יריעות פרוייקטיביות

עמנואל

18 במרץ 2018

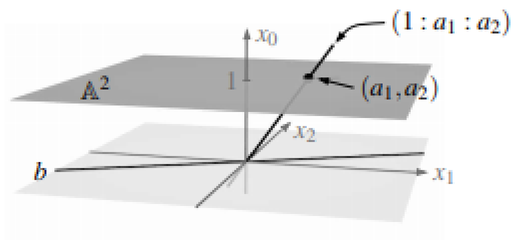
0.1 מוטיבציה

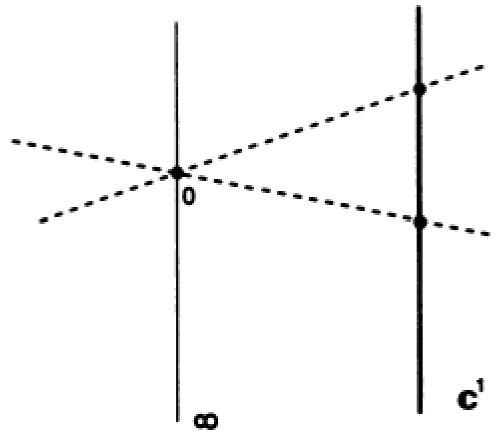
רוצים לפתור מערכות משוואות פולינומיות: עם משוואה כמו x^2+1 מעל הממשיים הסתדרנו על ידי מעבר לשדה גדול יותר, אבל מה עם מערכת משוואות כמו $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$? גיאומטרית אלה שני ישרים מקבילים, וזה המקרה היחיד שבו לישרים שונים אין בדיוק נקודת חיתוך אחת. היינו רוצים תורה "אחידה" שתאמר לנו מהי כמות הפתרונות של מערכת משוואות כתלות בדרגות. להגדיל את השדה לא יעזור לנו, ולכן נוסיף נקודות חדשות למרחב שתהיינה הפתרונות של מערכת משוואות מעין זו. איך נעשה את זה? נבחין שבעולם "האמיתי" אנחנו אכן רואים קווים מקבילים כאילו הם נפגשים "באינסוף", למשל פסי רכבת, וננסה לחקות זאת. אם נבחר את העין שלנו כראשית הצירים, אז יש נציג בודד בשדה הראייה שלנו לכל ישר שעובר בעין, ולכן אוסף הישרים במרחב התלת־ממדי ממדל עבורנו מרחב שבו ישרים נחתכים באינסוף.

לכן נגדיר את המרחב הפרוייקטיבי $\mathbb{P}^n$ כאוסף התת־מרחבים החד־ממדיים של $\mathbb{A}^{n+1}$. כדי להגדיר טופולוגיה על המרחב הזה, נשים לב שהוא מרחב מנה $\frac{\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}}{x\sim\lambda x,\lambda\neq 0}$ כשנחסיר מכל ישר את ראשית הצירים. כעת אם השדה שלנו הוא $\mathbb{C}$ אז יש לנו טופולוגיית מנה על $\mathbb{P}^n$.[1]

לפני שנגדיר מהי קבוצה סגורה אלגברית במרחב הזה, ונגדיר איתן טופולוגיית זריצקי, ננסה לדמיין את המרחב בטופולוגיית המנה, כי היא נותנת אינטואיציה גיאומטרית למבנה והמשמעות של המרחב. אפשר לשכן את $\mathbb{A}^n$ ב־$\mathbb{P}^n$ לפי $(x_1,...,x_n)\mapsto(1:x_1:...x_n)$, כלומר המרחב האפיני יהיה משטח הגובה $x_0=1$ במרחב ה־$n+1$ ממדי האפיני ונתאים כל נקודה במשטח הגובה לישר שהיא קובעת דרך הראשית.

[1] על שדה כללי אין טופולוגיה.





נסמן את התמונה של השיכון ב$U_0 = \{x_0 \neq 0\}$, אז הנקודות שמחוץ לה הן "הנקודות באינסוף" שתיארנו מקודם: נראה שלכל ישר אפיני הוספנו נקודה אחת חדשה שהוא שואף אליה, ואלה בדיוק כל הנקודות החדשות. אכן, יהי $a+bt$ ישר במרחב האפיני. כשנשכן אותו ב$\mathbb{P}^n$ נקבל $(1 : a_1 + b_1 t : ...) = (\frac{1}{t} : \frac{a_1}{t} + b_1 : ...)$ ששואף באינסוף לנקודה $(0 : b_1 : ...)$ שמתארת את הכיוון של הישר. בפרט שני ישרים נפגשים באינסוף אמ"ם הם מקבילים. נוח לחשוב על המרחב הפרוייקטיבי כך כקומפקטיפיקציה של המרחב האפיני על ידי הוספת נקודות באינסוף.

0.2 קבוצות אלגבריות פרוייקטיביות

נרצה להגדיר קבוצה אלגברית במרחב הפרוייקטיבי, אבל יש בעיה טכנית: אם ניקח למשל את הפולינום $x^2 - y \in k[x,y]$ אז קבוצת האפסים שלו במרחב המנה שלנו אינה מוגדרת היטב, כי למשל $0 = f(1,1) \neq f(-1,-1)$, ולכן לא ברור האם להכליל את הנקודה הפרוייקטיבית $(1 : 1)$ בקבוצת האפסים של f. אם הפולינום הומוגני, כלומר כל הגורמים הם עם אותה מעלה כוללת, אז $f(\lambda x) = \lambda^n f(x)$ ולכן קבוצת האפסים כן מוגדרת היטב.

