

סמסטר ב', מועד דוגמה, תש"ע  
תאריך הבחינה: 2010  
מספר קורס: 0366-3098

בחינה בהסתברות למתמטיקאים  
המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.  
מותר להשתמש בדף סיכום אישי.  
בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

שאלה 1

=35

מצאו:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \cos \frac{x_1^{1/3} + \dots + x_n^{1/3}}{\sqrt{n}} dx_1 \dots dx_n.$$

שאלה 2

=35

יהי  $f_n(x)$  החלק השברי של המספר  $2^{n^2} x$ . מצאו את מידת לבג של הקבוצה  $\{x \in (0, 1) : n f_n(x) \rightarrow \infty\}$ .  
רמז: ספרות בינריות...

שאלה 3

=35

נתונה "מילה"  $X_0 \in \{A, B, C\}^5$  באורך 5 באלפבת  $\{A, B, C\}$ . שומטים את האות הראשונה של  $X_0$  ומוסיפים בסוף של  $X_0$  את חדשה הנבחרת באקראי מתוך  $\{A, B, C\}$ . מתקבלת מילה  $X_1$ . ממשיכים כך עד שמקבלים לראשונה  $X_\tau = X_0$ .  
מצאו זמן ממוצע לחזרה  $\mathbb{E}(\tau)$  עבור  
(א)  $X_0 = AAAAA$   
(ב)  $X_0 = ABCBA$

## שאלה 4

נתבונן בתהליך הסתעפות כזה ש-  $Z_0 = 1$ , ובמעבר מ-  $Z_n$  ל-  $Z_{n+1}$  מספר הצאצאים (לחלקיק אחד) הוא 2 בסיכוי

$$p_n = \frac{(n+4)^2}{2(n+3)^2}$$

או 0, בסיכוי  $1 - p_n$ .  
הוכחו שהגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} Z_n$$

קיים כמעט בטוח, ומצאו את התוחלת שלו.  
רמז: מרטינגל חסום ב-  $L_2$  ...