו סכום מתקולק' של  $S_i$  עם  $B_{r-\epsilon}$   
 $S_i \oplus B_{r-\epsilon} = \{ \sum x+y \mid x \in S_i, y \in B_{r-\epsilon} \}$

1-  $S_i^*$  היא קבוצה קטנה כי  $S_i$  קטנה ו-  $B_{\epsilon}$  קטנה ובעל סגור  
 אינקלוסין של 2 קב' קטנה היא קטנה.  
 כמו כן,  $S_i^*$  קומפקט כי  $S_i$  ו-  $B_{\epsilon}$  קומפקטיים.

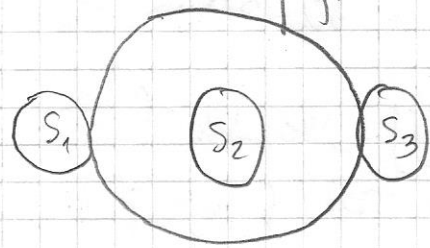
היא ואלו קיים כקנה ברדיוס  $\epsilon$  ש-  $r$  מתק ואם  $\epsilon$  הינו קטן  
 ל-  $\emptyset = \bigcap_{i=1}^n S_i^*$ , מתק של סוף קב'.

הוא נמשך בעלם *Helly*, ונסק שלם קטנה  $S_1, \dots, S_{d+1}$  ו-  $S_i$  עם מתק קב'  
 נאם, "גבן" שלם נאנה אר  $\epsilon$ , קב' 'שמן, אכל כוונה  $\epsilon$  יאל  
 אולם כלם אסויס קב' אר אלה קבוצה (כי 'ט' כמא סופי  
 של אר קבוצה, ובעל שנינו, הוא מתק 'אסויס' הוא קבוצה או מתק.

הקבוצה  $S_1, \dots, S_{d+1}$  היא בסיס!  
 $W(\{S_1, \dots, S_{d+1}\}) = W(\{G\}) = r$

$r - \epsilon < W(\{S_1, \dots, S_{d+1}\}) \leq W(G)$   
 $\epsilon$  קטן  
 $\downarrow$   
 $W(\{S_1, \dots, S_{d+1}\}) = r$

הואם היא שיכיל עתים גם בסיס יתר קב'.



שמש,  $S_2$  מימין בזיוק...  
 טווח זה או יגדלי בסיס, אלא  
 ש'הוא ש'מא  $d+1$ .

אם, כהמון ו-  $d$  קב' זה או בקיוק אלווינו. אוננו קנה אסר  
 מי'מלי. מצד של זה אמאן ע'א י'יה ג'וי ו-  $n$  ו-  $n$  יהיה נאנו  
 מקי. גם violation-test אלו בסיס, כהאד בסיס יתר אכל עדיין  
 או כהאד כיצד אמאן וכיצד נאנו אמאן וכו' (?)

עם המעון יפה יש הפלה של Amenta:

$S_1(\lambda), S_2(\lambda), \dots, S_n(\lambda)$ : שטח קבוצה, שטח גלוייה בהתאם לשינוי  $\lambda$ :  
 כל הקבוצות קמוחה וזקן  $\lambda_1 \leq \lambda_2$  (קמוחה)  $S_1(\lambda) \subseteq S_2(\lambda)$  כל  $\lambda$ :  
 קבוצים  $\bigcap_{i=1}^n S_i(\lambda) \neq \emptyset$  עבור  $\lambda$  מסוים

קודם בצדק היה לנו  $S_i(\lambda) = S_i^*$ , והתאמת ה"ה נוספת  $\lambda - \epsilon = \lambda_0$ :  
 $\hookrightarrow S_i(\lambda) = S_i \oplus B_\epsilon$

כל בעיה LP-Type, שחלקה של מ קבוצה הוא ה-ג האינפיניטי עבורה.  
 גודל הבסיס  $d+1 \geq$  עם אותה הוכחה כמו קודם, ע"י שימוש ב-Helly.

