סמסטר א', מועד ב', תשע"ו
תאריך הבחינה: 18.03.2016
מספר קורס: 0366-2180

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סיכום אישי.
בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

שאלה 1

=40

(א) נניח כי $\gamma \in C^1\big([0,1] \to \mathbb{R}^3\big)$ היא חד–חד–ערכית, $|\gamma(s)| = 1$, $|\gamma'(s)| > 0$ לכל $s \in [0,1]$; $a \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; ו–$M = \{(t\gamma(s), t^a) : s,t \in (0,1)\} \subset \mathbb{R}^4$. הוכיחו כי M היא יריעה דו–ממדית (לכל a), והנפח (דו–ממדי) של M הוא סופי אם ורק אם $a > -1$.

....

(ב) אותו הדבר עבור יריעה k–ממדית $M_1 \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ מכוסה במפה אחת, ו– $M = \{(tx, t^a) : x \in M_1, t \in (0,1)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. מתי הנפח סופי?

שאלה 2

=40

תהי $u \in C^3(\mathbb{R}^n)$ פונקציה הרמונית כך ש– $u(x) = o(|x|)$ עבור $|x| \to \infty$.

(א) הוכיחו כי $\nabla u(0) = 0$.

....

(ב) הוכיחו כי u היא קבועה.

רמז: האם $D_1 u, \dots, D_n u$ הרמוניות?

שאלה 3

=40

נתבונן ביריעות חד–ממדיות $M_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $M_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$, תבניות נפח μ_1 ב–M_1, ו– μ_2 ב–M_2, המכפלה $M = M_1 \times M_2 \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ (ידוע לנו כי M היא יריעה דו–ממדית), ההטלות $\varphi_1 : M \to M_1$, $\varphi_2 : M \to M_2$ (כלומר, $\varphi_1(x_1, x_2) = x_1$, $\varphi_2(x_1, x_2) = x_2$), ודו–תבנית $\mu = (\varphi_1^* \mu_1) \wedge (\varphi_2^* \mu_2)$ ב–M; כלומר,

$$\mu(x, h, k) = \begin{vmatrix} (\varphi_1^*\mu_1)(x,h) & (\varphi_1^*\mu_1)(x,k) \\ (\varphi_2^*\mu_2)(x,h) & (\varphi_2^*\mu_2)(x,k) \end{vmatrix}.$$

הוכיחו כי μ היא תבנית נפח ב–M.

שאלה 4

=40

נתבונן בקבוצה

$$M = \{(x, r\cos\theta, r\sin\theta) : \theta = \pi - (r-2)^2 - x^2 > 0\} \subset \mathbb{R}^3 .$$

הוכיחו כי M היא יריעה דו–ממדית, ו–

$$\int_M \frac{dx \wedge (y\,dy + z\,dz)}{\sqrt{y^2+z^2}} = \pi^2 .$$

רמז: $d\sqrt{y^2+z^2}$.