טענה. גם ההיפך נכון: יהי $f \in k[k_0, ..., k_n]$ פולינום מעל שדה סגור אלגברית כך שלכל $f(x) = 0$, גם $f(cx) = 0$ לכל $c \in k$. אז f הומוגני.

נוכיח בקרוב. מכיוון שהטענה דורשת סגירות אלגברית, אנחנו מצפים שנצטרך את משפט האפסים כדי להוכיח אותה. בשביל ההוכחה נצטרך לדעת גם כמה טענות על אידיאלים הומוגניים, ולכן נעבור לדון במבנה הנכון בהקשר שלנו, שיקודד גם את המידע הנוסף על דרגה כוללת ועל הומוגניות.

הגדרה. **חוג מדורג** הוא חוג R עם אוסף תת־חבורות R_d, $d \in \mathbb{N}$, כך שמתקיים $R = \oplus R_d$ כחבורות אבליות (כלומר לכל איבר יש הצגה יחידה כסכום סופי עם מחובר אחד לכל היותר בכל תת־חבורה) ובנוסף מתקיים $R_d R_e \subseteq R_{d+e}$, כלומר הדרגה $deg(f) = argmax_d\{f_d \neq 0\}$ מקיימת את תכונת ההומומורפיזם הרגילה של חוג הפולינומים, שהוא הדוגמה הקנונית לחוג מדורג. אם k־אלגברה היא חוג מדורג ובנוסף $kR_d \subseteq R_d$ נקרא לה k־אלגברה מדורגת.

תכונות בסיסיות.

1. 1 הומוגני מדרגה 0. אכן, אם $1 = \sum f_d$ אז $f_i = 1 \cdot f_i = \sum f_d f_i$ שתי הצגות של f_i כסכום הומוגניים ולכן יש שוויון בכל דרגה, כלומר $f_i = f_i f_0$ וגם $f_d f_i = 0$. כעת

$1 = \sum f_i = \sum (f_i f_0) = (\sum f_i) f_0 = f_0$ וסיימנו.

2. נובע R_0תת־חוג של R , כי $R_0 R_0 \subseteq R_0$.

3. נאמר שאידיאל **הומוגני** אם הוא נוצר על ידי איברים הומוגניים. אם I, J אידיאלים הומוגניים אז גם $I+J, IJ$ הומוגניים. אכן, אם $I = (h_i), J = (g_j)$ אז $IJ = (h_i g_j)$, $I + J = (\{f_i\} \cup \{g_j\})$. אבל איך נוכיח שגם החיתוך הומוגני? <לתת זמן לחשוב> בשביל זה נוכיח:

4. אידיאל I הומוגני אמ"ם $\sum f_d \in I$ גורר $f_d \in I$.

הוכחה. $\Longrightarrow$ בהינתן קבוצת יוצרים, החלקים ההומוגניים הם בעצמם יוצרים. $\Longleftarrow$ יהיו h_i יוצרים הומוגניים. לכל $f = \sum g_i h_i \in I$ נוכל לכתוב $g_i = \sum g_{i,j}$ פירוק לסכום הומוגניים, שהרי החוג מדורג. כעת $f_d = \sum_{j+degh_i=d} g_{i,j} h_i \in I$ כי כל אחד מהמחוברים שייך לI, שהרי $h_i \in I$.

5. אם I, J אידיאלים הומוגניים אז גם $I \cap J$הומוגני. (נובע מ־4)

6. הרדיקל של אידיאל הומוגני הוא אידיאל הומוגני. אכן, יהי $f = \sum_{d=1}^{n} f_d \in \sqrt{I}$, אז מסעיף 4 מספיק להוכיח ש־$f_d \in I$. מההנחה $\exists m : f^m = f_n^m + (lower.order.terms) \in I$ ולכן מטענה 4 $f_n \in \sqrt{I} \implies f_n^m \in I$ וסיימנו באינדוקציה על $n = deg(f)$. (בסיס $f = f_0$.)

הוכחת הטענה (שפולינומים שאפשר להגדיר את קבוצת האפסים הפרוייקטיבית שלהם הם הומוגניים). זה שימוש במשפט האפסים. נבחין שאם $x \in \mathcal{Z}(f)$ אז גם כל גורם הומוגני f_i של f מתאפס בx, שהרי $f(\lambda x)$ פולינום במשתנה אחד שמתאפס זהותית. לכן קבוצת האפסים של f שווה לקבוצת האפסים של החלקים ההומוגניים של f'. לפי משפט האפסים $\sqrt{\mathcal{Z}(f_i)} = \sqrt{(f)} = (\sqrt{f})$ ולכן מכך שצד שמאל הוא אידיאל הומוגני גם צד ימין הומוגני, כלומר $\sqrt{f}$ פולינום הומוגני ולכן גם f הומוגני.♦

לכן נוכל להגדיר $\mathcal{Z}_p(f_1, f_2, ...)$ רק עבור אוסף פולינומים הומוגניים ב־$k[x_0, ..., x_n]$, לאו דווקא מאותה דרגת הומוגניות. לתת־קבוצה של $\mathbb{P}^n$ מהצורה הזאת נקרא קבוצה אלגברית (פרוייקטיבית).

