מורפיזמים של יריעות אלגבריות

עומר בן שאול

בהרצאה זו נתעסק במורפיזמים של יריעות אלגבריות.

עד כו התעסקנו ביריעות אלגבריות. הגדרנו מה הן, נתנו דוגמאות והדגמנו תכונות בסיסיות. אלו הם האובייקטים של הקטגוריה שלנו. כעת, כמו בתורות מתמטיות רבות אחרות, נרצה לנסות למצוא דרכים לתאר יחסים בין האובייקטים שלנו, המורפיזמים של הקטגוריה. כמו לדוגמה, מרחבים טופולוגיים והעתקות רציפות ביניהם, חוגים והומומורפיזמים שלהם, מרחבים וקטורים והעתקות לינאריות, יריעות חלקות והעתקות חלקות. המורפיזמים בתורות אלו, כידוע, מהוות חלק מהותי מתורות אלו ונראה טבעי לנסות למצוא אנלוג עבור יריעות אלגבריות.

מלכתחילה לא ברור מה יהיו המורפיזמים שלנו. הם אמורים לשמר את המבנה של היריעה עד כדי ההקשר של גאומטריה אלגברית. כלומר איכשהו נרצה שישמרו גם את הגאומטריה וגם את האלגברה.

דוגמה

נסתכל על שתי היריעות האלגבריות הבאות:

$$Z\left(x\right)\subseteq\mathbb{A}^{2}$$
$$Z\left(x^{3}-y^{2}\right)\subseteq\mathbb{A}^{2}$$

נשים לב כי יש העתקה בינהים

$$\left(x,y\right)\mapsto\left(0,\frac{y}{x}\right)$$
$$\left(0,0\right)\mapsto\left(0,0\right)$$

זוהי העתקה חח"ע ועל, ורציפה ביחס גם לטופולוגיית זריצקי וגם הטופולוגיה האוקלידית כאשר $k=\mathbb{C}$ ומהווה אפילו הומיאומורפיזם. אך למרות שהתמונה הגאומטרית נשמרת, התמונה האלגברית אינה נשמרת. לדוגמה, נשים לב כי הנקודה $\left(0,0\right)$ הינה סינגולרית ב־$Z\left(x^{3}-y^{2}\right)$ אך הנקודה המתאימה לה ב־$Z\left(x\right)$ הינה עצמה $\left(0,0\right)$ ובמקרה זה אינה סינגולרית. משמע המבנה האלגברי של סינגולריות משתנה. בערך, נבין כי זה מתרחש כי הפונקציה שבחרנו היא לא "אלגברית", אינה נתונה ע"י פונקציות אלגבריות. ולכן האלגברה לא נשמרת. אך ההעתקה ההפוכה נראה כי היא כן תהיה מורפיזם כדרוש כי היא "אלגברית"

$$\left(0,t\right)\mapsto\left(t^{2},t^{3}\right)$$

בשביל לדבר על מורפיזמים קודם כל נצטרך להבין מהו המבנה האלגברי של יריעה. אנלוג למה שכעת נעשה הינו מפות חלקות של יריעה חלקה שמייצגות את המבנה החלק של יריעה חלקה. כדומה נרצה למצוא פונקציות שמייצגות אל המבנה האלגברי של יריעה אלגברית. לשם כך נתחיל מכמה מושגים חשובים.

אלומות

הגדרה

יהי X מרחב טופולוגי. נגדיר קטגוריה $\mathfrak{Top}\left(X\right)$ שהאובייקטים שלה הם הקבוצות הפתוחות של X, ולכל הכלה של קבוצות פתוחות $U \subseteq V$ יש מורפיזם יחיד $U \to V$, מורפיזם הזהות יהיה $U \to U$.

קדם אלומה של X עם איברים בקטגוריה C זה פונקטור קונטרווריאנטי $\mathscr{F}$ מ־$\mathfrak{Top}\left(X\right)$ ל־C. לכעת נתעסק ב־C הקטגוריה של חוגים קומוטטיביים עם יחידה. נדרוש גם כי הקבוצה הריקה יותאם לה אובייקט האפס, בעיקר בהקשר בהמשך.

בעצם הדרישה שזה פונקטור קונטרוויארנטי אומרת שכאשר יש הכלה של קבוצות פתוחות $U \subseteq V$ יש העתקה מתאימה למורפיזם ההכלה שנסמנה "צמצום על U", $|_U$. הסימון הזה מוצדק כי בעצם אין תלות ב־V. כלומר אם יש $U \subseteq V \subseteq W$ אז כי $\mathscr{F}$ קונטרווריאנטי נקבל דיאגרמה קומוטטיבית

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}\left(W\right) \arrow[rr, "|_U"] \arrow[dr, "|_V"'] & & \mathscr{F}\left(U\right) \\
& \mathscr{F}\left(V\right) \arrow[ur, "|_U"'] &
\end{tikzcd}$$

דוגמאות

1. להתאים $\mathscr{F}\left(U\right) = A$ חוג כלשהו לכל הקבוצות הפתוחות כאשר המורפיזמים הם פשוט הזהות. לא מעניין כי לא נותן אף מידע ייחודי למרחב.

2. להתאים

$$\mathscr{F}\left(U\right) = C\left(U, \mathbb{R}\right)$$

מחברים ומכפילים נקודתית. מורפיזם הצמצום הוא פשוט צמצום של פונקציות. זה כבר מקרה יותר מעניין מכיוון שנותן מידע לגבי המרחב ויותר ייצוגי למה שנעשה.

3. M יריעה חלקה ו־$\mathscr{F}\left(U\right)$ אוסף הפונקציות החלקות מ־U ל־$\mathbb{R}$.

הגדרה

אם יש נקודה במרחב X, $p \in X$, נסתכל על משפחת האובייקטים הבאה: ניקח את אוסף הקבוצות הפתוחות של המרחב ומכילות את x, נסמן אוסף זה I ונסדר אותו בהכלה הפוכה. I מהווה קבוצה מכוונת שכן עם $U, V \in I$ אז $x \in U, V$ לכן $x \in U \cap V$ ו־$U \cap V$ פתוחה לכן $U \cap V \in I$ וכמובן $U, V \leq U \cap V$. נסתכל על משפחת האובייקטים עם אינדקסים ב־I $\left\{\mathscr{F}\left(U\right)\right\}_{U \in I}$ אז עבור $U \leq V$ כלומר $V \subseteq U$ יש כידוע את הומומורפיזם הצמצום מ־$\mathscr{F}\left(U\right)$ ל־$\mathscr{F}\left(V\right)$ (נסמן רק לצורך הגדרה זו ב־$\mu_{U,V}$). מכיוון ש־$\mathscr{F}$ פרה אלומה, $\mu_{j,k}\mu_{i,j} = \mu_{i,k}$ עבור $i \leq j \leq k$ וכן $\mu_{i,i}$ הזהות. משמע יש לנו משפחה מכוונת של חוגים $\left\{\mathscr{F}\left(U\right)\right\}_{U \in I}$ ולכן נוכל להסתכל על הגבול הישר, לו נקרא הנבט של הקדם אלומה $\mathscr{F}$ בנקודה p

$$\mathscr{F}_p = \underset{I}{\underrightarrow{lim}} \mathscr{F}\left(U\right)$$

בעצם כל איבר של החוג $\mathscr{F}_p$ מיוצג ע"י זוג $\langle s,U\rangle$ כאשר $U\in I$ וכן $s\in\mathscr{F}\left(U\right)$ ומגדירים עליהם יחס שקילות ששני זוגות $\langle s,U\rangle,\langle t,V\rangle$ שקולים אם ורק אם יש $W\subseteq U\cap V$ כך ש־$W\in I$ וכן $s|_W=t|_W$. גאומטרית, כאשר חושבים על אלומות כעל פונקציות הנבט בנקודה זה פונקציות שמוגדרות על סביבה קטנה ארבטיטררית של p. בערך, זה מודד את ההתנהגות המקומית של הקדם אלומה בנקודה הזו.

