העתקות ראציונליות

אלעד סייג
תאריך 8/4/2018

1 הקדמה

ההרצאה תדון במספר נושאים עיקריים:

1. העתקות ראציונליות
2. ביראציונליות
3. העתקות מסוג בלואו־אפ.

2 העתקות ראציונליות וביראציונליות

בחלק זה אנו נכיר את המושגים העתקה ראציונליות ושקילות ביראציונלית, מושגים שחשובים למיון יריעות אלגבריות. העתקה ראציונלית היא מורפיזם שמוגדר על איזשהיא קב' פתוחה. מושג זה שימושי כי לפעמים איננו יכולים להגדיר העתקה מכל המרחב X למרחב Y אלא רק מחלק מ X, וכיוון שקבוצה פתוחה היא צפופה (במצב אי פריק) הרי העתקות כאלו מספקות מידע רב ערך. דוגמא שימושית להחזיק בראש היא ההעתקה $\pi : C \longrightarrow D$ מהעקום C הניתן על ידי המשוואה $y^2 = x^3$ במישור לציר ה y הניתנת על ידי ההעתקה $\pi(x,y) = \frac{y}{x}$ ההפוכה לפרמטריזציה (t^2, t^3) שראינו בהרצאה על מורפיזמים.

נעיר כי גיאומטריה אלגברית שונה בהקשר זה מטופולוגיה או גיאומטריה דיפרנציאלית כי בתחומים אלו לא קיים המושג של העתקה רציונלית ושקילות בירציונלית.

2.1 הכנות

נפתח בלמה המבטיחה שמורפיזם נקבע על קבוצה פתוחה.

למה תהיינה X, Y יריעות ויהיו $\phi, \psi : X \longrightarrow Y$ מורפיזמים. נניח שיש $\emptyset \neq U \subset C$ פתוחה כך ש $\phi|_U = \psi|_U$ אזי $\phi = \psi$

הוכחה יהי n טבעי כך ש $Y \subset \mathbb{P}^n$ על ידי הרכבה עם שיכון זה נוכל להניח בה"כ כי $Y = \mathbb{P}^n$. לפני שנמשיך "נזכיר" כי לקבוצה $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ יש מבנה של יריעה פרויקטיבית, ואמנם היא משוכנת על ידי שיכון סגרה כתת יריעה סגורה במרחב הפרויקטיבי $\mathbb{P}^N$ כאשר $N = (n+1)^2 - 1$ שיכון סגרה עובד כך:

$$((a_0 : a_1 : \cdots : a_n), (b_0 : b_1 : \cdots : b_n)) \longrightarrow (a_i \cdot b_j)_{1 \leq i,j \leq n}$$

יש מורפיזם

$$\phi \times \psi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$$

ומתקיים

$$\phi \times \psi(U) \subset \Delta$$

כאשר $\Delta = V_p(x_i y_j - x_j y_i)$ הוא האלכסון במכפלת המרחבים הפרויקטיבים. כעת, Δ סגור והקבוצה U צפופה ב X ולכן $\phi \times \psi(X) \subset \Delta$ וסיימנו.

הגדרה תהיינה X, Y יריעות. העתקה ראציונלית $\phi : X \longrightarrow Y$ הינה מחלקת שקילות של זוגות $< U, \phi_U >$ כאשר $\emptyset \neq U \subset X$ קבוצה פתוחה ולא ריקה ואילו $\phi_U : U \longrightarrow Y$ הינו מורפיזם. יחס השקילות עליו מדובר מוגדר כך: $< U, \phi_U > \simeq < V, \phi_V >$ אם ורק אם $\phi_U|_W = \phi_V|_W$ כאשר $W = U \cap V$. באמצעות הלמה, קל לבדוק שזהו אכן יחס שקילות.

הערות

- העתקה רציונלית אינה פונקציה, לכן יש קושי להרכיב העתקות כאלה
- $K(X)$ זהו קבוצת ההעתקות הרציונליות $X \longrightarrow \mathbb{A}^1$

הגדרה תהיינה X, Y יריעות. העתקה ראציונלית $\phi : X \longrightarrow Y$ תקרא שולטת=דומיננטית אם לאחד (ואז לכל) הזוגות $< U, \phi_U >$ מתקיים $\phi_U(U) \subset Y$ קבוצה צפופה.