טענה.כל קבוצה אלגברית אפשר ליצור בעזרת מספר **סופי** של פולינומים הומוגניים.

הוכחה. הקבוצה האלגברית תלוייה רק באידיאל (ההומוגני) $I = (f_i)$. האידיאל I נוצר סופית כי חוג הפולינומים $k[x_0, ..., x_n]$ נתרי, ולכן אפשר למצוא מספר סופי של פולינומים, לאו דווקא הומוגניים, שיוצרים אותו. ניקח את הגורמים ההומוגניים של היוצרים הללו, אז הם באידיאל I לפי טענה 4 ולכן הם בעצמם יוצרים את I .♦

הערה. למעשה אפשר גם לדרוש שהפולינומים היוצרים יהיו כולם מאותה דרגה.

הוכחה. מתקיים לכל d, f ש$\mathcal{Z}_p(x_0^d f, ..., x_n^d f) = \mathcal{Z}_p(f)$ (מיידי) ולכן ניקח $d = max\{deg(f_i)\}$ ונגדיר $\mathcal{Z}(f_1, ..., f_r) = \mathcal{Z}(x_0^{d-deg(f_1)} f_1, ..., x_n^{d-deg(f_1)} f_1, ...)$.♦

זהירות. לא כל אידיאל הומוגני נוצר על ידי איברים הומוגניים מאותה דרגה, למשל אם בשלילה $(x, y^2) = (f_i)$ עם $deg(f_i) = d \geq 2$ דרגות זהות, אז $x = f_1 g_1 + ... + f_r g_r$ וכל המונומים מדרגה לפחות 2, סתירה.

0.3 יריעות פרוייקטיביות

טענה. הקבוצות האלגבריות הפרוייקטיביות מגדירות טופולוגיה על $\mathbb{P}^n$ שבה הן הקבוצות הסגורות.

הוכחה. $\emptyset = \mathcal{Z}_p(1), \mathbb{P}^n = \mathcal{Z}_p(0)$, סגירות לחיתוכים ברורה (איחוד הפולינומים), ואיחודים סופיים כי $\mathcal{Z}_p(f_i) \cup \mathcal{Z}_p(g_j) = \mathcal{Z}_p(f_i g_j)$ כמו במקרה האפיני: $\subseteq$ ברור, $\supseteq$ כי אם יש $f_k(x) \neq 0$ אז $\forall j : g_j(x) = 0$. ♦

כעת נוכל להגדיר ש**יריעה פרוייקטיבית** היא קבוצה אלגברית פרוייקטיבית איפריקה, אבל כדי שיהיה מספיק לחקור יריעות פרוייקטיביות נרצה להראות שיש פירוק יחיד לרכיבים

איפריקים לכל קבוצה אלגברית פרוייקטיבית. הוכחנו שיש פירוק כזה בכל מרחב נתרי, ולכן אנחנו רוצים להוכיח ש־$\mathbb{P}^n$ נתרי תחת טופולוגיית זריצקי. לשם כך נרצה כמו במקרה האפיני לתרגם שרשרת יורדת של קבוצות סגורות לשרשרת עולה של אידיאלים של המרחב הנתרי $k[x_0, ..., x_n]$, ולכן נגדיר את **האידיאל ההומוגני** של קבוצה אלגברית פרוייקטיבית להיות $I(X) = \{f \in k[x_0, ..., x_n]_d : \forall x \in X, f(x) = 0\}$. נצטרך את ג' כאן:

תכונות בסיסיות.

א. $\mathcal{Z}_p$,I_p הופכות סדר, $Y \subseteq Z \to I(Y) \supseteq I(Z)$.

ב. $J \subseteq I(\mathcal{Z}(J))$ לכל אידיאל הומוגני J .

ג. $\mathcal{Z}(I(Y)) = \bar{Y}$. אכן, נפעל בדיוק כמו במקרה האפיני. $\supseteq$ברור, ונותר להראות שכל קבוצה סגורה שמכילה את Y חייבת להכיל גם את צד שמאל. כעת אם $W = \mathcal{Z}(J)$ מכילה את Y, אז $J \subseteq I(\mathcal{Z}(J)) \subseteq I(Y)$ ונפעיל $\mathcal{Z}$. ♦

בהינתן שרשרת יורדת של קבוצות סגורות פרוייקטיביות נקבל שרשרת עולה של אידיאלים, ובעזרת ג' אנחנו יכולים להסיק מהתייצבות האידיאלים שגם הקבוצות מתייצבות. לכן המרחב נתרי, וזאת תכונה תורשתית וממילא כל קבוצה אלגברית פרוייקטיבית היא עם פירוק יחיד לרכיבים איפריקים. לכן מעתה נתעניין רק ביריעות פרוייקטיביות.

הרווחנו תכונה נוספת בבנייה שלנו: יריעות פרוייקטיביות הן תמיד קומפקטיות בטופולוגיה האוקלידית (ב$\mathbb{C}$), בעוד יריעות אפיניות לעולם אינן קומפקטיות.