המקרה המעניין אותנו זה אוספים של פונקציות, ופונקציות הן באופן טבעי מקומיות. זה מתבטא על ידי כך שאם פונקציה היא אפס בכל נקודה היא אפס בסך הכול. בנוסף ניתן להדביק פונקציות יחד, ואם יש כיסוי של המרחב ע"י קבוצות פתוחות ויש לנו פונקציות המוגדרות על הקבוצות בכיסוי ומזדהות בחיתוכים ניתן "להדביק" אותן יחד לפונקציה על כל המרחב. אלו יהיו הדרישות שלנו על אלומה.

דוגמאות

כל הדוגמאות הקודמות פרט לראשונה.

הגדרה

קדם אלומה $\mathscr{F}$ תיקרא אלומה אם מתקיימות הדרישות הבאות:

1. (מקומיות): אם יש כיסוי פתוח של קבוצה פתוחה U ע"י קבוצות פתוחות U_i וכן $s\in\mathscr{F}\left(U\right)$ כך שלכל U_i מתקיים $s|_{U_i}=0$ אז $s=0$.
2. (הדבקה): אם יש כיסוי פתוח של קבוצה פתוחה U ע"י קבוצות פתוחות U_i ויש $s_i\in\mathscr{F}\left(U_i\right)$ כך ש־$s_i|_{U_i\cap U_j}=s_j|_{U_i\cap U_j}$ אז יש $s\in\mathscr{F}\left(U\right)$ כך ש־$s|_{U_i}=s_i$.

כעת בהקשר האלגברי האבסטרקטי הזה, ניתן את האבטיפוס למהו מורפיזם שמכבד את המבנה של האלומה, ואחר כך נראה את המקרה הפרטי ביריעות אלגבריות.

הגדרה

מורפיזם של מרחבים עם אלומות $\left(X,\mathcal{O}_X\right),\left(Y,\mathcal{O}_Y\right)$ זה זוג $\left(f,\phi\right)$ כאשר $f:X\to Y$ רציפה ו־ϕ משפחה של הומומורפיזמים $\mathcal{O}_Y\left(V\right)\to\mathcal{O}_X\left(f^{-1}\left(V\right)\right)$ כך שלכל הכלה $U\subseteq V\subseteq Y$ של קבוצות פתוחות יש דיאגרמה קומוטטיבית

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{O}_Y\left(V\right) & \xrightarrow{\phi_V} & \mathcal{O}_X\left(f^{-1}\left(V\right)\right)\\ \downarrow|_U & & \downarrow|_{\phi^{-1}(U)}\\ \mathcal{O}_Y\left(U\right) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathcal{O}_X\left(f^{-1}\left(U\right)\right)\end{array}$$

דוגמה

ניקח את המקרה ממקודם של יריעות חלקות עם האלומה ממקודם $\left(M,\mathcal{O}_M\right),\left(N,\mathcal{O}_N\right)$. בעצם העתקות חלקות $f:M\to N$ יהוו מורפיזמים של מרחבים עם אלומות אלו: כיצד? ניקח העתקות

$$f_U^*:\mathcal{O}_N\left(U\right)\to\mathcal{O}_M\left(U\right)$$

המוגדר ע"י

$$f^*\left(g\right)=g\circ f$$

כהרכבת חלקות זה יהיה חלק לכן כדרוש והדיאגרמה הקומוטטיבית פשוט תנבע מכך שמסתכלים על צמצום של פונקציות. משמע (f, f^*) תהווה מורפיזם כדרוש וזה יהיה בעצם תכונה מגדירה להעתקות חלקות. בעצם ננסה למצוא אנלוג להקשר האלגברי.

פונקציות רגולריות

כעת נחזור למקרה של יריעה אלגברית ונגדיר אלומה עליה. יש שאלה של מה יהיו הפונקציות שלנו שייצגו את המבנה האלגברי? האם הם יהיו פולינומים מחוג הקואורדינטות? מתברר שזה קצת בררני מדי ולא נותן מספיק מידע. לכן נרצה גם לכלול פונקציות הנתונות כמנות של פולינומים, אך גם זה לא מספיק בגלל שפונקציות רציונליות הן גלובליות ונרצה אובייקטים מקומיים, לכן ניתן את ההגדרה הבאה. נתחיל מהמקרה האפיני:

הגדרה

תהי $X \subseteq \mathbb{A}^n$ יריעה קוואזי אפינית מעל שדה k. תהי $Y \subseteq X$ קבוצה פתוחה ו־ $f : Y \to k$ העתקה. נאמר כי היא רגולרית בנקודה $P \in Y$ אם יש סביבה פתוחה $P \in U \subseteq Y$ ואיברים $g, h \in k[x_1 ... x_n]$ כך ש־h אינה מתאפסת על U וכן על U מתקיים $f = \frac{g}{h}$. f תקרא רגולרית על Y אם היא רגולרית בכל נקודה. נסמן ב־$\mathcal{O}(Y)$ את אוסף הפונקציות הרגולריות על Y. כמובן שמההגדרה ניתן לסכום אותן וכן להכפיל אותן נקודה נקודה ולהיוותר עם פונקציות רגולריות. וכן יש יחידה שהיא מתאימה לפונקציה הרציונלית $\frac{1}{1}$ ואפס שמתאימה ל־$\frac{0}{1}$. בנוסף אם $U \subseteq V$ יש הומומורפיזם $\mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U)$ של צמצום. כמובן שצמצום של U על U זה הזהות, ושלצמצם על W זה כמו לצמצם על V ואז על W. משמע $\mathcal{O}$ היא פרה אלומה. היא כמובן גם מהאופי המקומי של ההגדרה גם אלומה. אלומה זו תקרא אלומת הפונקציות הרגולריות.

דוגמה

המקומיות של ההגדרה של פונקציות רגולריות היא חשובה. נסתכל על

$$X = V(x_1 x_4 - x_2 x_3) \subseteq \mathbb{A}^4$$

. נסמן $Y = V(x_2 x_4)$ קבוצה סגורה, ונגדיר $f : X - Y \to k$ המוגדרת ע"י

$$f(x) = \frac{x_1}{x_2} \qquad x_2 \neq 0$$

$$f(x) = \frac{x_3}{x_4} \qquad x_4 \neq 0$$

אז f היא פונקציה רגולרית אך אינה מנה של פולינומים, כלומר מנה של פולינומים רק מקומית. כדומה נסתכל על $Y' = V(x_2)$ $Y'' = V(x_4)$ תתי קבוצות סגורות, f' : $X - Y' \to k$ וכן $f'' : X - Y'' \to k$ הנתונות ע"י

$$f'(x) = \frac{x_1}{x_2}$$

$$f''(x) = \frac{x_3}{x_4}$$

אז אלו מנות של פולינומים אך אם ננסה להדביק אותן יחד ל־$X - Y$ נקבל את f שאינה פונקציה רציונלית, משמע אם נבחר רק פונקציות רציונליות אין את אקסיומת ההדבקה ולכן לא תהיה לנו אלומה.

הערה

בהקשר הנוכחי שלנו הדבקה תהיה פחות חשובה כי אנו לבנתיים מסתכלים על יריעות אלגבריות "פשוטות", המוגדרות באופן גלובלי. ההדבקה תהווה כלי מהותי מתי שנתעסק ביריעות אלגבריות המודבקות מיריעות פשוטות או בהקשר של סכמות, שאלו אובייקטים המוגדרים על ידי הרכבה של אובייקטים קטנים פשוטים יותר ובשביל להעביר את התכונות המקומיות באובייקטים הקטנים האלו לתכונות גלובליות של הסכמות ויריעות צריך להדביק את איברי האלומה.

