

סמסטר ב', מועד , תשע"א
תאריך הבחינה: 2011.
מספר קורס: 0366-3098

בחינה בהסתברות למתמטיקאים
המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סיכום אישי.
בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

שאלה 1

=35

מצאו (אם קיים)

$$(א) \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{-n} \text{Vol}_n \{x \in [-1, 2]^n : |x| < \sqrt{n}\} \text{ (נורמה איקלידית);}$$
$$(ב) \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{-n} \text{Vol}_n \{x \in [-1, 2]^n : \sqrt{n} - 1 < |x| < \sqrt{n} + 1\}$$

שאלה 2

=35

יהיו X, Y מ"מ, $|X| \leq 1$ ו- $|Y| \leq 1$ כמעט בטוח, ו- $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$.
הוכיחו ש-

$$\left| \mathbb{E} \left(\sin \frac{X}{2} \right) - \mathbb{E} \left(\sin \frac{Y}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{24}.$$

שאלה 3

=35

יהיו X_1, X_2, \dots מ"מ ב"ת, $X_n \geq 0$ כמעט בטוח, $\mathbb{E}(X_n) < \infty$ ו-
 $\sum_n \mathbb{E}(X_n) = +\infty$.
(א) האם נובע ש- $\sum_n X_n = +\infty$ כמעט בטוח?
(ב) אותו הדבר כאשר נתון גם ש- $X_n \leq 1$ כמעט בטוח לכל n .
רמז ל-(ב): כמו הלמה השניה של Borel-Cantelli.

שאלה 4

=35

הוכיחו קיום של מספרים $c_1, c_2, \dots \in \mathbb{R}$ כך ששני הטורים

$$\sum_n \frac{1}{n} \sin(c_n x), \quad \sum_n \frac{1}{n} \cos(c_n x)$$

מתכנסים

(א) עבור כל x שלם,

(ב) עבור כל x רציונלי.

