הסתברות למתמטיקאים - תרגיל בית מס' 4

1. (א) הוכיחו כי אם X,Y מ"מ ב"ת, $X\sim B(n,p)\,,\,Y\sim B(m,p)$ אזי $X+Y\sim B(n+m,p)$.
   הערה: $B(n,p)$ מציין התפלגות בינומית, n - מספר הניסויים, p- ההסתברות להצלחה.
   (ב) הוכיחו כי אם X,Y מ"מ ב"ת, $X\sim N(m_1,\sigma_1^2)\,,\,Y\sim N(m_2,\sigma_2^2)$ אזי $X+Y\sim N(m_1+m_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

2. נניח כי $X\sim N(m,\sigma^2)$. הוכיחו כי $\mathbb{E}\{\cos X\}=e^{-\sigma^2/2}\cos m$.
   רמז: ע"י החלפות משתנים מתאימות הגיעו לאינטגרל מהצורה

$$.\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\cos(tx)\,e^{-x^2/2}\,dx$$

הוכיחו כי $\varphi(t)=e^{-t^2/2}$ בעזרת אינטגרציה בחלקים.

3. חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\mathrm{vol}_n\left(x\in[-1,1]^n\ :\ \left|\|x\|-\sqrt{\frac{n}{3}}\right|\le 1\right)$$

כאשר $\|x\|$ היא הנורמה האוקלידית.

4. יהי

$$.A_n=\left\{(x_1,\ldots,x_n)\in[0,1]^n\ :\ 3(x_1+\ldots+x_n)>2n+\sqrt{n}\right\}$$

חשבו את הגבול

$$.\lim_{n\to\infty}2^n\int\limits_{A_n}x_1\cdot\ldots\cdot x_n\,dx_1\ldots dx_n$$

5. נסמן $S_n=x_1+\ldots+x_n$.
   (א) מצאו

$$.\limsup_{n\to\infty}\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1\cos\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\,dx_1\ldots dx_n,\ \liminf_{n\to\infty}\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1\cos\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\,dx_1\ldots dx_n$$

   (ב) ומה לגבי?

$$.\liminf_{n\to\infty}\left|\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1\cos\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\,dx_1\ldots dx_n\right|$$