למה

תהי $f \in \mathcal{O}(Y)$ רגולרית, אז f הינה רציפה

הוכחה

עלינו להראות כי לכל קבוצה סגורה ב־k התמונה ההפוכה הינה סגורה. כל קבוצה סגורה ב־k היא בסך הכול קבוצה סופית לכן מספיק להראות שלכל נקודה התמונה ההפוכה הינה סגורה. נוכל לבדוק זאת מקומית, כלומר אם יש כיסוי פתוח של המרחב ע"י קבוצות U_i ויש קבוצה Z כך שכל $Z \cap U_i$ סגורה אז Z סגורה. מכיוון ש־f רגולרית יש כיסוי של Y ע"י קבוצות פתוחות U כך שעל כל אחת מהן f היא רציונלית. לכן מספיק לבדוק את המקרה של $g : U \to k$ רציונלית, כלומר שהיא מהצורה $\frac{p}{q}$ כאשר p, q פולינומים ו־q לא מתאפס על U. אז

$$\begin{aligned} g^{-1}(a) = \{x \in U \mid g(x) = a\} = \left\{x \in U \mid \frac{p(x)}{q(x)} = a\right\} = \\ = \{x \in U \mid p(x) = aq(x)\} = \{x \in U \mid p(x) - aq(x) = 0\} = \\ = \{x \in U \mid x \in V(p - aq)\} = U \cap V(p - aq) \end{aligned}$$

מהגדרת טופולוגיית זריצקי $V(p - aq)$ סגורה ב־$\mathbb{A}^n$ לכן $U \cap V(p - aq)$ סגורה ב־$U \cap V(p - aq)$ כדרוש, מש"ל.

מסקנה

נניח כי יש לנו יריעה אפינית X, $\emptyset \neq U \subseteq V \subseteq X$ פתוחות, $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(V)$ כך ש־$f_1|_U = f_2|_U$, אז כי U צפופה ו־f_1, f_2 רציפות נסיק כי $f_1 = f_2$. בפרט, אם $f \in \mathcal{O}(V)$ רציונלית על U מהצורה $\frac{p}{q}$ כאשר $q \neq 0$ על כל V, אז $f = \frac{p}{q}$.

כעת נעבור למקרה של יריעה קוואזי פרויקטיבית:

הגדרה

תהי $X \subseteq \mathbb{P}^n$ יריעה קוואזי פרויקטיבית. תהי $Y \subseteq X$ תת קבוצה פתוחה. נאמר כי $f : Y \to k$ היא רגולרית בנקודה $P \in Y$ אם יש $P \in U \subseteq Y$ כך שיש $g, h \in k[x_1 ... x_n]$ הומוגניים מאותה דרגה כך ש־h לא מתאפס על U וכן לכל $x \in U$ מתקיים $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ שמוגדר היטב כי g, h הומוגניים מאותה הדרגה. היא תקרא רגולרית על Y אם היא רגולרית בכל נקודה של Y, ונסמן $f \in \mathcal{O}(Y)$. זה כדומה למקרה האפיני, אלומה שנקרא לה כדומה אלומת הפונקציות הרציונליות על X. כדומה למקרה האפיני, כל פונקציה רגולרית היא רציפה ולכן גם כאן יש כאן את אותן המסקנות.

הגדרה

תהי X יריעה קוואזי אפינית או קוואזי פרוייקטיבית. נסתכל על אוסף הזוגות (U, f) כאשר $U \neq \emptyset$ פתוחה ב־X וכן $f \in \mathcal{O}(U)$. נגדיר יחס שקילות על הזוגות האלו ע"י $(U, f) = (V, g)$ אם $f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}$

טענה

זהו אכן יחס שקילות

הוכחה

רפלקסיביות וסימטריות ברורים לחלוטין.

עבור טרנזיטיביות: נניח כי (U,f) שקול ל־(V,g) ששקול ל־(W,h). משמע $g|_{U\cap V} = f|_{U\cap V}$ וכן $h|_{V\cap W} = g|_{V\cap W}$. אז

$$\begin{aligned}(f|_{U\cap W})|_{U\cap V\cap W} = h|_{U\cap V\cap W} = (f|_{U\cap V})|_{U\cap V\cap W} = (g|_{U\cap V})|_{U\cap V\cap W} = \\ = g|_{U\cap V\cap W} = (g|_{U\cap W})|_{U\cap V\cap W} = (h|_{U\cap W})|_{U\cap V\cap W}\end{aligned}$$

$U\cap V\cap W\neq\emptyset$ שכן היא חיתוך של קבוצות פתוחות לא ריקות במרחב אי פריק, וכן זו תת קבוצה פתוחה של $U\cap W$ שבה $f|_{U\cap W}, h|_{U\cap W}$ מזדהות, אז מהמסקנה הקודמת $f|_{U\cap W} = h|_{U\cap W}$ כלומר (f,U) שקול ל־(h,W).

הגדרה

נסמן כל מחלקת שקילות ב־$\langle U,f\rangle$. ברור כי ניתן לסכום ולהכפיל מחלקות שקילות ע"י בחירת נציגים, שכן כל שתי קבוצות פתוחות נחתכות, וברור כי אין תלות בבחירת נציגים. אז מקבלים את חוג הפונקציות הרציונליות על Xשנסמנו $K(X)$. זהו חוג, שניתן לסכום $\langle U,f\rangle + \langle V,g\rangle = \langle U\cap V, f+g\rangle$ וכדומה לכפול, יש לנו יחידה $\langle 1,X\rangle$ ואפס $\langle 0,X\rangle$.

הערה

גם במקרה של הנבט וגם במקרה של שדה הפונקציות הרציונליות, עבור איברים $\langle U,f\rangle, \langle V,g\rangle$ הקיום של $W\subseteq U\cap V$ הדרושה בשביל השוויון ממסקנה קודמת, כמו בהוכחה הנוכחית, מהרציפות של פונקציות רגולריות וצפיפות של קבוצות פתוחות, שקולה לשוויון על $U\cap V$

טענה

$K(X)$ שדה

טענה

לכל זוג $\langle U,f\rangle$ עבור $f\neq 0$, כי $k-\{0\}$ פתוחה ו־f רציפה התמונה ההפוכה W פתוחה ולא ריקה, ועליה $\frac{1}{f}$ מוגדר, אז $\left\langle W,\frac{1}{f}\right\rangle \in K(X)$ וכן

$$\langle U,f\rangle \left\langle W,\frac{1}{f}\right\rangle = \left\langle U\cap W, f\cdot\frac{1}{f}\right\rangle = \langle U\cap W, 1\rangle = \langle X,1\rangle$$

משמע $\left\langle W,\frac{1}{f}\right\rangle$ הופכי שמוכיח ש־$K(X)$ שדה.

טענה

$\mathcal{O}_P$ חוג מקומי.

הוכחה

ברור כי עבור זוג $\langle U,f\rangle$ התכונה ש־$f(P)=0$ מוגדרת היטב כי אם $\langle U,f\rangle=\langle V,g\rangle$ יש קבוצה פתוחה $P\in W\subseteq U\cap W$ בה $f|_W=g|_W$ בפרט הן שוות על P, כלומר $g(P)=f(P)=0$. כמובן שהקבוצה

$$\mathfrak{m}=\{\langle U,f\rangle\in\mathcal{O}_p\mid f(P)=0\}$$

אם איבר $\langle U,f\rangle\notin\mathfrak{m}$ כלומר $f(P)\neq 0$ אז מרציפות, כי $k-\{0\}$ פתוחה ו־f רציפה התמונה ההפוכה W פתוחה ו־$P\in W$ ו־$\frac{1}{f}$ מוגדר על W אז $\left\langle W,\frac{1}{f}\right\rangle\in\mathcal{O}_P$ ולכן

$$\langle U,f\rangle\left\langle W,\frac{1}{f}\right\rangle=\langle U\cap W,1\rangle$$

משמע $\langle U,f\rangle$ הפיך, כלומר כל איבר שלא ב־$\mathfrak{m}$ הפיך, כלומר $\mathcal{O}_P$ חוג מקומי עם אידיאל מקסימלי $\mathfrak{m}$.

נציין לפני המשפט הבא שממשפט האפסים של הילברט יש לנו התאמה חח"ע ועל בין אידיאלים מקסימליים של $k[x_1...x_n]$ לבין נקודות של $\mathbb{A}^n$, המתאימה בין נקודה P לבין האידיאל המקסימלי של פולינומים המתאפסים על P, $\mathfrak{m}_P$, כלומר $I(P)$. ממשפט ההתאמה לכל יריעה אפינית X, האידיאלים המקסימליים של $A(X)$ מתאימים לאידיאלים שמכילים את $I(X)$, $\mathfrak{m}_P$ עבור נקודות P, כלומר האלו כך ש־$Z(I(\mathfrak{m}_P))\subseteq Z(I(X))=X$, כלומר $P\in X$, משמע יש התאמה חח"ע ועל בין $\mathfrak{m}_P$ האידיאלים המקסימליים של $A(X)$ לבין הנקודות P, של X.