קל לראות שאפשר להרכיב העתקות ראציונליות שולטות ולקבל העתקה מאותו סוג: כדי להרכיב את $\psi \circ \varphi$ ניקח נציגים ונגדיר את ההרכבה על ידי הזוג

$$< U \cap \psi^{-1}(V), \psi_{V \cap Im(\varphi_U)} \circ \varphi_U >$$

קל לבדוק שהבניה אינה תלויה בנציגים.

אבחנה יריעות עם העתקות דומיננטיות ביניהן מהוות קטגוריה. מורפיזם הזהות מהיריעה X לעצמה הוא מחלקת השקילות של הזוג $< X, id_X >$.

איזומורפיזם בקטגוריה זו נקרא העתקה ביראציונלית. באופן שקול:

הגדרה העתקה ביראציונלית $\phi : X \longrightarrow Y$ זו העתקה ראציונלית דומיננטית שיש העתקה ראציונלית דומיננטית $\psi : Y \longrightarrow X$ כך שמתקיים שויון כהעתקות ראציונליות (דומיננטיות) $\phi \circ \psi = Id_Y, \psi \circ \phi = Id_X$

אם יש העתקה ביראציונלית מ X ל Y נאמר כי X, Y שקולים ביראציונלית או ביראציונליים. זהו כמובן יחס שקילות.

התוצאות המרכזיות של חלק זה הן

- קטגורית היריעות מעל השדה K עם העתקות ראציונליות שולטות שקולה לקטגוריה של הרחבות שדות נוצרות סופית של K ובשקילות זו החיצים מתהפכים)כלומר השקילות היא קונטראוריאנטית(.
- כל יריעה הינה ביראציונלית לעל־משטח.

נפתח במספר הכנות למשפט השקילות שהוזכר.

נאמר כי יריעה היא אפינית אם היא איזומורפית ליריעה אפינית. דוגמא ליריעה שאינה אפינית הינה הקבוצה $\mathbb{A}^2 - 0$ במישור.

למה יהא $Y \subset \mathbb{A}^n$ על משטח ונרשום $Y = V(f)$ עם $f = f(x_1, ..., x_n)$ פולינום. אזי $\mathbb{A}^n - Y$ איזומורפי לעל המשטח $H \subset \mathbb{A}^{n+1}$ המוגדר על ידי המשוואה $x_{n+1}f = 1$ ובפרט $\mathbb{A}^n - Y$ אפינית וחוג הפונקציות שלה הינו $k[x_1, ..., x_n]_f$

הוכחה בהינתן $P \in H$ נרשום $P = (a_1, ..., a_n, a_{n+1})$ ונגדיר $\phi : H \longrightarrow \mathbb{A}^n$ על ידי

$$\phi(P) = (a_1, ..., a_n)$$

ברמה של חוגים מושרית העתקה מהחוג $k[x_1, ..., x_n]$ ללוקליזציה $k[x_1, ..., x_n]_f$

ברור כי ההעתקה ϕ הינה בייקציה על $\mathbb{A}^n - Y$ על מנת להוכיח שהיא איזומורפיזם מספיק להראות כי ϕ^{-1} מורפיזם מ $\mathbb{A}^n - Y$ ל־ H. כדי לראות זאת נשים לב כי בכל רכיב ההעתקה היא מנת פולינומים ולכן רגולרית ואמנם

$$\phi^{-1}(a_1, ..., a_n) = (a_1, .., a_n, \frac{1}{f(a_1, ..., a_n)})$$

טענה לכל יריעה יש בסיס לטופולוגיה המורכב מקבוצות אפיניות פתוחות.

הוכחה תהי Y יריעה. צריך להוכיח שלכל $P \in U \subset Y$ כאשר U פתוחה אפשר למצוא קבוצה אפינית פתוחה V כך ש $P \in V \subset U.$ ראשית, היות ש U גם יריעה נוכל להניח כי $U = Y$ ומכיוון שכל יריעה מכוסה על ידי יריעות קוואזי־אפיניות, ניתן להניח כי $Y \subset \mathbb{A}^n$ היא קווזי־אפינית. נגדיר $Z = \overline{Y} - Y$ סגורה ב $\mathbb{A}^n$ ויהי $\mathfrak{a} \subset k[x_1, x_2, ..., x_n]$ האידיאל המתאים לקבוצה סגורה זו. היות ש $P \in \mathbb{A}^n - Z$ הרי יש $f \in \mathfrak{a}$ כך ש $f(P) \neq 0$ נתבונן בעל המשטח $H = V(f) \subset \mathbb{A}^n$ וניקח $V = Y - Y \cap H$ נבחין $P \in V$ ואילו $Z \subset H$ כעת $V = \overline{Y} \cap (\mathbb{A}^n - H)$ כפי שראינו $\mathbb{A}^n - H$ אפינית ו V קבוצה סגורה שם ולכן אפינית.

