סמסטר א', מועד א', תשע"ד
תאריך הבחינה: 26.01.2014
מספר קורס: 0366-2141

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגראלי 3

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סיכום אישי.
בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

שאלה 1

=30

תהי $g \in C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$, $Z_g = \{x : g(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^n$. נגדיר $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\forall x \;\; f(x) = |g(x)|$.

(א) קבוצה $\mathbb{R}^n \setminus Z_g$ היא פתוחה, ו- f גזירה ברציפות ב- $\mathbb{R}^n \setminus Z_g$. הוכיחו.

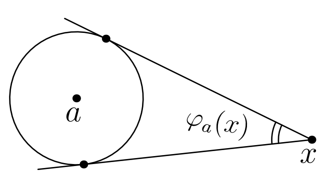
(ב) f לא תמיד גזירה ב- $\mathbb{R}^n$. הוכיחו ע"י דוגמה נגדית.

(ג) הוכיחו או הפריכו: הפונקציה $x \mapsto \big(f(x)\big)^2$ היא גזירה ברציפות ב- $\mathbb{R}^n$.

שאלה 2

=40

יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ ב"ת לינארית, $|a| = 5$, $|b| = 10$. בספרה $S_1(0) = \{x : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ נגדיר פונקציות φ_a, φ_b; $\varphi_a(x)$ שווה לזווית מ- x לספרה $S_1(a) = \{y : |y-a| = 1\}$; כמו כן, $\varphi_b(x)$ שווה לזווית מ- x ל- $S_1(b)$.
הוכיחו כי כל נקודת קיצון מקומית של הפונקציה $\varphi_a + \varphi_b$ ב- $S_1(0)$ היא צירוף לינארי של a, b.



רמז: הראו כי $\sin \frac{1}{2}\varphi_a(x) = 1/|x-a|$; מצאו את הגרדיאנט.

שאלה 3

=30

(א) ${}^*\!\int_B(f+g) \le {}^*\!\int_B f + {}^*\!\int_B g$ לכל פונקציות חסומות f,g בתיבה $B \subset \mathbb{R}^n$. הוכיחו.

. . . .

(ב) יתכן ש־ ${}^*\!\int_B(f+g) \ne {}^*\!\int_B f + {}^*\!\int_B g$. הוכיחו ע"י דוגמה נגדית.

. . . .

(ג) $v^*(E \cup F) \le v^*(E) + v^*(F)$ לכל קבוצות חסומות $E, F \subset \mathbb{R}^n$. הוכיחו.

. . . .

(ד) יתכן ש־ $E \cap F = \emptyset$, $v^*(E \cup F) \ne v^*(E) + v^*(F)$. הוכיחו ע"י דוגמה נגדית.

שאלה 4

=40

נתבונן בקבוצה $E = \{(x,y,z) : 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

(א) מצאו את הנפח של E באמצעות $\int v_2(E^z)\,\mathrm{d}z$.

. . . .

(ב) בעזרת סעיף (א) והשוויון $\int v_2(E^z)\,\mathrm{d}z = \int v_1(E_{x,y})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ מצאו ערך ממוצע של הפונקציה $(x,y) \mapsto 1 - x^2 - y^2$ בעגול $\{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

. . . .

(ג) בדומה לסעיפים (א), (ב) מצאו ערך ממוצע של הפונקציה $x \mapsto |x|^p$ בכדור $\{x : |x| \le 1\} \subset \mathbb{R}^n$ עבור $p \in (0, \infty)$.