טענה.כל יריעה פרוייקטיבית מרוכבת היא קומפקטית. אכן, $\mathbb{P}^n = \mathbb{S}^{2n+1} / x \sim \lambda x, |\lambda| = 1$, $\mathbb{S}^n$ האוסדורף וגם קומפקטית[2] לפי היינה־בורל. העתקת המנה היא רציפה בטופולוגיית המנה (מההגדרה) ולכן $\mathbb{P}^n$ היא תמונה רציפה של קומפקטית ולכן קומפקטית. כעת כל יריעה פרוייקטיבית היא סגורה בטופולוגיה האוקלידית ולכן היא קומפקטית כתת־קבוצה סגורה של מרחב קומפקטי.

משפט. אם יריעה אפינית מעל $\mathbb{C}$ היא קומפקטית בטופולוגיה האוקלידית, אז היא קבוצה סופית.

דיבורים סביב ההוכחה. מהיינה־בורל מספיק להוכיח שיריעה אפינית אינסופית היא לא חסומה, אבל זה לא ברור איך להוכיח את זה. עבור פולינום בודד אפשר לקחת ערכים גדולים כרצוננו לכל המשתנים פרט לאחד ומהסגירות האלגברית יהיה ערך שישלים גם את המשתנה הנותר, אבל באופן כללי לא ברור איך לומר את זה במדויק. למעשה, באופן מפתיע רק בשיעור הבא יהיו לנו כלים להוכיח את הטענה האלמנטרית הזאת במדויק. אכן, בקווים כלליים, ניזכר ש**משפט הנורמליזציה של נתר** אומר שלכל k ־ אלגברה נוצרת סופית A יש איזשהם איברים בלתי־תלויים אלגברית $y_1, ..., y_m \in A$ כך שA הוא מודול נוצר סופית מעל $k[y_1, ..., y_m]$. ניקח את A להיות חוג הקואורדינטות של היריעה, ואז $k[y_1, ..., y_m]$ חוג הקואורדינטות של $\mathbb{A}^m$, ואנחנו נראה בתת־פרק הבא של הארטסהורן שאפשר ליצור מהמונומורפיזם שמשכן את $k[y_1, ..., y_m]$ בA "אפימורפיזם" בכיוון ההפוך מהיריעה על $\mathbb{A}^m$. בפרט נובע שהיריעה אינה קומפקטית, כי $\mathbb{A}^m$ אינה קומפקטית ותמונה רציפה של קומפקטי היא קומפקטית.♦

0.4 כיסוי אפיני

כזכור מצאנו שיכון $\phi_0 : \mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ לפי $(x_1, ..., x_n) \mapsto (1 : x_1 : ..)$ שהוא על $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$. הגדרנו טופולוגיית זריצקי במרחב האפיני ובמרחב הפרוייקטיבי, נבדוק שטופולוגיית זריצקי המושרית על $\mathbb{A}^n$ כתת־מרחב מסכימה עם טופולוגיית זריצקי שהגדרנו בשבוע שעבר. לשם כך נגדיר את ה**הומוגניזציה** של פולינום $f \in k[x_1, ..., x_n]$ ממעלה d להיות $f^h =$

[2] בגיאומטריה אלגברית לעתים "קומפקטית" כולל את ההנחה שהמרחב האוסדורף ואז קומפקטיות רגילה נקראת קוואזי־קומפקטיות, אבל היום ניצמד למינוח שמקובל בשאר המתמטיקה. אפשר גם להוכיח שכל יריעה פרוייקטיבית היא האוסדורף בטופולוגיה האוקלידית.

$x_0^d f(\frac{x_1}{x_0}, ...)$, שהוא הומוגני מדרגה d כי אנו מבטלים את המעלות של כל הגורמים בעזרת משתנה חדש ואז מוסיפים d לכל גורם "בכוח". במפורש אנחנו מוסיפים "מה שחסר" לכל גורם כדי שהמעלה הכוללת שלו תהיה d.

הערת אגב. האופרטור $(\cdot)^h$ כפלי ואינו אדיטיבי, ולכן אם I אידיאל אז ההומוגניזציה של כל האיברים שלו עלולה לא להיות אידיאל. לכן מגדירים את ההומוגניזציה I^h של אידיאל להיות האידיאל שנוצר על ידי ההומוגניזציות של כל אברי I.

טענה. $\phi_0 : \mathbb{A}^n \rightleftarrows U_0$ הומאומורפיזם, כלומר שתי טופולוגיות זריצקי שהגדרנו על המרחב האפיני הן זהות.

הוכחה. נוכיח שיש אותן קבוצות סגורות. תהי $X = \mathcal{Z}_p(S) \cap U_0$ קבוצה סגורה פרוייקטיבית, אז $\phi_0^{-1}(X) = \mathcal{Z}(f(1, x_1, ..., x_n))_{f \in S}$ סגורה אפינית. בכיוון ההפוך, תהי $X = \mathcal{Z}(I) \subseteq \mathbb{A}^n$, אז $\phi(X) = \mathcal{Z}_p(I^h)$ סגורה פרוייקטיבית. ♦

באופן סימטרי נקבל שגם U_i הומאומורפי ל־$\mathbb{A}^n$ לכל i, ולכן קיבלנו כיסוי פתוח של $\mathbb{P}^n$ על ידי עותקים של $\mathbb{A}^n$. המילה "יריעה" רומזת לנו שהאובייקט שבאמת יעניין אותנו לחקור רק נראה מקומית כמו יריעה אפינית. כאן אנו רואים שיריעות פרוייקטיביות הן אכן מהצורה הזאת, ויש להן את היתרון שהתיאור שלהן "גלובלי", ולא דורש תיאור מפורש של הדבקות ומורפיזמים שיקודדו את היותן אפיניות־מקומית. זאת דרך נוספת לתרץ את העיסוק ביריעות פרוייקטיביות.