כעת נציג משפט שיבהיר לנו עבור המקרה האפיני, כיצד נראית אלומת הפונקציות הרגולריות. לפני שנגיע אל המקרה הפרויקטיבי נאלץ קודם כל להגיע למורפיזמים של יריעות, שכן נראה כיצד דרך מורפיזמים נוכל להעביר את המקרה האפיני אל המקרה הפרויקטיבי.

משפט

תהי X יריעה אפינית:

1. $A(X)\cong\mathcal{O}(X)$
2. לכל נקודה $\mathcal{O}_P\cong A(X)_{\mathfrak{m}_P}$ וכן $dim_{Krull}(\mathcal{O}_P)=dim(X)$
3. $K(X)$ הוא איזומורפי לשדה המנות של $A(X)$, ולכן מהווה הרחבה של k מדרגה טרנצנדנטלית $dim(X)$

הוכחה

נשים לב כי כל פולינום ב־$k[x_1...x_n]$ מהווה באופן טבעי פונקציה רגולרית על X, כלומר יש הומומורפיזם $k[x_1...x_n]\to\mathcal{O}(X)$, והגרעין הוא אוסף הפולינומים שבכל נקודה ב־X מקבלים את הנקודה 0, כלומר $I(X)$ לכן מקבלים העתקה חח"ע טבעית

$$T:A(X)={}^{k[x_1...x_n]}/_{I(X)}\to\mathcal{O}(X)$$

בנוסף נשים לב כי כל פונקציה רציונלית $\frac{f}{g}$ כך ש־$g(P)\neq 0$, כלומר $g\notin \mathfrak{m}_P$, יש זיהוי טבעי ב־$\mathcal{O}_P$ ע"י לקיחת הקבוצה הפתוחה בה g לא מתאפס W, והתאמת $\left\langle W,\frac{f}{g}\right\rangle$. אז מקבלים הומומורפיזם טבעי

$$R_P : A(X)_{\mathfrak{m}_P} \to \mathcal{O}_P$$

היא כמובן חח"ע כי אם $\left\langle W,\frac{f}{g}\right\rangle = 0$ יש סביבה U של P בה $f|_U = 0$ וכזכור ממסקנה קודמת נסיק כי $f=0$ על X, כלומר $\frac{f}{g}=0$ ב־$A(X)_{\mathfrak{m}_P}$. בנוסף, מהגדרת פונקציה רגולרית אם יש $\langle U,f\rangle \in \mathcal{O}_P$ יש סביבה $V\subseteq U$ בה f רציונלי מהצורה g ואז $g\in A(X)_{\mathfrak{m}_P}$ והתמונה שלו $\langle U,f\rangle$ (כלומר הוא התמונה ההפוכה). בסך הכול ההומומורפיזם הינו איזומורפיזם. כעת נסיק

$$dim_{Krull}(\mathcal{O}_P) = dim_{Krull}\left(A(X)_{\mathfrak{m}_P}\right) = dim(X)$$

נוכל להגדיר העתקה L מ־$K(X)$ לשדה המנות של $A(X)$, F. כי כל איבר ב־$K(X)$ הוא מהצורה $\langle U,f\rangle$אז אם נבחר $P\in U$, ניתן לזהות $\langle U,f\rangle\in\mathcal{O}_P$. מהגדרת מחלקות השקילות ב־$K(X)$ וב־$\mathcal{O}_P$ נובע שזה מוגדר היטב. לכן ע"י האיזומומורפיזם הקודם ניתן לחשוב עליו כאיבר ב־$A(X)_{\mathfrak{m}_P}$ שמוכל בשדה המנות. זה לא תלוי בבחירת הנקודה שכן עם $P,Q\in U$ אז יש תתי קבוצות פתוחות $V,W\subseteq U$ כך ש־$P\in V$ וכן $Q\in W$, ו־f רציונלי על V מהצורה g וכן על W מהצורה h. אז g ו־hמזדהים על $V\cap W$ וכמקודם נסיק כי $g=h$ כאיברים בשדה המנות של $A(X)$. הפונקציה הזו מ־$K(X)$ לשדה המנות של $A(X)$ הינה הומומורפיזם, שכן עם יש לנו שתי פונקציות $\langle U,f\rangle,\langle V,g\rangle$, נבחר נקודה $P\in U\cap V$. אז $\langle U,f\rangle+\langle V,g\rangle=\langle U\cap V,f+g\rangle$ וזה עובר ל־$\langle U\cap V,f+g\rangle\in\mathcal{O}_P$ ובוחרים תת קבוצה $W\subseteq U$ וכן $W'\subseteq V$ בהן f,g בהתאמה רציונליות מהצורה h,h' אז ההעתקה מעבירה את $\langle U,f\rangle,\langle V,g\rangle$ בהתאמה ל־h,h' וכי $W\cap W'\subseteq U\cap V$ פתוחה ועליה $f+g$ רציונלית מהצורה $h+h'$ אז $\langle U,f\rangle+\langle V,g\rangle$ עובר ל־$h+h'$, כדומה $\langle U,f\rangle\langle V,g\rangle$ עובר ל־hh'. מכאן יש לנו הומומורפיזם של שדות. הוא על שכן עם יש מנה $\frac{f}{g}$ בה $g\neq 0$ אז U אוסף הנקודות בה $g\neq 0$ היא פתוחה ב־X, אז $\left\langle U,\frac{f}{g}\right\rangle\in K(X)$ עובר ל־$\frac{f}{g}$. ההומומורפיזם הזה בפרט אינו 0 ולכן כי הוא הומומורפיזם של שדות הוא חח"ע אז הוא איזומורפיזם. מהטיעון מקודם שנתנו לכך ש־L היא על נסיק כי ההעתקה ההופכית J נתונה ע"י לקיחת מנה $\frac{f}{g}$, אוסף הנקודות בהן g לא מתאפס W, והגדרת $J\left(\frac{f}{g}\right)=\left\langle W,\frac{f}{g}\right\rangle$.

נשים לב כי ניתן להגדיר $L_P:\mathcal{O}(X)\to\mathcal{O}_P$ לכל P באופן טבעי ע"י לקיחה לכל $f\in\mathcal{O}(X)$ את $\langle X,f\rangle\in\mathcal{O}_P$. ניתן לשכן באופן טבעי $H_P:\mathcal{O}_P\to K(X)$. ברור כי יש דיאגרמה קומוטטיבית

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(X) \arrow[r, "L_P"] & \mathcal{O}_P \arrow[r, "H_P"] & K(X) \\
A(X) \arrow[u, "T"] \arrow[r] & A(X)_{\mathfrak{m}_P} \arrow[u, "R_P"] \arrow[r] & F \arrow[u, "J"]
\end{tikzcd}$$

לכן, ע"י האיזומורפיזם J ניתן לזהות את $K(X)$ כ־$A(X)_{(0)}$, ובו זמנית את $\mathcal{O}_P$ תחת אותו זיהוי כ־$A(X)_{\mathfrak{m}_P}$ וכן תחת אותו הזיהוי $\mathcal{O}(X)$ מכיל את $A(X)$. מצד שני תחת הזיהוי הזה

$$\mathcal{O}(X)\subseteq\bigcap_P \mathcal{O}_P=\bigcap_P A(X)_{\mathfrak{m}_P}=A(X)$$

לכן תחת הזיהוי הזה

$$\mathcal{O}(X)=A(X)$$

כלומר T מהווה איזומורפיזם, כדרוש.

סוף, סוף, נוכל להגדיר את הקטגוריה של יריעות אלגבריות:

מורפיזמים של יריעות

הגדרה

הקטגוריה של יריעות, האובייקטים שלה יהיו יריעות קוואזי אפיניות וקוואזי פרויקטיביות (כולל יריעות אפיניות ופרויקטיביות). נשים לב כי כל פונקציה רציפה $f:X\to Y$ משרה לכל קבוצה פתוחה $V\subseteq Y$ הומומורפיזם $f^*:C(V,k)\to C\left(f^{-1}(V),k\right)$. העתקה רציפה f בין יריעות X,Y תקרא מורפיזם אם לכל $g\in\mathcal{O}(V)$ מתקיים כי $f^*g\in\mathcal{O}\left(f^{-1}(V)\right)$, כלומר f^* מהווה מורפיזם של אלומות. אם מורפיזם של יריעות הוא חח"ע ועל, וכן f^{-1} גם הוא מורפיזם אז f יקרא איזומורפיזם.