2.2 שקילות קטגורית

כעת נפנה לניסוח והוכחת הטענה המרכזית של חלק זה.

תהא $\phi : X \longrightarrow Y$ העתקה רציונלית שולטת. נבנה העתקה משדה הפונקציות הרגולריות $K(Y)$ לשדה $K(X)$ באופן הבא. נכתוב $\phi =< U, \phi_U >$ ותהי $f \in K(Y)$ פונקציה רציונלית המיוצגת על ידי $< V, f >$ עם $V \subset Y$ קבוצה פתוחה וצפופה ו־f רגולרית. מכיוון ש $\phi_U(U) \subset Y$ צפופה ב Y הרי הקבוצה $\phi_U^{-1}(V) \subset X$ קבוצה פתוחה לא ריקה. לכן $f \circ \phi_U$ פונקציה רגולרית על $\phi_U^{-1}(V)$ ולכן מגדירה פונקציה ראציונלית על X $\phi^*(f) =< \phi_U^{-1}(V), f \circ \phi_U >$. בנינו אם כן העתקה

$$\phi^* : K(Y) \longrightarrow K(X)$$

קל לראות כי זהו הומומורפיזם של k־אלגבראות.

משפט תהיינה X, Y יריעות. הבנייה מעל מגדירה בייקציה בין

- קבוצת ההעתקות הראציונליות השולטות בין X לבין Y.

- קבוצת ההומומורפיזמים של k־אלגבראות מ $K(Y)$ ל $K(X)$

בנוסף התאמה זו נותנת שקילות הופכת חיצים בין קטגורית היריעות והעתקות ראציונליות שולטות לבין קטגורית הרחבות השדות הנוצרות סופית של k.

הוכחה

נבנה את ההעתקה ההפוכה להתאמה לעיל: בהינתן הומומורפיזם של אלגבראות

$$\theta : K(Y) \longrightarrow K(X)$$

נבנה פונקציה ראציונלית מ X ל Y.

Y מכוסה על ידי קבוצות פתוחות אפיניות ולכן נוכל להניח כי $Y \subset \mathbb{A}^n$ אפינית.

(הסבר: יש $Y' \subset Y$ פתוחה אפינית (לא ריקה) כך ש $K(Y') \cong K(Y)$ ואיזומורפיזם זה מושרה על ידי השיכון).

יהא $A(Y) = k[x_1, ..., x_n]/I(Y)$ חוג הקואורדינטות האפיני. יהיו $y_1, ..., y_n$ התמונות של $x_1, ..., x_n$ יוצרים של $A(Y)$ כ k־אלגברה. אזי $\theta(y_1), ..., \theta(y_n)$ הן פונקציות ראציונליות על X וניקח $U \subset X$ פתוחה באופן שכל פונקציות אלו תהיינה רגולריות על U נתבונן במורפיזם $\theta_0^* : U \longrightarrow \mathbb{A}^n$ המוגדר ע"י $(\theta(y_1), ..., \theta(y_n))$ אז הוא המורפיזם המתאים להומומורפיזם החח"ע של k־אלגבראות $A(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(U)$ מההתאמה בפרק מורפיזמים ולכן תמונתו מוכלת ב Y , נראה צפופה שם: צ"ל $I(\theta_0^*(X)) \subset I(Y)$ (הכלה שנייה נובעת ממה שראינו במורפיזמים) יהא $f \in I(\theta_0^*(X))$ אז לכל $P \in X$ מתקיים

$$0 = f(\theta_0^*(P)) = \theta(f(y_1, ..., y_n))(P) \Longrightarrow f(y_1, ..., y_n) = 0$$

ולכן $f \in I(Y)$. הראנו כי קבלנו העתקה רציונלית דומיננטית

$$\theta^* = (U, \theta_0^*) : X \longrightarrow Y$$

נראה כי שתי התאמות אלה הופכיות זו לזו, לדוגמא:

$$\phi \longrightarrow \phi^* : (f \in K(Y) \longrightarrow f \circ \phi) \longrightarrow (\phi^*)^* = (\phi^*(y_1), ..., \phi^*(y_n)) = (y_1 \circ \phi, ..., y_n \circ \phi) = \phi$$

והשני ישאר כתרגיל לקורא. הראנו אם כן את ההתאמה הדרושה.