מאחר שזה כיסוי פתוח על ידי אי־פריקים שנחתכים בזוגות, נובע (כללית בטולופוגיה) שהמרחב $\mathbb{P}^n$ אי־פריק. נראה זאת.

0.5 המרחב הפרוייקטיבי אי־פריק

ראשית נחקור את התכונות של איפריקות במרחב טופולוגי כללי.

תזכורת והבחנות. מרחב טופולוגי X נקרא אי־פריק אם מתקיים אחד מהתנאים השקולים הבאים:

1. אי אפשר לכתוב את X כאיחוד של שתי קבוצות סגורות $V_i \neq X$.
2. כל שתי קבוצות פתוחות $U_i \neq \emptyset$ נחתכות.
3. כל קבוצה פתוחה לא־ריקה היא צפופה ב־X.
4. כל קבוצה פתוחה לא־ריקה היא קשירה.

הוכחות. קבוצה היא צפופה אמ"ם היא נחתכת עם כל פתוחה לא־ריקה; אם יש פתוחות זרות אז האיחוד שלהן הוא קבוצה פתוחה שאינה קשירה; קבוצה פתוחה שאינה קשירה היא איחוד זר של שתי פתוחות בה שבפרט פתוחות בX. ♦

טענת עזר 1. יהי X מרחב טופולוגי. תת־קבוצה Y היא פריקה אמ"ם הסגור $\bar{Y}$ אי־פריק.

הוכחה. קבוצה Z איפריקה אמ"ם כל שתי קבוצות פתוחות (לא־ריקות) בה נחתכות, כלומר אמ"ם לכל U, V פתוחות עם $U \cap Z, V \cap Z \neq \emptyset$ מתקיים $(U \cap V) \cap Z \neq \emptyset$. אבל קבוצה פתוחה חותכת את Y אמ"ם היא חותכת את $\bar{Y}$. ♦

טענת עזר 2. כל קבוצה איפריקה מוכלת בקבוצה איפריקה מקסימלית ("רכיב אי־פריקות"), ורכיב האי־פריקות סגור.

הוכחה. נפעיל את הלמה של צורן, הרי איחוד שרשרת של אי־פריקות אי־פריק [3]. כעת הרכיב סגור כי אחרת הסגור שלו היה אי־פריק וגדול יותר. ♦

משפט. יהי X מרחב טופולוגי ויהי $U_1, ..., U_r$ כיסוי פתוח סופי על ידי קבוצות קשירות.

א. אם X אינו קשיר אז יש $U_1 \cap U_j = \emptyset$. [4]

[3](אחרת יש איחוד שתי סגורות שנותן את האיחוד ונחתוך אותן עם מרחב שמופיע מספיק מאוחר כך ששתיהן לא־ריקות בו, סתירה לאי־פריקות.)

[4]למעשה אפשר בסעיף זה שהכיסוי יהיה אינסופי,שהקבוצות תהיינה קשירות במקום איפריקות ולדרוש אפילו שתהיה חלוקה של הכיסוי לשתי קבוצות כך שכל איברי קבוצה זרים לכל האיברים האחרים.

ב. אם X קשיר והקבוצות U_i אי־פריקות אז X אי־פריק.

הוכחה. א. מההנחה אפשר לכתוב $X = V_1 \cup V_2$ איחוד זר של שתי קבוצות סגוחות, כל U_i מוכלת כולה בV_1 או בV_2 , אחרת היה משרה פירוק של U_i . לכן בלי הגבלת הכלליות $U_1 \in V_1$ וניקח $U_j \subseteq V_2$ שרירותית.

ב. יהיו $X_1, ..., X_n$ הרכיבים האי־פריקים של X (שמכילים את $U_1, ..., U_n$). בשלילה יש יותר מאחד. X_i סגורים ולכן מהאיפריקות של X ומכך שיש כמות סופית של X_i שמכסים את X נובע ש־X_1 חייב לחתוך מישהו, כלומר יש $x \in X_1 \cap X_2$ (בה"כ). תהי $x \in U_i$, אז $U_i \cap X_1$ פתוחה ב־X_1 ולכן צפופה בX_1 (שהרי X_1 פריק), ובדומה $U_i \cap X_2$ צפופה ב־X_2 . כעת הסגור של U_i ב־X מכיל את הסגור של $U_i \cap X_1$ וגם את של $U_i \cap X_2$ כלומר הוא קבוצה סגורה אי־פריקה שמכילה גם את X_1 וגם את X_2, סתירה.

מסקנה. המרחב הטופולוגי $\mathbb{P}^n$ (עם טופ' זריצקי) הוא איפריק.

