

הסתברות למתמטיקאים - תרגיל בית מס' 6

1. מצאו קבוצת בורל A ב $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ כך שסדרה X_1, X_2, \dots של מ"מ ב"ת ש"ה מקיימת $(X_1, X_2, \dots) \in A$ כ"ב אם ההתפלגות של X_1 היא $N(0, 1)$ אבל $(X_1, X_2, \dots) \notin A$ לכל התפלגות אחרת.

2. יהיו X_1, X_2, \dots מ"מ ונסמן $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. קבעו האם המאורעות הבאים הינם מאורעות זנב או מצאו דוגמה נגדית.

(א) סדרה מתכנסת.

(ב) סדרה חסומה.

(ג) $\liminf S_n > 1$

(ד) $\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{S_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

3. (א) יהיו X_1, X_2, \dots מ"מ ב"ת. נסמן $\mathcal{F}_1^n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, אזי $\mathcal{F}_1^\infty = \sigma(X_1, X_2, \dots)$ או $\mathcal{F}_1^\infty = \sigma(\mathcal{E})$ כאשר $\mathcal{E} = \bigcup_n \mathcal{F}_1^n$. הוכיחו כי \mathcal{E} היא אלגברה אבל לא בהכרח σ -אלגברה.

רמז: היעזרו בספרות בינאריות.

(ב) אם σ -אלגברה היא ב"ת (בכל המאורעות) של אלגברה \mathcal{E} אזי היא ב"ת ב $\sigma(\mathcal{E})$.

4. נסמן ב $(S_n)_n$ הילוך מקרי פשוט. הוכיחו כי כ"ב מתקיים כי: $\limsup_n S_n = \infty$ ו $\liminf_n S_n = -\infty$, $\sup_n |S_n| = \infty$, $\max_k (S_{k+n} - S_{kn}) = n$ רמז: היעזרו בשאלה 2.

5. נתונה סדרה X_1, X_2, \dots של מ"מ ב"ת ש"ה כך ש $\mathbb{P}(X_1 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$. נגדיר

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{\sqrt{n(n+1)}}$$

הוכיחו או הפריכו:

(א) הטור Y מתכנס כ"ב.

(ב) $\mathbb{E}\{Y\} = 0$ ו $\mathbb{E}\{|Y|\} < \infty$

(ג) $\mathbb{P}(|Y| < 10) \geq 0.99$

6. האם קיימים $s_1, s_2, \dots \in \{-1, 1\}$ כך שלכל $k = 0, 1, 2, \dots$ הסדרות

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n s_{n+1} \cdots s_{n+k}}{n}$$

מתכנסות?

7. יהיו X_1, X_2, \dots מ"מ ב"ת $X_n \geq 0$, $\mathbb{E}\{X_n\} < \infty$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\{X_n\} = \infty$.

(א) האם נובע בהכרח כי $\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \infty$ כ"ב?

(ב) כמו סעיף א', כאשר נתון בנוסף כי $X_n \leq 1$ לכל n .

8. נגדיר

$$\psi(x) = \begin{cases} x^2, & |x| < 1 \\ |x|, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

הוכיחו שאם X_1, X_2, \dots הם מ"מ ב"ת כך ש $\mathbb{E}\{X_n\} = 0$ ו $\sum_n \mathbb{E}\{\psi(X_n)\} < \infty$ אזי $\sum X_n < \infty$ כ"ב.