כעת, על מנת לבדוק שקילות קטגורית, נותר לבדוק כי לכל יריעה Y, $K(Y)$ נ"ס מעל k, וכי לכל הרחבה K/k נ"ס, יש יריעה Y ש $K \cong K(Y)$, אכן: אם Y יריעה, אז $K(Y) \cong K(U)$ כאשר $U \subset Y$ פתוחה אפינית, ולכן נניח Y . אפינית. עבור יריעות אפיניות זו טענה שראינו כבר בפרק מורפיזמים, כי ראינו כי $K(Y)$ איזומורפי לשדה המנות של $A(Y)$. להפך, תהא K הרחבת שדות נ"ס של k $y_1, ..., y_n \in K$ יוצרים. נגדיר את B להיות תת ה־k־אלגברה הנוצרת מ $y_1, ..., y_n$, אז B תחום שלמות ולכן יש יריעה אפינית Y כך ש $A(Y) \cong B$ ולכן $K \cong K(Y)$, וסיימנו.

מסקנה עבור יריעות X, Y הבאים שקולים:

1. היריעות X, Y שקולות ביראציונלית.

2. יש $U \subset X$ ויש $V \subset Y$ קבוצות פתוחות שהן איזומורפיות.

3. האלגבראות $K(X) \simeq K(Y)$ איזומורפיות כ־ k אלגבראות.

הוכחה נוכיח כי 1 גורר 2. תהינה $\phi : X \longrightarrow Y$ ו $\psi : Y \longrightarrow X$ העתקות ראציונליות שולטות הפוכות אחת לשניה. נבחר נציגים $\phi =< U, \phi >$ וכן $\psi =< V, \psi >$ אזי $\psi \circ \phi =< \phi^{-1}(V), \psi \circ \phi >$ ולכן $\psi \circ \phi = Id_{\phi^{-1}(V)}$ ובאופן דומה $\phi \circ \psi = Id_{\psi^{-1}(U)}$ ניקח את $\phi^{-1}(\psi^{-1}(U)$ להיות הקבוצה הפתוחה ב X ואת $\psi^{-1}(\phi^{-1}(V)$ הקבוצה הפתוחה ב Y ואלו איזומורפיות.

2 גורר 3 נובע מיידית מההגדרה של שדה הפונקציות הראציונליות.

3 גורר 1 נובע ממשפט השקילות הקטגורית.

2.3 כולנו על־משטחים

נפנה כעת לתוצאה המרכזית השניה: כל יריעה היא ביראציונלית לעל־משטח. לשם כך אנו זקוקים להכנה מתורת השדות. ההכנה תכלול שלושה משפטים.

1. משפט האיבר הפרימיטיבי

2. תכונות של הרחבות הנוצרת ספרבילית

משפט האיבר הפרימטיבי תהי L/K הרחבת שדות ספרבילית סופית. אזי קיים איבר $\alpha \in L$ שיוצר את L כשדה הרחבה של K יתר על כן, אם $\beta_1, ..., \beta_n$ יוצרים של L מעל K ואם K אינסופי אזי אפשר לבחור את α כצירוף לינארי

$$\alpha = c_1\beta_1 + ...c_n\alpha_n$$

כאשר $c_i \in K$.

את ההוכחה ניתן למצוא ברשימות של דן הרן בעמוד 62 או בספר של זריצקי־סמואל עמ' 84.

הגדרה הרחבת שדות K/k נקראת נוצרת ספרבילית אם יש בסיס טרנצדנטלי $\{x_i\}$ של K/k כך ש K הרחבה ספרבילית של $k(x_i)$. בסיס כזה נקרא בסיס טרנצדנטלי מפריד=ספרבילי.

משפט ב אם הרחבת שדות נוצרת סופית ונוצרת ספרבילית אז לכל קבוצת יוצרים יש תת קבוצה שהיא בסיס טרנצדנטלי מפריד.

את ההוכחה אפשר למצוא באותו ספר בעמוד 104.

משפט ג אם K שדה מושלם=פרפקטי אז כל הרחבה נוצרת סופית שלו היא ספרבילית. בפרט נכון הדבר אם השדה הוא סגור אלגברית.

את ההוכחה אפשר למצוא באותו ספר בעמוד 105.