הוכחה. איחוד של קבוצות קשירות שהחיתוך בין כל זוג מהן אינו ריק הוא קשיר, ולכן $\mathbb{P}^n$ קשיר. כללית, אם למרחב קשיר X יש כיסוי פתוח על ידי קבוצות איפריקות U_i אז X איפריק. ♦

0.6 חוג הקואורדינטות ההומוגני

בדומה למקרה האפיני נקשר בין תכונות טופולוגיות של היריעה לתכונות אלגבריות כך: נגדיר את **חוג הקואורדינטות ההומוגני** של קבוצה אלגברית פרוייקטיבית $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ להיות $S(Y) = \frac{k[x_0,...,x_n]}{I(Y)}$, וזהו חוג מדורג מתכונה נוספת של חוגים מדורגים:

7. יהי R חוג מדורג, I אידיאל הומוגני, אז $R/I = \oplus \frac{R_d}{R_d \cap I}$ חוג מדורג.

הוכחה. החבורה $\frac{R_d}{R_d \cap I}$ היא תת־חבורה של R/I כי אפשר לשכן על ידי המונומורפיזם $f_d + R_d \cap I \mapsto f_d + I$. הפירוק ההומוגני של $f = \sum f_d$ מתקבל מהפעלת ההטלה לI , $\bar{f} = \sum \bar{f}_d$. הפירוק יחיד כי אם $\sum \bar{f}_d = \sum \bar{g}_d$ אז $\sum f_d - g_d \in I$ ומהומוגניות האידיאל $f_d - g_d \in I$, כלומר $\bar{f}_d = \bar{g}_d$ והפירוק יחיד.♦

טענה. יריעה פרוייקטיבית היא איפריקה אמ"ם חוג הקואורדינטות ההומוגני שלה הוא תחום שלמות.

טענת עזר. 8. חוג מדורג הוא תחום שלמות אמ"ם לכל f, g הומוגניים, $fg = 0 \to f = 0 \vee g = 0$.

הוכחה (טענת עזר). $\Longrightarrow$ בשלילה יש איברים ראשונים שאינם מתאפסים $f_i, g_j \neq 0$, ואז בגורם ההומוגני מדרגה $i + j$ נקבל מיחידות הפירוק $f_i g_j = 0$ בסתירה.♦

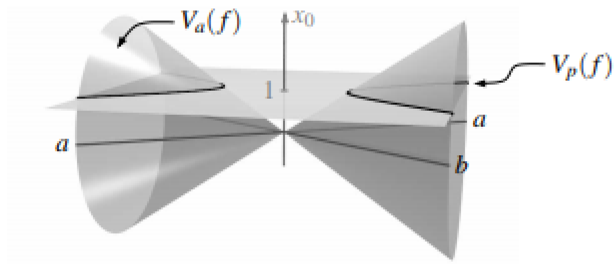
הוכחה (טענה). $\Longrightarrow$ אם $X = X_1 \cup X_2$ אז $I(X) \subset I(X_i)$ ויש $f_i \in I(X_i) \setminus I(X)$ אך $I(X) = \cap I(X_i)$ ולכן $f_1 f_2 \in I(X)$ ולכן $I(X)$ לא ראשוני בסתירה. $\Longleftarrow$ אם $f_i \in k[x_0, ..., x_n] \setminus I(X)$ אז נגדיר $V_i := \mathcal{Z}(I(X) + (f_i))$, טוענים $X = V_1 \cup V_2$. אכן, יהי $x \in X$ אז $f_1 f_2(x) = 0$ ולכן $f_1(x) = 0$ או $f_2(x) = 0$, כלומר $x \in V_1 \vee x \in V_2$. כעת מהאיפריקות $V_1 = X$ (בלי הגבלת הכלליות), כלומר $X = \mathcal{Z}(I(X) + (f_1))$ ולכן $\sqrt{I(X) + (f_1)} = I(X)$, כלומר $f_1 \in I(X)$. ♦

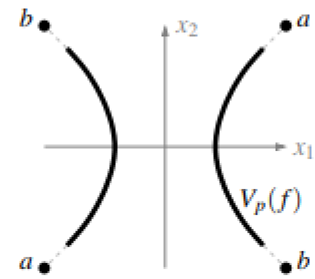
מה בדיוק מתאר חוג הקואורדינטות ההומוגני? נגלה שהוא חוג הקואורדינטות של יריעה אפינית שמתאימה באופן טבעי ליריעה הפרוייקטיבית הנתונה, והמושג שנפתח גם יבהיר לנו עוד את הקשר בין יריעות פרוייקטיביות לאפיניות.

0.7 מעברים בין אפיני לפרוייקטיבי

נחקור את הקשר בין יריעות פרוייקטיביות ליריעות אפיניות. בדוגמה שבציור, $\mathcal{Z}_p(x_1^2 - x_2^2 - x_0^2)$, אנחנו רואים שעל ידי המעבר לקואורדינטות אפיניות ב־U_0 אנו מקבלים את

ההיפרבולה שמשמאל, והיריעה הפרוייקטיבית מוסיפה שתי נקודות באינסוף שמתאימות לשני הישרים שבגובה "הרצפה", $x_0 = 0$, שמקבילים למשטח הגובה ושנמצאים על החרוט. רואים כאן שצורת שעון החול, החרוט, מקודדת את אותה גיאומטריה כמו היריעה הפרוייקטיבית, ושהם במהותן "אותו אובייקט". נהפוך זאת למדויק.





תהי $\pi : \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ העתקת המנה, $(x_0, ...) \mapsto (x_0 : ..)$. יריעה אפינית $X \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ היא **חרוט** אם $kX \subseteq X$, כלומר אם היא איחוד ישרים דרך הראשית.

