הסתברות למתמטיקאים - תרגיל בית מס' 2

1. (חלק מהוכחת משפט Hahn-Kolmogorov) הוכיחו כי לכל $A_1, A_2, \ldots$ קבוצות זרות בזוגות ו μ-מדידות מתקיים כי

$$\mu^*\left(\biguplus_n A_n\right) = \sum_n \mu^*(A_n).$$

<u>רמז:</u> $\mu^*\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \mu^*\left(\biguplus_{n=1}^{N} A_n\right) \le \mu^*\left(\biguplus_{n=N+1}^{\infty} A_n\right)$.

2. מצאו דוגמאות המראות כי המסקנות של משפט Hahn-Kolmogorov אינן נכונות כאשר הקבוצה $\mathcal{E}$ איננה אלגברה או כאשר μ_0 היא אדיטיבית אבל לא אדיטיבית בת־מנייה ב $\mathcal{E}$.
<u>רמז:</u> במקרה הראשון אפשר למצוא דוגמה כך ש $\mathcal{E}$ סופית, במקרה השני אפשר לקחת $X = \mathbb{N}$.

3. הוכיחו כי מידת הסתברות μ על $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ נקבעת בצורה יחידה ע"י פונקציית ההצטברות

$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. (מידת Lebesgue-Stieltjes) נתונה פונקציה $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ מונוטונית עולה, כך ש $F(-\infty) = 0$ ו $F(\infty) = 1$. נסמן

$$F(x+) = \lim_{x\to 0^+} F(x),\ F(x-) = \lim_{x\to 0^-} F(x),$$

ונשים לב ש $F(x-), F(x+)$ קיימים לכל $x \in \mathbb{R}$.

(א) הראו כי קיימת פונקציה חיבורית μ_0 יחידה על האלגברה האלמנטרית $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ כך ש

$$\begin{aligned} \mu_0((a,b)) &= F(b-) - F(a+), \quad \forall a < b \in \mathbb{R}, \\ \mu_0(\{c\}) &= F(c+) - F(c-), \quad \forall c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(ב) לכל $E \in \mathcal{E}$ ו $\epsilon > 0$ קיימת קבוצה קומפקטית $K \subset E$ כך ש $\mu_0(K) \ge \mu_0(E) - \epsilon$.

(ג) μ_0 אדיטיבית בת־מניה (בתוך $\mathcal{E}$) אס"ם לכל סדרה $A_n \in \mathcal{E}$ כך שלכל n, $A_{n+1} \subset A_n$ ו $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} \mu_0(A_n) = 0$.

(ד) בעזרת סעיפים ב' וג' הוכיחו כי μ_0 אדיטיבית בת־מניה.
<u>רמז:</u> אם $\bigcap K_n = \emptyset$ אזי ניתן לעבור לחיתוך סופי.

5. הראו כי ההתאמה $\mu \leftrightarrow F_\mu$ היא התאמה חח"ע ועל ממידות הסתברות על $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ וכל הפונקציות העולות $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ כך ש $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$ ו $F(x+) = F(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$ (רציפות מימין).