כעת נפנה לתוצאה שהבטחנו.

משפט כל יריעה X ממימד r ביראציונלית לעל משטח Y ב $\mathbb{P}^{r+1}$.

הוכחה נגדיר $K=k(X)$ הרחבה נוצרת סופית של k שהוא סגור אלגברית. לכן ממשפט ג K נוצר ספרבילית מעל k כיוון שדרגת הטרנצדנטליות של K הינה $\dim(X)$ ממשפט ב נובע כי יש $x_1,..,x_r\in K$ כך ש K הרחבה ספרבילית של $k(x_1,...,x_r)$. ממשפט האיבר הפרימיטיבי יש $y\in K$ כך ש $K=k(x_1,...,x_r,y)$ עם y אלגברי מעל $k(x_1,...,x_r)$ ומכאן יש משוואה פולינימואילית אי פריקה (פולינום מינימלי) שמקדמיה פולינומים ב $k(x_1,...,x_r)$ אותה y מקיים. לאחר כפל במכנים (ב $content$ התוכן) נקבל כי יש פולינום רב משתנים $f(x_1,...,x_r,y)=0$ ובעזרת הלמה של גאוס נקבל f אי־פריק ולכן $V(f)$ היא על משטח ב $\mathbb{A}^{r+1}$ ששדה הפונקציות הראציונליות שלו שווה בדיוק ל K. ממשפט קודם $V(f)$ ביראציונלי ל X ולכן U תמונת $V(f)$ בשיכון $\mathbb{A}^{r+1}\subset\mathbb{P}^{r+1}$ ביראציונלי ל X ומכאן שהסגור של U שנסמנו $Y=\overline{U}$ הינו על משטח ב $\mathbb{P}^{r+1}$ שביראציונלי ל Y כפי שהובטח.

3 Blow Up

3.1 הגדרה ודוגמאות ראשונות

הגדרה $X\subset\mathbb{A}^{r+1}$ יריעה אפינית. נניח כי $f_1,...,f_r\in A(X)$ פונקציות פולינומיות על X. בנית בלואו אפ $\tilde{X}$ של X ביחס לפונקציות אלו מורכבת משלושה שלבים

1. נסמן $U=X-V(f_1,...,f_r)$ ונביט במורפיזם $f:U\longrightarrow\mathbb{P}^{r-1}$ הניתן על ידי $f(x)=(f_1(x):f_2(x):...:f_r(x))$
2. נסמן $\Gamma_f=\{(x,f(x)):x\in U\}\subset U\times\mathbb{P}^{r-1}$ הגרף של f
3. נגדיר $\widetilde{X}=\overline{\Gamma_f}\subset X\times\mathbb{P}^{r-1}$ הסגור של הגרף במכפלה.

אבחנות

1. הגרף Γ_f איזומורפית כיריעה אלגברית לקבוצה U
2. הגרף Γ_f קבוצה אי־פריקה ולכן $\widetilde{X}$ קבוצה אי־פריקה, כלומר יריעה.
3. הגרף Γ_f מוכל ב $\widetilde{X}$ כקבוחצה פתוחה וצפופה.

$\widetilde{X}$ נקרא הבלואו־אפ של X ביחס לפונקציות $f_1,...,f_r$ ונשים לב כי יש מורפיזם $\pi:\widetilde{X}\longrightarrow X$ הטלה לרכיב הראשון לעיתים נאמר כי מורפיזם זה π הוא הבלואו־אפ של X ביחס ל $f_1,...,f_r$

הערות

1. ההיטל $U\longrightarrow\Gamma_f$ הוא איזומורפיזם ונזהה את Γ_f עם U עליה נחשוב כקבוצה פתוחה ב $\tilde{X}$ המשלימה שלה היא הקבוצה הסגורה $\pi^{-1}(V(f_1,...,f_r))=\tilde{X}-U$ נקראת הקבוצה המיוחדת exeptional set.

2. X ו $\widetilde{X}$ הן ביראציונליות עם קבוצה פתוחה משותפת U. (פרט למקרה בו $U =$ $\widetilde{X} = \phi$ שיקרא בלו־אפ טריוויאלי.)

