סמסטר א', מועד א' , תשע"ו
תאריך הבחינה: 24.01.2016
מספר קורס: 0366-2180

# בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סיכום אישי.
בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

---

## שאלה 1

=40

(א) נניח כי $\gamma \in C^1\big([0,1] \to \mathbb{R}^3\big)$ היא חד–חד–ערכית, $|\gamma(s)| = 1$, $|\gamma'(s)| > 0$ לכל $s \in [0,1]$; ו– $M = \{(t\gamma(s), t^2) : s,t \in (0,1)\} \subset \mathbb{R}^4$. הוכיחו כי $M$ היא יריעה דו–ממדית, והנפח (דו–ממדי) של $M$ שווה $\frac{5\sqrt{5}-1}{12}L$, כאשר $L$ הוא האורך של המסילה $\gamma$.

.................................................................

(ב) אותו הדבר עבור יריעה תלת–ממדית $M_1 \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ מכוסה במפה אחת, ו– $M = \{(tx, t^2) : x \in M_1,\, t \in (0,1)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. מה המקדם לפני הנפח של $M_1$?

---

## שאלה 2

=40

תהי $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $|f(x)| = o\big(\frac{1}{|x|^{n-1}}\big)$ עבור $|x| \to \infty$.

---

(א) הוכיחו כי $\displaystyle\int_{|x|<R} \nabla f(x)\,\mathrm{d}x \to 0$ עבור $R \to \infty$.

.................................................................

(ב) נגדיר קבוצות $U_1, U_2, \dots$ ע"י

$$U_k = \{x : |x| < k\} \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} \big\{x : \big|x - (i - \tfrac{1}{2})e_1\big| \le \tfrac{1}{3}\big\} \subset \mathbb{R}^n$$

כאשר $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. בהנתן $n \ge 3$, הוכיחו כי $\int_{U_k} \nabla f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס (לגבול סופי) כאשר $k \to \infty$.

## שאלה 3

=40

נתבונן בגליל $C = \{(x,y,z) : x^2+y^2=1, |z|<1\} \subset \mathbb{R}^3$,
ספירה $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=1\} \subset \mathbb{R}^3$ והעתקה $\varphi : C \to S$,
$\varphi(x,y,z) = \left(x\sqrt{1-z^2}, y\sqrt{1-z^2}, z\right)$. תהי $\mu$ תבנית נפח ב-$S$.
הוכיחו כי $\varphi^*\mu$ היא תבנית נפח ב-$C$.

---

## שאלה 4

=40

נתבונן בעיגול $U = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ ופונקציות $f, g \in C^1(\overline{U})$ כך ש-
$f(x) = \big(g(x)\big)^{2015}$ לכל $x \in \partial U$.
הוכיחו כי $\int_U df \wedge dg = 0$.
רמז: $f\,dg$.

---

---