פתרון תרגיל בית מס' 10 בטופולוגיה

① א. נגדיר $H: X\times I \to X$, $(x,t)\mapsto t\cdot x$ כאשר $X=\mathbb{R}^n$, $x=(x_1, \dots, x_n)$

בבירור H רציפה, וגם $H(x,0)\equiv 0$, $\forall x\ \ H(x,1)=x$
לכן H הומוטופיה בין הזהות לפונקציה קבועה. עובדה זו שקולה להיות X כוויץ.

ב. באופן שקול נראה ש-f הומוטופית להעתקה הקבועה (שוב, זה שקול כי X כוויץ).
ידוע שהזהות הומוטופית להעתקה הקבועה, לכן קיימת $G: X\times I\to X$ רציפה כך ש- $G(x,0)=x$, $G(x,1)=p$ כש- $p\in X$ נק' קבועה. נגדיר הומוטופיה:
$H: X\times I\to X$ - זו גם פונקציה רציפה, כך ש- $H(x,0)=f(x)$, $H(x,1)=p$
$(x,t)\mapsto G(f(x),t)$
לכן $f(x)$ הומוטופית לקבועה, כנדרש.

② תהיה $H: X\times I\to Y$ הומוטופיה כך ש- $H(x,0)=h(x)$, $H(x,1)=h'(x)$
$K: Y\times I\to Z$ " " $K(x,0)=k(x)$, $K(x,1)=k'(x)$.

נגדיר: $G: X\times I\to Z$ - זו פונ' רציפה.
$(x,t)\mapsto K(H(x,t),t)$

מתקיים: $G(x,0)=K(h(x),0)=k\circ h(x)$, לכן G ההומוטופיה הנדרשת.
$G(x,1)=K(h'(x),1)=k'\circ h'(x)$

③ א. $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ $(n>1)$ קשיר מסילתית, על-כן קיימת מסילה $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ בין $f(p)=\gamma(0)$ לבין $\gamma(1)=g(p)$.
אזי $H: \{p\}\times I\to \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ היא פונקציה רציפה המגדירה
$(p,t)\mapsto\gamma(t)$ הומוטופיה בין $H_0(p)=\gamma(0)=f(p)$
לבין $H_1(p)=\gamma(1)=g(p)$.

ב. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ אינו קשיר, לכן ההעתקות $f(p)=1$, $g(p)=-1$ אינן הומוטופיות (הומוטופיה היא מסילה במקרה זה)

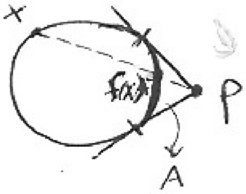
(4) תהי $A \subseteq S^1$,$r: S^1 \to A$ רטרקציה (פונקציה רציפה כך ש- $r|_A = \mathbb{1}_A$)

כיוון ש- S^1 סגורה וקשירה, גם התמונה A סגורה וקשירה.

אם $A = S^1$ אז יש רטרקציה מתאימה (זהות).

אחרת, A קטע סגור על המעגל. כל A כזו היא רטרקט,

ע"י ההטלה:



כלומר, נעביר משיקים למעגל בקצות הקטע A, הם נפגשים ב- P. כדי להגדיר את $r(x)$ עבור $x \in S^1$, נחבר את x עם P בקו ישר - נק' החיתוך של ישר זה עם A היא $r(x)$.

(5) נגדיר $H: X \times I \to S^1$ - ההומוטופיה בין f ל- g:

$$(x,t) \mapsto \frac{t f(x) + (1-t) g(x)}{\| t f(x) + (1-t) g(x) \|}$$

התנאי $|f(x)-g(x)|<2$ חשוב כדי ש- H תהיה מוגדרת: הוא שקול לכך ש- $f(x) \neq -g(x)$; אני צריכה לבדוק ש- $t \cdot f(x) + (1-t) g(x) \neq 0$ לכל x ולכל t. ואכן, אם יש t_x עבורם $t \cdot f(x) + (1-t) g(x) = 0$ אז $f(x)$, $g(x)$ תלויים לינארית ב- $\mathbb{R}^{n+1}$, ולכן

I) $f(x) = g(x)$

II) $f(x) = -g(x)$ או

(כי הן על S^n).

במקרה (I) אין בעיה, ומקרה (II) לא יתכן מהנתון.

נקבל סתירה: $f(x)=0 \Leftarrow t \cdot f(x) + (1-t) f(x) = 0$