הגדרה: strict transform של תת יריעה

תהא $Y \subset X$ תת יריעה סגורה של X אז ניתן לפוצץ את Y ביחס ל $f_1, ..., f_r$ ונקבל $\widetilde{Y} \subset Y \times \mathbb{P}^{r-1} \subset X \times \mathbb{P}^{r-1}$ וזו תת יריעה סגורה של $\widetilde{X}$. קל לראות שזהו הסגור של $Y \cap U$ ב $\widetilde{X}$. אם נחשוב על $\widetilde{Y}$ כתת קבוצה של $\widetilde{X}$ אז זה נקרא לרוב הסטריקט טרנספורם של Y בבלואו אפ של X.

הכללה: קבוצות אלגבריות כלליות

אם $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n$ פירוק לאי־פריקים אזי מתקיים $\widetilde{X} = \widetilde{X}_1 \cup \widetilde{X}_2 \cup ... \cup \widetilde{X}_n$ הודות לכך שסגור ואיחוד סופי מתחלפים.

דוגמאות טריביאליות

אם $r = 1$ אז $\widetilde{X} \subset X \times \mathbb{P}^0 \cong X$ $\Gamma_f \cong U$ ולכן $\widetilde{X} = \overline{U}$ הסגור בX, נקבל שני מקרים:

1. אם $f_1 \neq 0$ על X אז $U = X - V(f_1)$ פתוחה לא ריקה ולכן צפופה, ולכן $\widetilde{X} = X$ ולא עשינו כלום.

2. אם $f_1 = 0$ על X אז $\widetilde{X} = \phi$ וזהו הבלו־אפ הטריוויאלי.

למה $\tilde{X} \subset \{(x, y) \in X \times \mathbb{P}^{r-1} : y_i f_j(x) = y_j f_i(x), 1 \leq i, j \leq r\}$

הוכחה השויון מתקיים על U המשלים של $V(f_1, ..., f_r)$ ולכן גם על הסגור שלה.

3.2 בלואו־אפ של $\mathbb{A}^n$ בראשית

הגענו לדוגמא הלא טריביאלית הראשונה והחשובה ביותר: בלואו־אפ של $\mathbb{A}^n$ ביחס לפונקציות הקואורדינטות $x_1, ..., x_n$. נסמן את הבלואו־אפ ב $\widetilde{\mathbb{A}^n}$ ונזכיר כי $U =$ $\mathbb{A}^n - V(x_1, ..., x_n) = \mathbb{A}^n - \{0\}$ אזי

טענה

$$\widetilde{\mathbb{A}^n} = \{(x, y) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} : y_i x_j = y_j x_i, 1 \leq i, j \leq n\} = Y$$

הוכחה הכלה האחת היא מהלמה. כדי להראות את השויון נתבונן בקבוצה הפתוחה $U_1 = \{(x, y) \in Y : y_1 \neq 0\}$ נקבע $y_1 = 1$ ונקבל מרחב אפיני עם קורדינטות $(x_1, ...x_n, y_2, ..y_n)$, שם לב כי עבור $x_1, y_2, ..., y_n$ קבועים, המשוואות ל Y הן $x_j =$ $x_1 y_j$, $j = 2, ..., n$, ולכן יש איזומורפיזם $\mathbb{A}^n \longrightarrow U_1 \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$

$(x_1, y_2, ..., y_n) \longrightarrow ((x_1, x_1 y_2, ..., x_1 y_n), (1 : y_1 : ... : y_n))$

כמובן, אותו הדבר נכון ל $U_i, i = 1, 2, .., n$, ולכן Y מכוסה על ידי מרחבים אפינים n־מימדים ומכאן Y יריעה ממימד n (היא אי פריקה כי היא איחוד של אי פריקות שפתוחות בה שכל שתיים נחתכות, וממימד n כי כל אחת מהן כזו)

אבל Y מכילה את $\widetilde{\mathbb{A}^n}$ כתת קבוצה סגורה שמימדה n ולכן $Y = \widetilde{\mathbb{A}^n}$

דיון במורפיזם $\pi : \widetilde{\mathbb{A}^n} \longrightarrow \mathbb{A}^n$
על הקבוצה הפתוחה $U = \mathbb{A}^n - \{0\}$ זהו איזומורפיזם. הקבוצה המיוחדת נתונה על ידי $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ ואז המשוואות $x_iy_j = x_jy_i$ הופכות להיות נכונות תמיד ולכן נקבל

$$\pi^{-1}(\{0\}) = \{(0, y) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}\} \simeq \mathbb{P}^{n-1}$$