הערה

מיידית מהאופן בו הגדרנו נובע כי הרכבה של מורפיזמים היא מורפיזם וכן מורפיזמים ל-k הם בדיוק הפונקציות הרגולריות.

באמת ההגדרה שנתנו למורפיזמים מכבדת גם את הגאומטריה, משמע הן העתקות רציפות, וגם את האלגברה, שכן (f,f^*) מהווה מורפיזם של מרחבים עם אלומות.

טענה

יהי $U_i\subseteq\mathbb{P}^n$ הקבוצה המוגדרת ע"י $x_i\neq 0$ אז ההעתקה $f:U_i\to\mathbb{A}^n$ מהווה איזומורפיזם של יריעות.

הוכחה

כידוע, ההעתקה מהווה איזומורפיזם, אז נותר להראות ש-f,f^{-1} מתאימים בדיוק בין הפונקציות הרגולריות על $U_i,\mathbb{A}^n$. תהי $Y\subseteq\mathbb{A}^n$ פתוחה ו-$g\in\mathcal{O}(Y)$. אז לנקודה $[a_0:...:a_n]\in f^{-1}(Y)$

$$g\left(f\left[a_0:...:a_n\right]\right)=g\left(\frac{a_0}{a_i}...\frac{\hat{a}_i}{a_i}...\frac{a_n}{a_i}\right)$$

אז אם יש נקודה $[a_0:...:a_n]\in f^{-1}(Y)$ מתקיים של-$f\left[a_0:...:a_n\right]$ יש סביבה $V\subseteq Y$ שבה g מנה מהצורה $\frac{p}{q}$ כאשר $p,q\in k\left[x_1...x_n\right]$. אז $f^{-1}(V)$ סביבה של $[a_0:...:a_n]$ וכן בסביבה זו

$$g\left(f\left[b_0:...:b_n\right]\right)=g\left(\frac{b_0}{b_i}...\frac{\hat{b}_i}{b_i}...\frac{b_n}{a_n}\right)=$$

$$=\frac{p\left(\frac{b_0}{b_i}\cdots\frac{\hat{b}_i}{b_i}\cdots\frac{b_n}{a_n}\right)}{q\left(\frac{b_0}{b_i}\cdots\frac{\hat{b}_i}{b_i}\cdots\frac{b_n}{a_n}\right)}$$

נסמן

$$\begin{aligned} p &= \sum a_{i_1...i_n} x_1^{i_1}...x_n^{i_n} \\ q &= \sum b_{i_1...i_n} x_1^{i_1}...x_n^{i_n} \\ deg\left(p\right) &= j \\ deg\left(q\right) &= h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\left(f\left[b_0 : ... : b_n\right]\right) = g\left(\frac{b_0}{b_i}...\frac{\hat{b_i}}{b_i}...\frac{b_n}{a_n}\right) &= \frac{p\left(\frac{b_0}{b_i}...\frac{\hat{b_i}}{b_i}...\frac{b_n}{a_n}\right)}{q\left(\frac{b_0}{b_i}...\frac{\hat{b_i}}{b_i}...\frac{b_n}{a_n}\right)} \\ &= \frac{\sum a_{i_1...i_n}\frac{b_0^{i_1}...b_n^{i_n}}{b_i^{i_1+...+i_n}}}{\sum b_{i_1...i_n}\frac{b_0^{i_1}...b_n^{i_n}}{b_i^{i_1+...+i_n}}} = \frac{\frac{\sum a_{i_1...i_n} b_0^{i_1}...b_n^{i_n} b_i^{j-i_1-...-i_n}}{b_i^j}}{\frac{\sum b_{i_1...i_n} b_0^{i_1}...b_n^{i_n} b_i^{j-i_1-...-i_n}}{b_i^h}} = \\ &= \frac{b_i^h\left(\sum a_{i_1...i_n} b_0^{i_1}...b_n^{i_n} b_i^{j-i_1-...-i_n}\right)}{b_i^j\left(\sum b_{i_1...i_n} b_0^{i_1}...b_n^{i_n} b_i^{j-i_1+...-i_n}\right)} \end{aligned}$$

כל אחד מהמונומים במונה יהיה מדרגה

$$h + \left(i_1 + ... + i_n\right) + \left(j - i_1 - ... - i_n\right) = h + j$$

וגם כדומה במכנה, משמע קיבלנו ש-$g\left(f\left[b_0 : ... : b_n\right]\right)$ יהווה מנה של שני פולינומים הומוגניים מאותה הדרגה בסביבה הזו, ולכל נקודה יש סביבה כזו לכן $g \circ f \in \mathcal{O}\left(f^{-1}\left(Y\right)\right)$ שמוכיח ש-Y אכן מורפיזם, כדומה גם ההופכי.

לפני המשפט הבא נכיר כמה מושגים. עבור חוג מדורג S, אידיאל הומוגני ראשוני $\mathfrak{p}$, תהי T קבוצת האיברים ההומוגנים שלא ב-$\mathfrak{p}$, אז T כפלית ול-$T^{-1}S$ דירוג טבעי ע"י $deg\frac{f}{g} = deg\left(f\right) - deg\left(g\right)$, נסמן ב-$S_{(\mathfrak{p})}$ את אוסף האיברים מדרגה אפס ב-$T^{-1}S$, כלומר כל המנות $\frac{f}{g}$ כאשר f, g הומוגניים מאותה הדרגה וכן $g \notin \mathfrak{p}$.

משפט

תהי $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ יריעה פרויקטיבית עם חוג קואורדינטות הומוגני $S\left(Y\right)$, אז:

1. $\mathcal{O}\left(Y\right) \cong k$
2. $\mathcal{O}_P \cong S\left(Y\right)_{\left(\mathfrak{m}_P\right)}$
3. $K\left(Y\right) \cong S\left(Y\right)_{\left((0)\right)}$

הוכחה

נסמן $Y_i = U \cap Y_i$. ניקח את המורפיזמים מהלמה הקודמת ϕ_i, אז הם נותנים לנו איזומורפיזם בין $k\left[y_1...y_n\right]$ לבין $k\left[x_0...x_n\right]_{(x_i)}$ ע"י התאמה ϕ_i^* בין $f\left(y_1...y_n\right)$ לבין $f\left(\frac{x_0}{x_i}...\frac{\hat{x_i}}{x_i}...\frac{x_n}{x_i}\right)$. נשים לב כי Y_i ע"י האיזומורפיזם המושרה מצמצום ϕ_i ו־ψ_iניתן לחשוב עליה כיריעה אפינית, וההתאמה הקודמת מכך תתאים בין הפולינומים $I\left(Y_i\right)$ לבין $I\left(Y\right)k\left[x_0...x_n\right]_{(x_i)}$ לכן מקבלים איזומורפיזם ψ_i^* מושרה בין המנות $A\left(Y_i\right)$ ו־$S\left(Y\right)_{(x_i)}$.

כעת אם יש $P \in Y$ נבחר $P \in Y_i$ ואז הנבט יהיה זהה כאשר נאבחן את P כנקודה ב־P_i ולכן מהמשפט הקודם והאיזומורפיזם הקודם נקבל $\mathcal{O}_P \cong A\left(Y_i\right)_{\mathfrak{m}'_P}$ כאשר $\mathfrak{m}'_P$ האידיאל המקסימלי המתאים ל־P, ומיידית $\psi_i^*\left(\mathfrak{m}'_P\right) = \mathfrak{m}_P$. ולכן מקבלים איזומורפיזם מושרה $\mathcal{O}_P \cong S\left(Y\right)_{(\mathfrak{m}_P)}$.

כדומה, נשים לב כי $K\left(Y\right)$ שווה ל־$K\left(Y_i\right)$ שאיזומורפי לשדה המנות של $A\left(Y_i\right)$ שע"י ψ_i^* איזומורפי ל־$S\left(Y_i\right)_{(0)}$.