עקרונות:  $F \subseteq G$ ,  $\lambda_F = \lambda_G$ , ו"ש קב' נוספת  $S \notin G$   
 $\lambda_{F \cup S} > \lambda_G$   
 $\lambda_{F \cup S} > \lambda_F$   
 זה מה שבדיקת קמוחה  
 של נוספת בע"ש החלקים

$$S(\lambda) \cap \bigcap_{S_i \in G} S_i(\lambda) = \emptyset$$

כלומר שבדיקת קמוחה

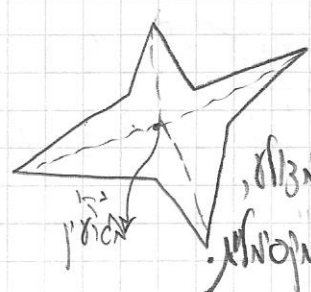
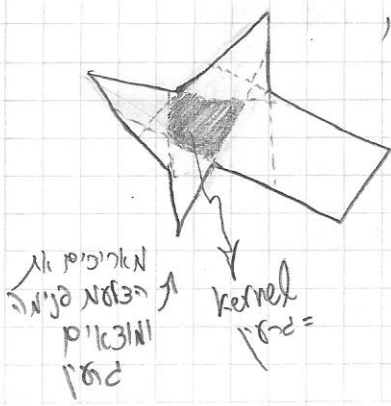
כמיהה שהם שבדיקת קמוחה בה זה קבוצה אחת עם ג מסויים, עקב כך שהיא לא  
 ריקה, עקב כך אולי אולי עם ש-ג האינפיניטי מן נק' (כי היא בה קבוצה  
 זקנה, ומיזן של קבוצים זקנה נמך לשל קבוצה זקנה...)  
 נעלה אולי זה באופן מסודר בעצם הבאה.

היחס קמוחה או להיפך  $\lambda$  הוסיף יהיה בחלק כמו עם ההערה הקודמת.  
 ואם לאשרו קמוחה, ומורה.

בעיה ממוחה

מקום ממוחה בשל  $\text{star-shaped}$ , שומרי יש בטכנולוגיה נק'  
 שרואה את כל שטחו.

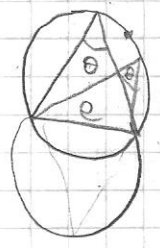
הזבים למצוא נק' P באינפיניטי  
 כך שישו נחמה ונחמה לכל קבוצות הממוחה,  
 המיוג האינפיניטי בין האינפיניטי גובה ממוחה.



אולי ממוחה  
 ממוחה פנימה  
 ממוחה  
 ממוחה



$\theta = \theta$  וזהו כלל  $e$  נקודת קב' כל הנק' שהיא  $e$  וגם כלל  $\theta \leq e$  בהיפוך



בשכיף  $\theta - e$  זווית היקפית על המעגל. בשכיף  $e$  זווית  $\theta$ , בגוף המעגל.

ואם צריך להיות סתם צד אחד, סוף היפוך צריך להיות אור הקודקד בזווית מסוים ולכן יקראו מעגל אחד ... לפי צורך אגודק יא העיגול עם היפוך קב' קאורה = מספר ה' אגודק העיגול  $Se(\theta)$

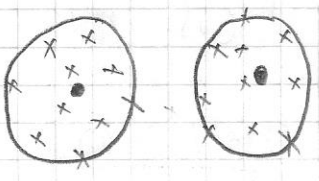
$$\theta_1 \leq \theta_2$$

$$Se(\theta_1) \geq Se(\theta_2)$$

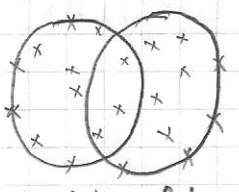
כלל חזים למצוא את  $e$  הנקסיות, לעמוד  $Se(\theta)$  על היקף סוף הנק' הוא את  $e$  הקטנה <sup>(בזווית)</sup> בשל  $e$  פשוט  $\theta$ . אם  $\theta$  קטנה, לא נראה. נראה להבדיל את  $\theta$  עם שבעה את פוס גרמה את הבחנת בזווית בדיוק  $\theta$ . בזווית ה'ניחית' שהיא אחת יתווים את כולם היא נקסיות והנה, יש לך גרין לכה במתן עיגול.

אכסון עכנה דואלית "דעת" (שנסוק בון יורי בהמשך). בע"מ ה- z-center ה'וקעית' ה'יטור.

מאונך את נק' ה'יטור' ורובים למצוא 2 עיגולים שוני רדיוס <sup>ה'ניחית'</sup> ש'יטור' אכסון אכסון את  $e$  הנק'.

