

סמסטר א', מועד א', תשס"ו  
 תאריך הבחינה: 19.02.2006  
 מספר קורס: 0365-4212

**בחינה בהסתברות מתקדמת**  
 המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3.5 שעות.  
 מותר להשתמש בכל חומר שהו.  
 סה"כ הנקודות הוא 130. רצוי לענות על כל השאלות.

בהצלחה!

**שאלה 1**

=45

נגדיר

$$V_n(r) = 2^{-n} \text{mes}_n \{x \in [-1, 1]^n : |x| < r\}$$

(כאן  $|x|$  נורמה איקלידית,  $\text{mes}_n$  מידת לבג  $n$ -ממדית). יהי  $V_n^{-1}$  פונקציה הפוכה ל- $V_n$ .

1. הוכח או הפרך ש- $V_n^{-1}(0.5) > 0.5\sqrt{n}$  לכל  $n$  מספיק גדול. 15

2. הוכח או הפרך ש- 15

$$\frac{V_n^{-1}(0.75) - V_n^{-1}(0.5)}{V_n^{-1}(0.5) - V_n^{-1}(0.25)} \rightarrow 1$$

כאשר  $n \rightarrow \infty$ .

3. מצא (אם קיים) את 15

$$\left. \frac{d}{dp} \right|_{p=0.5} \lim_{n \rightarrow \infty} (V_n^{-1}(p) - V_n^{-1}(0.5)).$$

רמז: משפט הגבול המרכזי. . .

**שאלה 2**

=25

תהי  $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה הרמונית, כלומר,

$$f(k, l) = \frac{1}{4} (f(k-1, l) + f(k+1, l) + f(k, l-1) + f(k, l+1))$$

לכל  $k, l \in \mathbb{Z}$ .

4. הוכח שאם  $f$  חסומה אז  $f$  קבועה. 25

רמז: הילוך, מרטינגל, עצירה. . .

### שאלה 3

=40

כד מכיל כדורים כחולים ולבנים, בסך-הכול 100 כדורים. פעם ביום מוצאים כדור נבחר באקראי (לפי התפלגות אחידה, ללא תלות בעבר) ושמים במקומו כדור בצבע אחר. יהי  $X_n$  מספר הכדורים הלבנים לאחר  $n$  ימים. נניח ש-  $X_0 = 0$ .

5. הוכח שההתפלגות של  $X_n$  לא שואפת לשום גבול (כאשר  $n \rightarrow \infty$ ), אך ההתפלגות של  $X_{2n}$  שואפת לגבול.

20

6. הוכח שלכל  $k$

20

$$\sup_n \mathbb{P}(X_{2n} \geq k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_{2n} \geq k).$$

רמז: זמן הפגישה. . .

### שאלה 4

=20

יהי  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  מרחב הסתברות,  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}$  שדות- $\sigma$ ,  $\mathcal{F}_\infty$  שדה- $\sigma$  נוצר ע"י  $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \dots$ .

7. הוכח ש-  $L_2(\mathcal{F}_\infty)$  הוא סגור של  $L_2(\mathcal{F}_0) \cup L_2(\mathcal{F}_1) \cup \dots$

20

רמז:  $\{A : \mathbf{1}_A \in \text{closure}(L_2(\mathcal{F}_0) \cup L_2(\mathcal{F}_1) \cup \dots)\}$