כעת תהי $f \in \mathcal{O}\left(Y\right)$. כעת היא רגולרית על כל Y_i לכן ניתן לחשוב על $f \in A\left(Y_i\right)$, אך כעת ראינו איזומורפיזם $f \in S\left(Y\right)_{(x_i)}$ אז נסיק שניתן לכתוב את f בתור $\frac{g_i}{x_i^{N_i}}$ כאשר $g_i \in S\left(Y\right)$ הומוגני מדרגה N_i. כאשר נחשוב על $S\left(Y\right), K\left(Y\right), \mathcal{O}\left(Y\right)$ כתתי חוגים של שדה המנות של $S\left(Y\right)$, L נקבל כי $x_i^{N_i} f \in S\left(Y\right)_{N_i}$. נבחר $N \geq \sum N_i$. אז $S\left(Y\right)_N$ נוצר כמרחב וקטורי מעל k על ידי מונומים מאורך N של $x_0...x_n$, אז בכל אחד מהמונומים לפחות אחד מה־x_i מופיע לפחות בחזקה $x_i^{N_i}$ ואז להכפיל ב־f יותיר אותנו ב־$S\left(Y\right)_{N_i}$ ולהכפיל בשאר המונומים יביא אותנו ל־$S\left(Y\right)_N$, בסך הכול $S\left(Y\right)_N f \subseteq S\left(Y\right)_N$ ובאינדוקציה $S\left(Y\right)_N f^q \subseteq S\left(Y\right)_N$, בפרט $x_0^N f^q \in S\left(Y\right)$, לכן $S\left(Y\right)\left[f\right]$ מוכל ב־$x_0^{-N} S\left(Y\right)$ ולכן כי $S\left(Y\right)\left[f\right]$ תת מודול של מודול נוצר סופית מעל חוג נתרי נסיק כי $S\left(Y\right)\left[f\right]$ נוצר סופית מעל $S\left(Y\right)$ משמע f שלם מעל $S\left(Y\right)$ ולכן יש משוואה

$$f^m + a_{m-1} f^{m-1} + ... + a_0 = 0$$

מכיוון ש־f הומוגני מדרגה 0 נסיק כי ניתן להחליף כל אחד מה־a_i במרכיבים ההומוגניים ומכאן ניתן לחשוב על $a_i \in k$, אך f מקיים משוואה אלגברית מעל שדה סגור אלגברית ולכן $f \in k$. לכן $\mathcal{O}\left(Y\right) \cong k$.

כעת נסווג כיצד נראים מורפיזמים במקרה האפיני:

למה

נניח כי X יריעה כלשהי ו־$Y \subseteq \mathbb{A}^n$ יריעה אפינית, אז $\phi : X \to Y$ מורפיזם אם ורק אם לכל הטלה על הקואורדינטות $x_i : Y \to \mathbb{A}^n$ מתקיים כי $x_i \circ \phi$ רגולרי.

הוכחה

מצד אחד כי x_i מורפיזם אז אם ϕ מורפיזם כל $x_i \circ \phi$ מורפיזם ל־k כלומר רגולרי.

מצד שני נניח כי כל $x_i \circ \phi$ רגולרי. לכן ע"י חיבור וכפל של פונקציות רגולריות, לכל פולינום $f \in k\left[x_1...x_n\right]$ מתקיים כי $f \circ \phi$ יהיה רגולרי. נראה כי ϕ רציפה, כלומר תמונה הפוכה של קבוצה סגורה היא סגורה. נראה עבור הבסיס $V\left(f\right) \cap Y \subseteq Y$, אז כי $f \circ \phi$ רגולרי הוא רציף, לכן $\left(f \circ \phi\right)^{-1}\left(0\right)$ סגורה, כלומר $\phi^{-1}\left(V\left(f\right) \cap Y\right)$ סגורה כדרוש. כלומר ϕ רציפה. לבסוף, אם $U \subseteq Y$ פתוחה ו־$g \in \mathcal{O}\left(U\right)$ אז לכל $x \in \phi^{-1}\left(U\right)$ יש ל־$\phi\left(x\right)$ סביבה $V \subseteq U$ בה g נתונה ע"י מנה של פולינומים מתאימה $\frac{p}{q}$, אז בסביבה $\phi^{-1}\left(V\right)$ (סביבה כי ϕ רציפה) מתקיים כי

$$g \circ \phi = \frac{p\left(\phi\left(x\right)\right)}{q\left(\phi\left(x\right)\right)} = \frac{p\left(x_1 \circ \phi, ..., x_n \circ \phi\right)}{q\left(x_1 \circ \phi, ..., x_n \circ \phi\right)}$$

כי $x_i \circ \phi$ רגולריות יש סביבות של x V_i בהן הן נתונות כמנות של פולינומים $\frac{p_i}{q_i}$ (במקרה הפרויקטיבי הומוגניים מאותה הדרגה). נחתוך אותן עם $\phi^{-1}(V)$ ונקבל סביבה $W \subseteq \phi^{-1}(V)$ בה

$$g \circ \phi = \frac{p\left(\frac{p_1(x)}{q_1(x)} \dots \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right)}{q\left(\frac{p_1(x)}{q_1(x)} \dots \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right)}$$

במקרה ש־X קוואזי אפינית כבר ברור שבסביבה זו $g \circ \phi$ מנה של פולינומים ומכאן ϕ כדרוש מורפיזם. במקרה הקוואזי פרויקטיבי כבהוכחה קודמת נקבל גם שהפולינומים האלו הומוגניים מאותה הדרגה ולכן כדומה ϕ מורפיזם.

משפט

נניח כי X יריעה כלשהי ו־$Y \subseteq \mathbb{A}^n$ יריעה אפינית, אז יש שקילות טבעית

$$\alpha : Hom(X,Y) \to Hom(A(Y), \mathcal{O}(X))$$

כאשר ה־$Hom(X,Y)$ משמע מורפיזמים של יריעות, ו־$Hom(A(Y), \mathcal{O}(X))$ הומומורפיזמים של אלגבראות מעל k. ה־α משמרים הרכבות בסדר הפוך.

הוכחה

עבור מורפיזם $\phi \in Hom(X,Y)$, ϕ^* כידוע מהווה הומומורפיזם של אלגבראות מ־$A(Y) \cong \mathcal{O}(Y)$ ל־$\mathcal{O}(X)$, בעצם $\phi^* \in Hom(A(Y), \mathcal{O}(X))$ אז נגדיר $\phi^* = \alpha(\phi)$. מיידית מהגדרה זה משמר הרכבות שכן

$$(\phi \circ \psi)^*(g) = g \circ \phi \circ \psi = \psi^*(g \circ \phi) = \psi^*(\phi^*(g))$$

נותר להראות כי העתקה זו חח"ע ועל. לשם כך נגדיר העתקה הופכית β. ניקח $f \in Hom(A(Y), \mathcal{O}(X))$. כידוע $A(Y) \cong {}^{k[x_1 \dots x_n]}/_{I(Y)}$, נסמן ב־$\overline{x_i}$ את התמונות של x_i ב־$A(Y)$. נגדיר $\xi_i = f(\overline{x_i})$ וכן נגדיר $\phi = \beta(f)$ ע"י

$$\phi(x) = (\xi_1(x) \dots \xi_n(x))$$

נראה כי ϕ אכן מורפיזם. מיידית כי $f \in Hom(A(Y), \mathcal{O}(X))$ אז

$$x_i \circ \phi = \xi_i = f(\overline{x_i}) \in \mathcal{O}(X)$$

משמע רגולריות לכן מהלמה ϕ מורפיזם.

נותר להראות כי α, β הופכיים, לדוגמה נראה $\beta(\alpha(\phi)) = \phi$. $\alpha(\phi) = \phi^*$. אז בסימונים הקודמים

$$\xi_i = \phi^*(\overline{x_i}) = \overline{x_i} \circ \phi$$

אז

$$\beta(\alpha(\phi)) = (\overline{x_1} \circ \phi \dots \overline{x_n} \circ \phi) = \phi$$

כדומה גם הם הופכיים בכיוון ההפוך, לכן α, β חח"ע ועל.