הפרוייקטיביזציה של חרוט היא היריעה הפרוייקטיבית $\mathbb{P}(X) = \pi(X \setminus \{0\}) = \{(x_0 : ...)\}_{x \in X}$. אם $X \subseteq \mathbb{P}^n$ יריעה פרוייקטיבית אז **החרוט מעליה** הוא $C(X) = \{0\} \cup \pi^{-1}(X)$.

משפט. יש התאמה הפיכה $\{$יריעות פרוייקטיביות ב$\mathbb{P}^n\} \rightleftarrows \{$חרוטים ב$\mathbb{A}^{n+1}\}$ לפי $X \mapsto \mathbb{P}(X)$, $C(X) \leftarrow\!\shortmid X$.

הוכחה. תהי $V_p(S)$ יריעה פרוייקטיבית, אז $C(V_p(S)) = V_a(S)$. ולהיפך, יהי X חרוט, אז $I_a(X)$ אידיאל הומוגני ולכן אם $S = I_a(X)$ אז $X = V_a(S)$, וכעת מספיק להבחין כי $\mathbb{P}(V_a(S)) = V_p(S)$.♦

משפט. חוג הקואורדינטות ההומוגני של יריעה פרוייקטיבית הוא חוג הקואורדינטות האפיני של החרוט מעליה.

הוכחה. כדי להוכיח $S(Y) = A(C(Y))$ די להראות כי $I_p(Y) = I_a(C(Y))$. על אגף שמאל נוכל להפעיל את משפט האפסים האפיני, כי זה בסך הכול אידיאל של חוג פולינומים. הוא רדיקלי ולכן $I_p(Y) = \sqrt{I_p(Y)} = I_a(\mathcal{Z}(I_p(Y)))$. לכן די להוכיח כי $C(Y) = \mathcal{Z}(I_p(Y))$. זה כבר נובע מ־$Y = \mathcal{Z}_p(I_p(Y))$. ♦

0.8 משפט האפסים הפרוייקטיבי

נתאים בין קבוצות אלגבריות פרוייקטיביות לאידיאלים רדיקליים הומוגניים של $k[x_0, ..., x_n]$. ההתאמה כצפוי תהיה בעזרת $\mathcal{Z}_p, I_p$. יש אידיאל רדיקלי אחד שקבוצת האפסים האפינית שלו היא $\{0\}$, שהוא האידיאל $I_0 = (x_0, ..., x_n)$. הוא הומוגני וקבוצת האפסים הפרוייקטיבית שלו היא $\emptyset$, שהאידיאל שמתאים לה הוא $k[x_0, ..., x_n]$ ולא I_0. לכן נצטרך להוציא אותו מההתאמה, ונקרא לו **האידיאל הלא רלוונטי.** זה צפוי כי הוא מתאים לנקודה $0 \in \mathbb{A}^{n+1}$. בנוסף אכן $I_0 = \sqrt{I_0} \neq k[x_0, ..] = I(\emptyset) = I(V(I_0))$. נבחין כי I_0 אינו האידיאל של אף יריעה פרוייקטיבית, כי לו בשלילה $I_0 = I(X)$ נובע $I_0 = I(X) = I(\mathcal{Z}(I(X))) = I(\mathcal{Z}(I_0)) = I(\emptyset) = k[x_0, ...]$, סתירה.

משפט האפסים הפרוייקטיבי. לכל אידיאל J של $k[x_0, ...]$ שעבורו $\sqrt{J} \neq I_0$, מתקיים $I_p(\mathcal{Z}_p(J)) = \sqrt{J}$. מכאן שיש התאמה הפיכה והופכת הכלות $\{$אידיאלים רדיקליים הומוגניים שאינם $I_0\} \leftrightarrow \{$יריעות פרוייקטיביות$\}$.

הוכחה.

$$I_p(V_p(J)) = \{f \in S^h : \forall x \in V_a(J) \setminus \{0\}, f(x) = 0\}$$

אבל הקבוצה שבה f מתאפסת היא סגורה אפינית ולכן אפשר לכתוב

$$I_p(V_p(J)) = \{f \in S^h : \forall x \in \overline{V_a(J) \setminus \{0\}}, f(x) = 0\}$$

אנחנו טוענים $\overline{V_a(J) \setminus \{0\}} = V_a(J)$. אכן, ראשית $V_a(J) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ כי $V_a(\sqrt{J}) \neq \{0\}$, ובנוסף $0 \in \overline{V_a(J) \setminus \{0\}}$ כי $V_a(J) \setminus \{0\}$ מכילה ישרים מנוקבים בראשית. לסיכום