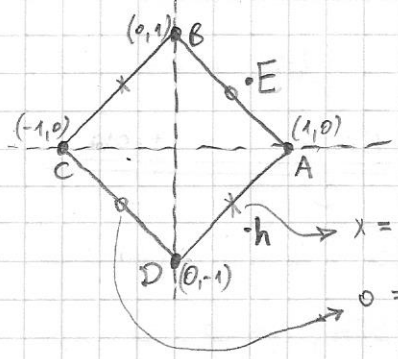


עלש, יש מאו כפחים ארובים עכנה 2 בני אוקוס סוף שמתקן הקודקד ה'יטור'  $e$  קאית' למחבץ 'היה ה'ניחית'.



ה'יטור' שפה מ'ניחית' ... והכל אחת אולי מ'ניחית' און עוקיות כפוחק' של רדיוס. אוק' שהשכנה ככה כאשר יש אספ' ממון שהיא יורי מ'ניחית'. (מחנה או שבה). אכל סתם נעשה לשו' אחת.

(אוקוסים)



$F = \{ABCD\}$

$w(F) = w(G) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$G = \{ABCDE\}$

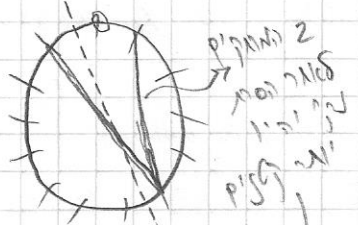
נלקח זוג נחלקים...

$w(F \cup h) = w(F)$

$w(G \cup h) > w(G)$

בקצור איך שנסה גיהי בעימות. תהי עוז קולמה, נחלק עז נק

מבחינת עז היקבו (באופן אחיד).



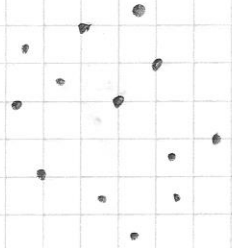
2 מחלקים (באופן אחיד) ...  
2 נקודות הנחלקת המאכלית ...  
2 נקודות הנחלקת המאכלית ...

כל נק' של נחלקים, גלברי או הנתחן

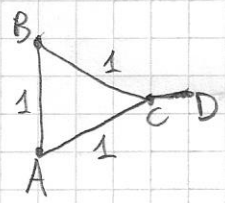
באחר צדדים את ה נתן עברו הבסיס. ומסתבר שאחלקי מסוב מה, גורה שלביק חגלה... נכרה בשביל עבדו.

עוז קולמה, עוז יגרי מסלחה:

Closest Pair



אכאן עס, או שגויה עוקעית והבסיס יהיה לקחו, או שלט גויה עוקעיות.



$\left\{ \begin{array}{l} F = AB, w(F) = w(G) = 1 \\ G = ABC \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} w(F \cup \{CD\}) = 1 \\ w(G \cup \{CD\}) < 1 \end{array} \right.$

אז שוב אפשר ענסת למתכנן, ואתגרי עוז פרמטרים פני שהעוקעיות איכסלה מקיים, אבל אז הבסיס ככה יהיה עז מסופ.

אליה, זו כוונה שיש עז מסק ממנו של (חגלה) ונק עז נצטיו ערביא אמה עמצב של LP-Type.

ואכטיו מינה מושב עז כה מתכנן הבסיס מה מאי 2. ובסורה ממנה, כמה שלטו נמתכ עס הכרת קואורדינט, זא נצטיו...

זה מביא אלנו פונקציה, שכל הפעילות היא:

Facility Location

היה קבוצה S של אובייקטים (אשר נק', ופרמטר א, ונרצה לתקן אל S קבוצה א-ס, כך שכל אובייקט אישה קרוב יותר.

הקואלטה המבוקשת היא k-center:

אמצוא א נק' אשר  $c_1, \dots, c_k$  כך ש-  $\max_{p \in S} [\min_i d(p, c_i)]$  מינימלי.

מתאים ומתח, יש ט קל ט הנק' שבמרחק אג  $c_i$  כמרחב הכי קרוב, ופרמטר ה'א אמצע א המרחק המקסימלי  $\equiv$  אמצע אג S ע"י א ע"י א שונים (אמצע) בדיוק מינימלי.