פתרונות לתרגיל 8 בטופולוגיה

① $(\Rightarrow)$ נניח ש- X האוסדורף. יהי $(x,y)\in L^c$. קיימות סביבות זרות U_x, U_y כך ש- $x\in U_x, y\in U_y$. כיוון ש $U_x\cap U_y=\phi$, נובע $U_x\times U_y\subseteq L^c$ ולכן $U_x\times U_y$ היא סביבה של (x,y) מוכלת ב- L^c $\Leftarrow$ L^c פתוחה.

$(\Leftarrow)$ נניח ש- L סגורה. אז L^c פתוחה, יהי $(x,y)\in L^c$, (כלומר $x\neq y$ נק' ב- X) אז קיימת V פתוחה $\underbrace{\text{ב-}}_{\text{בסיסית}}$ $X\times X$ כך ש- $(x,y)\in V\subseteq L^c$.
קב' בסיס הן מהצורה $U_1\times U_2=V$ כש- U_1, U_2 פתוחות ב- X.
לכן קיבלנו $x\in U_1$, $y\in U_2$ כיוון ש- $U_1\times U_2\subseteq L^c$, $U_1\cap U_2=\phi$.

② יהי $0<\varepsilon$. לכל x קיים טבעי N_x כך ש- $|f_{N_x}(x)|<\varepsilon$.
נסמן: $A_N=\{x\in X: N_x=N\}$. אזי קיבלנו $X=\bigcup_{N\in\mathbb{N}} A_N$.
נראה ש- A_N פתוחה: אם $x_0\in A_N$ אז $|f_N(x_0)|<\varepsilon$. מרציפות f_N, קיימת סביבה $x_0\in U$ כך שלכל $x\in U$, $|f_N(x)|<\varepsilon$ (מהגדרת רציפות!)
לכן $x\in U\subseteq A_N$, כלומר A_N פתוחה.
X קומפקטי, לכן קיים כיסוי סופי $X=A_{N_1}\cup\dots\cup A_{N_k}$. נקח $N=\max_{1\le k\le k} N_k$ ונקבל ש- $|f_N(x)|<\varepsilon$ לכל x.
מהנתון (מונוטונית יורדת בכל נק'), נסיק כי $|f_n(x)|<\varepsilon$ לכל $N\le n$ ולכל $x\in X$.

③ נגדיר העתקה: $SL(n)\times GL(1)\xrightarrow{g} GL(n)$

$(A,t)\longmapsto t\cdot A$ [בעצם $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$]

ברור שזו העתקה חח"ע ועל, כי קיימת הופכית:

$$GL(n)\xrightarrow{g^{-1}} SL(n)\times GL(1)$$

$$B\longmapsto\left(\frac{B}{\sqrt[n]{|\det B|}},\ \sqrt[n]{|\det B|}\cdot sgn(\det B)\right)$$

ברור כי g, g^{-1} רציפות, כיוון שהן צמצום של פונ' רציפות על מרחבים אוקלידיים ($\mathbb{R}^{n^2}$...) כשש רציפות בכל קורדינטה.
נשים לב שגם $sgn:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\pm1$ רציפה בתחום זה (והיא חיונית להגדרת ההומאו'!)

④ I^2 קומפקטי, $S_1 \times S_1$ האוסדורף (כמכפלה של כאלה),
הפונקציה $f : I^2 \longrightarrow S^1 \times S^1$ רציפה, ועל.

$$(x,y) \longmapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$$

לכן, ממשפט, היא מגדירה ~~[illegible]~~ הומאו' $I^2/S(f) \simeq S^1 \times S^1$.
אבל $S(f)$ מזהה בדיוק לפי היחס $\left[\forall t \quad \begin{array}{l}(0,t)\sim(1,t)\\(t,0)\sim(t,1)\end{array}\right]$.

הערה: $e^{2\pi i x} \approx (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$.

⑤ נתבונן בפונקציה:

$$g : \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2$$
$$z = x+iy \longmapsto z^2$$

ברור ש-g רציפה ועל, והיא מזהה בדיוק לפי היחס $(x,y)\sim(-x,-y)$ [כי, כמובן, $(-z)^2 = z^2$ ולכל מספר מרוכב יש בדיוק 2 שורשים].

$\mathbb{D}^2$ אינה קומפקטית, אך מקיים התנאי החלופי $\bigcup \mathrm{Int}\, g(K) = \mathbb{D}^2$

$K \subseteq \mathbb{D}^2$ קומפקט

(למשל, מספיק להסתכל על הקומפקטים $K_n = \{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} \le 1-\frac{1}{n}\}$
$\Rightarrow g(K_n) = \{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} \le (1-\frac{1}{n})^2\}$)

לפיכך g מגדירה הומאו' $\mathbb{D}^2/(x,y)\sim(-x,-y) \simeq \mathbb{D}^2$