. כלומר, במעבר בין $\mathbb{A}^n$ ל $\widetilde{\mathbb{A}^n}$ לא פגענו אף נקודה פרט לראשית, ואותה החלפנו במרחב פרויקטיבי $\mathbb{P}^n$, זו אחת הסיבות מדוע זה נקרא בלו־אפ, ומקרה זה נקרא בלו־אפ של $\mathbb{A}^n$ בראשית (במקום בפונקציות הקורדינטות, נסביר מדוע אפשר לומר כך בהמשך). בגלל התנהגות התמונה ההפוכה ע"י π, היה אפשר לדמיין כי $\widetilde{\mathbb{A}^n}$ נראה כמו $\mathbb{A}^n$ שיוצא ממנו $\mathbb{P}^{n-1}$ מהמרכז. **זהו אינו המצב!** המרחב המתואר לעיל אינו אי פריק במהותו, בניגוד לבלו־אפ. על מנת להבין את המבנה הגיאומטרי, נתבונן בסטירקט טרנספורם של ישר $0 \in L \subset \mathbb{A}^n$ בעובר בראשית. כולמר בבלו־אפ $\widetilde{L}$ של L בפונקציות הקורדינטות $x_1, ...x_n$ על המשלים של הראשית, בכל נקודה $(x, y) \in \widetilde{L} - \{0\} \subset L \times \mathbb{P}^{n-1}$, y חייב להיות הנקודה במרחב הפרויקטיבי המתאימה לישר L (זו ההגדרה המקורית שלנו ל $\mathbb{P}^{n-1}$) ולכן זה כך גם על הסגור, שהוא $\widetilde{L}$, ולכן $\widetilde{L}$ חותך את הקבוצה המיוחדת ב $(0, y)$ כאשר $y = L$, כלומר הקבוצה המיוחדת מתארת את הכיוונים של $\mathbb{A}^n$ בראשית, ופורמת אותם, שני . ישרים בראשית עם כיוונים שונים לא יחתכו לאחר הבלו־אפ. התמונה הבאה ממחישה כי הבלו־אפ של $\mathbb{A}^2$, נראה כמו סליל סביב הקבוצה המיוחדת, שהוא הישר במרכז, ומראה איך הכיוונים השונים דרך הראשית הופרדו בבלו־אפ.

3.3 תכונות בסיסיות

כעת נראה שהבלואו־אפ לא תלוי ב $f_1, ..., f_r$ אלא באידאל I הנוצר על ידיהן.
טענה יהיו $f_1, ..., f_r, f_1', ..., f_s' \in A(X)$ כך שמתקיים

$$(f_1, ..., f_r) = (f_1', ..., f_s') \subset A(X)$$

נסמן ב $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ את הבלואו אפ לפי הפונקציות $f_1, ..., f_r$ וב $\pi' : \tilde{X}' \longrightarrow X$ את הבלואו־אפ לפי $f_1', ..., f_s'$ אזי יש איזמורפיזם $F : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}'$ כך ש $\pi = \pi' \circ F$ כלומר הדיאגרמה
היא חלופית
הוכחה יש $g_{i,j}, h_{j,k} \in A(X)$ כך ש $f_i = \sum_{j=1}^{s} g_{i,j} f_j', f_j' = \sum_{k=1}^{r} h_{j,k} f_k$
ואז נגדיר

$$F(x, y) = (x, y') = (x, (\sum_{k=1}^{r} h_{1,k}(x) y_k : .... : \sum_{k=1}^{r} h_{s,k}(x) y_k))$$

נטען כי על הקבוצה $U = X - V(f_1, ..., f_r) \subset \tilde{X} \subset X \times \mathbb{P}^{r-1}$ רכיבי y' לא כולם אפס. ואמנם על קבוצה זו $(y_1 : ... : y_r) = (f_1 : ... : f_r)$ כלומר אלו

וקטורים תלויים ולא וקטורי אפס בכל נקודה של U והשויון $f_i=\sum_{j,k} g_{u,j}h_{j,k}f_k$ גורר $y_i=\sum_{j,k} g_{i,j}h_{j,k}y_k$ על הקבוצה U ולכן על הסגור שלה כלומר על $\tilde{X}$. כעת אם היה מתקיים $y_i=\sum_k h_{j,k}y_k = y'_j = 0$ אז $y_i = 0$ בסתירה להנחה.