$$I_p(V_p(J)) = \{f \in S^h : \forall x \in V_a(J), f(x) = 0\} = I_p(V_a(J))$$

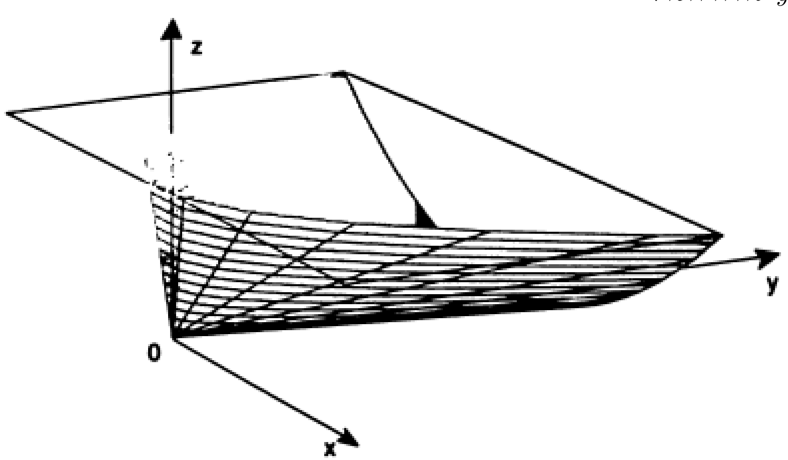
ניזכר שהאידיאל של החרוט $V_a(J)$ הוא הומוגני, ולכן זה שווה ל-$I_a(V_a(J))$ שלפי משפט האפסים האפיני שווה ל-$\sqrt{J}$. ♦

הערה. אותה הוכחה בשינויים קוסמטיים מראה כללית שיש התאמה בין תת־יריעות פרוייקטיביות של יריעה פרוייקטיבית Y לאידיאלים רדיקליים הומוגניים של $S(Y)$ שאינם I_0 .

0.9 דוגמאות

א. נראה שהחיתוך של שתי יריעות פרוייקטיביות יכול לא להיות יריעה פרוייקטיבית, כלומר אי־פריקות אינה נשמרת תחת חיתוך. נתבונן במשטחים הריבועיים ב-$\mathbb{P}^3$ הנתונים על־ידי $\mathcal{Z}(y^2 - xw), \mathcal{Z}(xy - zw)$. אם נקודה $(x : y : z : w) \in \mathbb{P}^3$ נמצאת בחיתוך אז $x^2w = xy^2 = zwy$. לכן $x^2 = zy$ או $w = 0$ (ואז גם $y = 0$). לכן החיתוך של היריעות הוא איחוד זר של שתי סגורות, וממילא אינו יריעה.

איך מדמיינים את היריעות הללו? אז היריעה השנייה היא הסגור הפרוייקטיבי של הפרבולה: אם נצייר את הנקודות הממשיות שלה במרחב האפיני התלת־ממדי, נראה שזאת הפרבולה $y = x^2$ שהרמנו, בתוספת נקודה אחת עבור הסגירות הפרוייקטיבית שמתאימה לציר ה־y שהיה חסר.



ב. כדי לחשב את הסגור הפרוייקטיבי של יריעה אפינית לא מספיק לקחת הומוגניזציה של יוצרים שרירותיים של האידיאל שלה ולראות מה היריעה שהן מגדירות. אכן, נתבונן ביריעה האפינית $\mathcal{Z}(x-y^2, z-xy)$, אז האידיאל שלה נוצר על ידי שני הפולינומים שמגדירים

אותה, וההומוגניזציות שלהם הן כמו בסעיף הקודם ולכן מגדירות קבוצה אלגברית פריקה.[5]

ג.נראה שבביטוי $I(X \cap Y) = \sqrt{I(X)+I(Y)}$ הרדיקל אינו מיותר: ניקח פרבולה $\mathcal{Z}(xy-z^2) \subset \mathbb{P}^3$ ונחתוך אותה עם הישר $y = 0$, אז החיתוך הוא $(1:0:0)$ ולכן האידיאל ההומוגני שלו הוא (x,y) בעוד סכום האידיאלים הוא $(y)+(xy-z^2) = (y,z^2)$ שקטן יותר. גיאומטרית זה כי החיתוך ביניהם הוא "מריבוי 2" וזה תמריץ בהמשך לפתח תורה שתשמור על ריבויים, הווה אומר סכמות.

אפילוג

על מה לא דיברנו? על סגור פרוייקטיבי, למה הוא זהה בטופולוגיה האוקלידית ובטופולוגיית זריצקי ואיך מחשבים אותו (ואת כל שאר המושגים שהצגנו) באופן אלגוריתמי; על שיכון ורונזה שמעביר פולינומים כלליים במרחב הפרוייקטיבי לפולינומים לינאריים במרחב פרוייקטיבי גדול יותר, וכך מאפשר לעתים בהוכחות להסיק את המקרה של פולינום כללי מהמקרה הלינארי; על שיכון סגרה שמעיד שמכפלת מרחבים פרוייקטיביים היא יריעה פרוייקטיבית, ובכך מאפשר לנו להוכיח בעתיד שיריעות פרוייקטיביות אכן מקיימות את המושג הכללי של "יריעה"; את האופן שבו גם אוסף התת־מרחבים ממימד גבוה יותר מ1 הם למעשה יריעה פרוייקטיבית; דוגמאות לעקומות פרוייקטיביות ספציפיות; ספירה של מימדים שתדגים עוד את היתרון של יריעות פרוייקטיביות על פני אפיניות, למשל הטענה ש$dimX + dimY \geq n$ ליריעות פרוייקטיביות ב$\mathbb{P}^n$ גוררת שהחיתוך ביניהן אינו ריק.

[5] מאידך מתברר שכן אפשר לחשב את הסגור הפרוייקטיבי על ידי לקיחת ההומוגניזציות של כל האיברים באידיאל של היריעה האפינית, וגם שאפשר אלגוריתמית למצוא בסיס מיוחד (בסיס גרובנר) לאידיאל של היריעה האפינית שכן מגדיר את הסגור הפרוייקטיבי.