

אופולוגיה - קורס מס 1

① בעצמים הבאים, קבע האם התחנה X מהצורה $\Omega \subseteq \mathbb{R}^X$ היא מכתה אופולוגית; הוכח או גשמוך:

א. X קב אילומת נענה, $\Omega = \{U \subseteq X \mid \text{קב אילומת } U\}$

ב. $X = \mathbb{R}^2$; $\Omega = \{B(0,r) \mid r \geq 0\} \cup \{\emptyset\} \cup X$

ג. $B(0,r) = \{(x,y) \mid \sqrt{x^2+y^2} < r\}$; $\Omega = \{B(0,r) \mid r \geq 0\} \cup \{\emptyset\} \cup X$

ד. $X = \mathbb{R}^2$; $\Omega = \{\overline{B}(0,r) \mid r \geq 0\} \cup \{\emptyset\} \cup X$

ה. $\overline{B}(0,r) = \{(x,y) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq r\}$; $\Omega = \{\overline{B}(0,r) \mid r \geq 0\} \cup \{\emptyset\} \cup X$

ו. $X = \{a,b,c,d\}$; $\Omega = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$

② הוכח שהקבוצה $\Sigma = \{(a,b) \mid a < b, a,b \in \mathbb{R}\}$ מהווה בסיס אופולוגי על \mathbb{R} . (הא מענה "הולר הגלרי")

ה. הוכח שבקבוצה מהבסיס Σ היא פתוחה ואם סגורה בטופולוגיה.

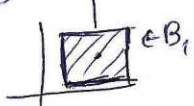
ג. הוכח שאופולוגיה זו עדינה יותר מהאופולוגיה הרגילה על \mathbb{R} , אך גסה יותר מהאופולוגיה הרדיקלית על \mathbb{R} .

③ א. הוכח שיתרון לכל עבור $a \in X$ הוא קבוצה פתוחה-סגורה באופולוגיה הרדיקלית על קבוצה X .

ב. הוכח כי קבוצת היתרונות $\{a \in X \mid \{a\} \text{ פתוחה בסיס אופולוגיה הרדיקלית על } X\}$.

④ האם האופולוגיה התי-סופית על \mathbb{R} (כלומר קב היא פתוחה אצלם התשלום למה סופי) היא עדינה יותר, גסה יותר, או לא ניתן להשוות? אם האופולוגיה הרגילה על \mathbb{R} ?

⑤ הוכח כי האופולוגיות היוצרות מהבסיסים הבאים ה- \mathbb{R}^2 , שקולות:



$$B_1 = \left\{ \{(x,y) : \max\{|x-a|, |y-b|\} < r \} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2, r \geq 0 \right\}$$



$$B_2 = \left\{ \{(x,y) : |x-a| + |y-b| < r \} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2, r \geq 0 \right\}$$

בהצלחה!