

סמסטר ב', מועד ב', תשס"ט
תאריך הבחינה: 02.09.2009
מספר קורס: 0366-3022

בחינה במבוא לאנליזה פונקציונלית
המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
רצוי לענות על כל השאלות.

בהצלחה!

שאלה 1

הוכחו או הפרכו:
(א) לכל $f \in L_2(\mathbb{R})$,

$$\text{כאשר } \varepsilon \rightarrow 0+ \quad \|f - f * \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{1}_{(0,\varepsilon)}\| \rightarrow 0$$

.....
(ב)

$$\text{כאשר } \varepsilon \rightarrow 0+ \quad \sup_{f: \|f\| \leq 1} \|f - f * \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{1}_{(0,\varepsilon)}\| \rightarrow 0$$

שאלה 2

הוכחו או הפרכו:
(א) לכל $f \in L_2(\mathbb{R})$ קיימת אחת ורק אחת $g \in L_2(\mathbb{R})$ כך ש-

$$3g(x) - g(x-1) - g(x+2) = f(x)$$

כמעט לכל $x \in \mathbb{R}$.

.....
(ב) לכל $f \in L_2(\mathbb{R})$ קיימת אחת ורק אחת $g \in L_2(\mathbb{R})$ כך ש-

$$g(x+1) - g(x) = f(x)$$

כמעט לכל $x \in \mathbb{R}$.
רמז: התמרת פוריה.

שאלה 3

יהי A אופרטור סגור סימטרי, ו- B אופרטור צמוד לעצמו. הוכחו או הפרכו:
(א) אם A מרחיב את B אז $A = B$.

.....
(ב) אם B מרחיב את A אז $A = B$.

שאלה 4

הוכחו או הפרכו:
(א) הגבול

$$T = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\left(x \mapsto \frac{1}{x} \right) \cdot \mathbb{1}_{(\varepsilon, 1)} + (\ln \varepsilon) \cdot \delta_0 \right)$$

קיים ב- $D'_1(-1, 1)$.

.....
(ב) הגבול T קיים, ומקיים

$$(x \mapsto x) \cdot T = \mathbb{1}_{(0, 1)}.$$