ישנו המקרה הפרטי שגם X הינו אפיני ולכן מקבלים מסקנות חשובות

מסקנה

X,Y יריעות אפיניות איזומורפיות אם ורק אם $A\left(X\right),A\left(Y\right)$ איזומורפיים כאלגבראות מעל k.

מסקנה

יש שקילות קטגורית בין קטגוריית היריעות האפיניות וקטגוריית האלגבראות הנוצרות סופית מעל k שהינן תחומי שלמות המתאים בין יריעה לחוג הקואורדינטות ובין מורפיזמים להומומורפיזמים של אלגבראות כמו במשפט הקודם.

אתן דוגמה אחת למחלקה מעניינת של מורפיזמים. נשים לב כי אם יש יריעות אפיניות $X\subseteq\mathbb{A}^{n}$ וכן $Y\subseteq\mathbb{A}^{m}$ יש מבנה של קבוצה אלגברית על $X\times Y\subseteq\mathbb{A}^{n+m}$ וכן היא אי פריקה, משמע יריעה אפינית.

הוכחה

בשביל לקבל את המבנה של קבוצה אלגברית ניקח פולינומים $f_{1}...f_{k}$ שמגדירים את X ו־$g_{1}...g_{l}$ שמגדירים את Y ואז

$$X\times Y=V\left(f_{1}\left(x_{1}...x_{n}\right)...f_{k}\left(x_{1}...x_{n}\right),g_{1}\left(x_{n+1}...x_{n+m}\right),...,g_{l}\left(x_{n+1}...x_{n+m}\right)\right)$$

$X\times Y$ גם אי פריקה, שכן עם $X\times Y=Z_{1}\cup Z_{2}$ כאשר Z_{1},Z_{2} סגורות, ניקח לכל $y\in Y$ את ההעתקה $f_{y}:\mathbb{A}^{n}\to\mathbb{A}^{n+m}$ הנתונה ע"י $x\mapsto\left(x,y\right)$. היא כמובן רציפה לכן התמונה ההפוכה של Z_{1},Z_{2} סגורות וכן $f_{y}^{-1}\left(Z_{1}\right)\cup f_{y}^{-1}\left(Z_{2}\right)=X$ לכן מאי פריקות X נובע שאחד מה־$f_{y}^{-1}\left(Z_{i}\right)$ שווה ל־X. כדומה לכל x יש g_{x} וכן $g_{x}^{-1}\left(Z_{i}\right)$ אחד מהם תמיד שווה ל־Y. ניקח ללא הגבלת הכלליות x_{0} כך ש־$f_{x_{0}}^{-1}\left(Z_{1}\right)=Y$, ניקח $y\in Y$ ונניח בשלילה $f_{y}^{-1}\left(Z_{1}\right)=\emptyset$, כלומר עבור הזוג $\left(x_{0},y\right)\in X\times Y$ מתקיים כי $\left(x_{0},y\right)\notin Z_{1}$ כי $f_{y}^{-1}\left(Z_{1}\right)=\emptyset$ אך כי $f_{x_{0}}^{-1}\left(Z_{1}\right)=Y$ נובע $\left(x_{0},y\right)\in Z_{1}$, סתירה. לכן $f_{y}^{-1}\left(Z_{1}\right)=X$ לכל $y\in Y$ משמע $Z_{1}=X\times Y$ שכן עם $\left(x,y\right)\in X\times Y$ אז $x\in X=f_{y}^{-1}\left(Z_{1}\right)$ לכן $\left(x,y\right)\in Z_{1}$. לכן הוכחנו ש־$X\times Y$ יריעה אלגברית.

יש לנו את ההטלות π_{X},π_{Y} מ־$X\times Y$ ל־X,Y אז הן נתונות ע"י פולינומים בכל אחד מהקואורדינטות כמובן ולכן מטענה קודמת π_{X},π_{Y} מורפיזמים. אם Z יריעה אפינית נוספת ו־$f_{X}:Z\to X$ וכן $f_{Y}:Z\to Y$ מורפיזמים אז הם נתונים בכל אחת מהקואורדינטות ע"י פונקציות רגולריות לכן יש $f:Z\to X\times Y$ שהוא $f\left(z\right)=\left(f_{X}\left(z\right),f_{Y}\left(z\right)\right)$ שהוא גם רגולרי בקואורדינטות ולכן מורפיזם וכמובן

$$f\circ\pi_{X}=f_{X}$$
$$f\circ\pi_{Y}=f_{Y}$$

מכאן מקבלים את התכונה האוניברסלית של המכפלה:

משפט

נניח כי X,Y,Z יריעות אפיניות $f_X : Z \to X$ וכן $f_Y : Z \to Y$ מורפיזם. אז קיים ויחיד $f : Z \to X \times Y$ כך שיש דיאגרמה קומוטטיבית

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "f"] \arrow[drr, bend left, "f^Y"] \arrow[ddr, bend right, "f_X"'] & & \\
& X \times Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"] & Y \\
& X &
\end{tikzcd}$$

הוכחה

קיום נובע מהטיעון הקודם והיחידות היא מיידית.

מסקנה

אם ניקח את השקילות הקונטרווריאנטית ממקודם בין יריעות אפיניות לאלבראות מעל k נקבל כי $A\left(X \times Y\right)$ מקבל את התכונה האוניברסלית של המכפלה הטנזורית, שכן התכונה האוניברסלית הקודמת היא "דואלית" למכפלה הטנזורית. אז מיחידות המכפלה הטנזורית נסיק

$$A\left(X \times Y\right) \cong A\left(X\right) \otimes_k A\left(Y\right)$$

אציג כעת גם עוד מחלקה מעניינת של מורפיזמים שמדגימה את הקשר בין התכונות של מורפיזם הגאומטריות לבין האלגברה המתאימה וכן את הטיעונים המקומיים לגבי תכונות של מורפיזם.

הגדרה

יהי $\phi : X \to Y$ מורפיזם של אלומות ויהי $P \in X$. נשים לב כי יש הומומורפיזם

$$\phi_P^* : \mathcal{O}_{Y,\phi(P)} \to \mathcal{O}_{X,P}$$

שכן עם יש $\langle U, f\rangle \in \mathcal{O}_{Y,\phi(P)}$ אז נוכל להסתכל על

$$\phi_P^* \langle U, f\rangle = \left\langle \phi^{-1}\left(U\right), \phi^*\left(f\right)\right\rangle \in \mathcal{O}_{X,P}$$

העניין של אדיטיביות וכפליות נובע מיידית מהתכונות הידועות של ϕ^*. נותר לראות כי ההעתקה אכן מוגדרת היטב. מחלקת השקילות היא אכן

$$\left\langle \phi^{-1}\left(U\right), \phi^*\left(f\right)\right\rangle \in \mathcal{O}_{X,P}$$

שכן כי $\phi\left(P\right) \in U$ אז $P \in \phi^{-1}\left(U\right)$ ו־$\phi^{-1}\left(U\right)$ פתוחה מרציפות. לבסוף צריך להראות שהיא מוגדרת היטב במובן שאם $\left(U,f\right) \sim \left(V,g\right)$ אז

$$f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}$$

אז לכל $x\in\phi^{-1}(U\cap V)$ מתקיים =

$$\phi^*(f)=f\circ\phi(x)=f|_{U\cap V}\circ\phi(x)=g|_{U\cap V}\circ\phi(x)=g\circ\phi(x)=\phi^*(g)$$

וכן

$$\phi^{-1}(U\cap V)=\phi^{-1}(U)\cap\phi^{-1}(V)$$

כלומר

$$\phi^*(f)|_{\phi^{-1}(U)\cap\phi^{-1}(V)}=\phi^*(g)|_{\phi^{-1}(U)\cap\phi^{-1}(V)}$$

כלומר

$$\left(\phi^{-1}(U),\phi^*(f)\right)\sim\left(\phi^{-1}(V),\phi^*(g)\right)$$

לכן קיבלנו הומומורפיזם מושרה (באופן כללי ניתן לעשות זאת באופן מפורש בעזרת תכונות אוניברסליות של גבול ישיר, תרגיל מומלץ).

