

סמסטר ב', מועד , תשע"א
 תאריך הבחינה: 2011.
 מספר קורס: 0366-3098

בחינה בהסתברות למתמטיקאים
 המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
 מותר להשתמש בדף סיכום אישי.
 בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

שאלה 1

=35

יהי $(S_n)_n$ הילוך מקרי חד-ממדי פשוט. מצאו את רדיוס ההתכנסות של טור החזקות:
 (א) $\sum_n x^n \mathbb{P}(2S_n > n)$;
 (ב) $\sum_n x^n \mathbb{P}(2S_n > n + 100)$.

שאלה 2

=35

יהיו X_1, X_2, \dots מ"מ ב"ת ש"ה, $\mathbb{E}(X_1^4) < \infty$. נגדיר $S_n = X_1 + \dots + X_n$. הוכיחו ש-

$$\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X_1) = O\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)$$

כמעט בטוח.

שאלה 3

=35

נתון המספר $S_0 = 123456789$. יוצרים מספר חדש ע"י החלפה בין שתי ספרות של המספר S_0 , הנבחרות באקראי (עם $\binom{9}{2} = 36$ אפשרויות שוות הסתברות) ומקבלים את S_1 . באותו אופן משנים את S_1 ומקבלים את S_2 וכך הלאה, מקבלים $(S_n)_n$. למשל: $S_1 = 126453789$, $S_2 = 126457389$, ...
 (א) מצא (אם קיים)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n < 222222222) .$$

(ב) יהי $T = \inf\{n > 0 : S_n = S_0\}$; מצא

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^T \mathbf{1}_{(0,222222222)}(S_n)\right) .$$

שאלה 4

=35

יהי $(S_n)_n$ הילוך מקרי דו-ממדי פשוט, ו- $T = \inf\{n : |S_n| \geq 10\}$ (נורמה איקלידית).
הוכיחו ש- $100 \leq \mathbb{E}(T) \leq 121$.
