סמסטר א', מועד א' , תשע"ו
תאריך הבחינה: 07.02.2016
מספר קורס: 0366-2106

בחינה בפונקציות ממשיות

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סיכום אישי.
בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

שאלה 1

=30

הוכיחו כי קבוצה $A \subset \mathbb{R}^d$ היא זניחה (כלומר, $m(A) = 0$) אם ורק אם קיימת פונקציה אינטגרבילית $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ כך ש–

$$\forall x \in A \quad \lim_{y \to x} f(y) = f(x) = \infty \,.$$

רמז: קבוצה פתוחה מכילה את A.

שאלה 2

=40

יהי $p \in [1, \infty)$. נתבונן בפונקציה $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$,

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \big(|x_1|^p + \dots + |x_n|^p \big)^{1/p} \,,$$

ומידה $\mu = \varphi_*(m)$ ב–$[0, \infty)$ (כאשר m היא מידת לבג ב–$\mathbb{R}^n$).
הוכיחו כי

(א) $\mu = f \cdot m_1$ כאשר $f(r) = Cnr^{n-1}$, $C = m\big(\{x : \varphi(x) < 1\}\big)$;

....

(ב)

$$\bigg(2 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^p} \, \mathrm{d}u \bigg)^n = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\varphi^p} \, \mathrm{d}m = C \int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^p} nr^{n-1} \, \mathrm{d}r = C \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^{p/n}} \, \mathrm{d}u \,.$$

שאלה 3

=35

יהי $(X,S,\mu)=(X_1,S_1,\mu_1)\times(X_2,S_2,\mu_2)$ מכפלה של שני מרחבי מידה σ–סופיים.
בהנתן $f\in L_2(X_1,S_1,\mu_1)$, $g\in L_2(X_2,S_2,\mu_2)$ נגדיר פונקציה $f\otimes g$ ב–X ע"י

$$(f\otimes g)(x_1,x_2)=f(x_1)g(x_2)\,.$$

הוכיחו כי

(א) $f\otimes g\in L_2(X,S,\mu)$, ו– $\|f\otimes g\|=\|f\|\|g\|$, ו– $\langle f_1\otimes g_1,f_2\otimes g_2\rangle=\langle f_1,f_2\rangle\langle g_1,g_2\rangle$;

....

(ב) צירופים לינאריים של פונקציות $f\otimes g$ הם צפופים ב–$L_2(X,S,\mu)$;

....

(ג) אם $(f_k)_k$ בסיס אורתונורמלי ב–$L_2(X_1,S_1,\mu_1)$ ו– $(g_l)_l$ בסיס אורתונורמלי ב–$L_2(X_2,S_2,\mu_2)$, אז $(f_k\otimes g_l)_{k,l}$ בסיס אורתונורמלי ב–$L_2(X,S,\mu)$.

רמז ל–(ב): קודם, פונקציות אינדיקטור.

שאלה 4

=35

תהי f פונקציה ב–$[0,1]\times[0,1]$ מדידה בורל ואינטגרבילית רימן. הוכיחו כי הפונקציה

$$g:x\mapsto\int f(x,\cdot)\,\mathrm{d}m$$

מוגדרת ב–$[0,1]$ ואינטגרבילית רימן.