לכעת נבין איך נראים ההומומורפיזמים המקומיים האלו במקרה האפיני וניתן דוגמה אחת של הקשר של מורפיזמים אלו. נתחיל מהסיווג של המורפיזמים המקומיים:
ניזכר כי אם X,Y יריעה אפינית, ישנו סיווג של האידיאלים המקסימליים שהם $\mathfrak{m}_P$ עבור הנקודות של X וכן מצאנו איזומורפיזם

$$A(X)_{\mathfrak{m}_P}\cong\mathcal{O}_{X,P}$$

נסמן איזומורפיזם זה ע"י $\psi_{X,P}$נטען כי לכל נקודה $P\in X$ יש דיאגרמה קומוטטיבית

$$\begin{tikzcd}
A(Y)_{\mathfrak{m}_{\phi(P)}} \arrow[r, "\phi^*_{\mathfrak{m}_P}"] \arrow[d, "\psi_{Y,\phi(P)}"] & A(X)_{\mathfrak{m}_P} \arrow[d, "\psi_{X,P}"] \\
\mathcal{O}_{Y,\phi(P)} \arrow[r, "\phi^*_P"] & \mathcal{O}_{X,P}
\end{tikzcd}$$

זה כי

$$\begin{aligned}
\phi^*_P\left(\psi_{Y,\phi(P)}\left(\frac{f}{g}\right)\right)&=\phi^*_P\left(\left\langle g^{-1}(k-\{0\}),\frac{f}{g}\right\rangle\right)=\left\langle\phi^{-1}\left(g^{-1}(k-\{0\})\right),\phi^*\left(\frac{f}{g}\right)\right\rangle=\\
&=\left\langle\left(\phi^{-1}\circ g^{-1}\right)(k-\{0\}),\phi^*\left(\frac{f}{g}\right)\right\rangle=\left\langle(g\circ\phi)^{-1}(k-\{0\}),\phi^*\left(\frac{f}{g}\right)\right\rangle=\\
&=\left\langle(\phi^*(g))^{-1}(k-\{0\}),\phi^*\left(\frac{f}{g}\right)\right\rangle=\left\langle(\phi^*(g))^{-1}(k-\{0\}),\frac{\phi^*(f)}{\phi^*(g)}\right\rangle=\\
&=\psi_{X,P}\left(\frac{\phi^*(f)}{\phi^*(g)}\right)=\psi_{X,P}\left(\phi^*_{\mathfrak{m}_P}\left(\frac{f}{g}\right)\right)
\end{aligned}$$

כלומר מצאנו זיהוי פשוט בבין $\phi^*_P,\phi^*_{\mathfrak{m}_P}$. בפרט, לשם השימוש הבא שלנו בהומומורפיזמים המושרים נסיק כי ϕ^*_P חח"ע אם"ם $\phi^*_{\mathfrak{m}_P}$

הגדרה

מורפיזם דומיננטי הינו מורפיזם $\phi : X \to Y$ שהתמונה שלו צפופה ב־Y.

טענה

עם $K \subseteq X$ קבוצה צפופה במרחב טופולוגי X, לכל קבוצה פתוחה $V \subseteq X$ מתקיים כי $K \cap V$ צפופה ב־V.

הוכחה

עם $\phi(X)$ צפוף, לכל קבוצה פתוחה $U \subseteq V$, כי $V \subseteq X$ פתוחה אז $U \subseteq X$ פתוחה לכן

$$(\phi(X) \cap V) \cap U = \phi(X) \cap U \neq \emptyset$$

משמע $\phi(X) \cap V$ הייתה חותכת כל תת קבוצה פתוחה ולכן הייתה צפופה ב־V.

טענה

$\phi : X \to Y$ מורפיזם של יריעות אפיניות, אז התנאים הבאים שקולים:

1. ϕ דומיננטי
2. ϕ_V^* חח"ע לכל קבוצה פתוחה V
3. ϕ_Y^* חח"ע עבור Y

הוכחה

בכיוון אחד נשים לב כי אם ϕ דומיננטי וכן $f \in \mathcal{O}(V)$ כך ש־$\phi_V^*(f) = 0$ מקבלים $f \circ \phi = 0$ כלומר $f|_{\phi(\phi^{-1}(V))} = 0$ אך $\phi\left(\phi^{-1}(V)\right) = \phi(X) \cap V$ צפוף ב־V ו־f רציפה לכן $f = 0$.

גרירה שנייה ברורה.

עבור גרירה שלישית נבצע בשלילה. אם ϕ אינו דומיננטי יש קבוצה פתוחה כך ש־$\emptyset \neq A \subseteq Y$ כך ש־$\phi(Y) \cap A = \emptyset$. נסתכל על $Z = Y - A$ סגורה. Z קבוצה אלגברית מוכלת ממש ב X לכן נוכל לקחת $f \in I(Z) - I(Y)$. אז $f \neq 0$ ב־$\mathcal{O}(Y)$ אך מתקיים כי

$$Im(\phi) \subseteq Z \subseteq f^{-1}(0)$$
$$\phi_Y^*(f) = 0$$

כלומר ϕ_Y^* אינו חח"ע.

כלומר מצאנו עכשיו שיש קשר מהותי בין האלגברה לגאומטריה של מורפיזם. נשים לב כעת כי גם מתקיים שעניין זה הוא עניין מקומי. ניזכר ב"תכונה המקומית" מאלגברה קומוטטיבית ש־ϕ^* חח"ע אס"ם לכל אידיאל מקסימלי $\mathfrak{m}$ מתקיים כי $\phi_{\mathfrak{m}}^*$ חח"ע. נציג כעת הקשר גאומטרי לתכונות שבאמת יהיו מקומיות:

טענה

$\phi : X \to Y$ מורפיזם של יריעות אפיניות הוא דומיננטי אס"ם כל ϕ_P^* הינו חח"ע.

הוכחה

מהטענה הקודמת ראינו כי מספיק להראות כי ϕ_P^* חח"ע לכל P אס"ם לכל קבוצה פתוחה ϕ_Y^* חח"ע.

אכן ϕ_Y^* הוא חח"ע אס"ם לכל אידיאל מקסימלי $\phi_{\mathfrak{m}_P}^*$ חח"ע, כלומר ה־ϕ_P^* חח"ע.

סיכום

הצגנו היום מספר דברים. ראשית, מצאנו אבטיפוס אלגברי לכל ההקשר של המבנה האלגברי של יריעה ובהמשך מבנים חזקים של מרחבים נוספים (כגון סכמות) במבנה של אלומה. לאחר מכן הדגמנו את המבנה האלגברי של יריעות בהן אנו מתעסקים ומיינו במקרים הפשוטים חלקית את המבנה האלגברי הזה. בדרך, לצורך המיון הזה גם הגדרנו את האובייקט המרכזי של ההרצאה, המורפיזמים של יריעות, כלומר קשרים בין יריעות המשמרים את המבנה האלגברי והגאומטרי המעניין אותנו. בנוסף, סיווגנו כיצד נראים מורפיזמים אלו במקרה האפיני. גם ראינו מספר דוגמאות מעניינות שבקושי נוגעות בקצה הקרחון של התורה העשירה של מורפיזמים, ואיך היא מייצגת קשר מהותי בין הפן האלגברי והפן הגאומטרי, שהיא מהותית לכל התורה של גאומטריה אלגברית הקלאסית והמודרנית. באמת, יכולתי להמשיך מכאן עוד הרבה להרצות, אך כבר היה הרבה חומר ונגמר הזמן. בין היתר, יכולנו להמשיך לפרט על תכונות מקומיות. בנוסף, יכולנו לראות כיצד השפה של מורפיזמים מסוגלת לייצג כל מני מניפולציות אלגבריות טבעיות, כגון לדוגמה, שיכון ורונזה ואיך העובדה שהוא איזומורפיזם משמש באופן טבעי להוכחה של כיצד 5 נקודות קובעות קוניים וכן הכללות של כך, וכן יכולנו לראות את איך משפטים כגון משפט הנורמליזציה של נתר יכולים לקבל פן גאומטרי. מאוד מומלץ למי שמעוניין בגאומטריה אלגברית לשבת על דוגמאות כאלו.