נראה כי התמונה של F מוכלת ב $\tilde{X}'$

$$F(x,y)=(x,(\sum_{k=1}^{n} h_{1,k}(x)f_k(x):...:\sum_{k=1}^{n} h_{s,k}(x)f_k(x)))=(x,(f'_1(x):...:f'_s(x)))\in\tilde{X}'$$

F מורפיזם והינו איזומורפיזם כי ההפוך לו ניתן על ידי בניה הפוכה כך

$$F^{-1}(x,y')=(x,(\sum_{j=1}^{s} g_{1,j}(x)f'_j(x):...:\sum_{k=1}^{n} g_{r,j}(x)f'_j(x)))$$

לסיום ברור כי $\pi=\pi'\circ F$

כעת נפנה להכללות נוספות של מושג הבלואו אפ.

הגדרה תהי X יריעה אפינית ויהא $I\subset A(X)$ אידאל. הבלואו־אפ של X ביחס לאידיאל I תוגדר להיות הבלואו אפ ביחס לאיזשהיא קבוצת יוצרים. סימון מקובל $Bl_I(X)\longrightarrow X$.

אם Y תת יריעה סגורה ב X או תת קבוצה סגורה אז $Bl_Y(X)=Bl_{I(Y)}(X)$ ובשפה זו הדוגמא של $\mathbb{A}^n$ ביחס לפונקציות הקואורדינטות הוא באמת $Bl_{(0,...,0)}(\mathbb{A}^n)$.

הגדרה במקרה הכללי

אם X יריעה כללית, ו $Y\subset X$ תת קבוצה/יריעה סגורה, יש כיסוי אפיני פתוח $U_1,...,U_m$ ויהא $\widetilde{U}_i$ הבלו־אפ של U_i ב $Y\cap U_i$.אז ע"י זיהוי (הן ממש אותה הקבוצה) של הסטריקט טרנספורם של $U_i\cap U_j$ ב־ U_i,U_j וכך לקבל יריעה $\widetilde{X}$ הנקראת הבלו־אפ של X ב Y, מסומנת גם $Bl_Y(X)$.

כאשר עושים בלו־אפ ביחס לנקודה: $a\in X$ מספיק לקחת קבוצה פתוחה אפינית $X\supset U\ni a$, $\widetilde{U}$ הבלו־אפ של U ב a, אז $\widetilde{X}$ מתקבל ע"י הדבקת (איחוד לאורך זיהוי) של $\widetilde{U},X-\{a\}$ לאורך הקבוצה המשותפת לשניהם $U-\{a\}$.

הגדרה במקרה הפרויקטיבי

X יריעה פרויקטיבית, (קוואזי פרויקטיבית) $f_1,...f_r\in S(X)$ הומוגנים מאותה דרגה, הבלו אפ של X ב $f_1,...f_r$ זה הסגור של הגרף $\Gamma=\{(x,(f_1(x):...:f_r(x))):x\in U=X-V_p(f_1,...,f_r)\}$ ב $X\times\mathbb{P}^{r-1}$, לפי שיכוני סגרה, זוהי יריעה פרוייקטיבית (קוואזי פרויקטיבית) אשר בירציונלית לX (פרט למקרה $U=\phi$)

3.4 תכונות הקבוצה המיוחדת

טענה תהי X יריעה אפינית ויהיו $f_1,...,f_r\in A(X)$ ותהי $\pi:\tilde{X}\longrightarrow X$ הבלואו־אפ. אזי לכל רכיב אי־פריקות של הקבוצה המיוחדת $\pi^{-1}(V(f_1,...,f_r))$ יש קו־מימד אחד ב $\tilde{X}$.

הוכחה נסמן $U_i = \{y_i \neq 0\} \subset \widetilde{X} \subset X \times \mathbb{P}^{r-1}$, מספיק להוכיח את הטענה עבור הקבוצות הפתוחות האפיניות הנ"ל (המהוות כיסוי פתוח), עבור $a \in U_i$ מתקיים כי $f_i(a) = 0 \Rightarrow f_j(a)$ בעזרת הלמה ולכן, על הקבוצה המיוחדת E יש משוואה אחת $E \cap U_i = V_a(f_i) \cap U_i$ אם $U_i \neq \phi$ אז $f_i \neq 0$ על כל U_i, כי אם כן, אז היינו מקבלים כי ככה גם על הסגור שלו $U_i \cap \widetilde{X}$ ואז היינו מקבליתם כי $U_i = \phi$. לכן על U_i הקבוצה המיוחדת היא קבוצת האפסים של פולינום שאינו 0 זהותית, ולכן היא מקו־מימד 1.

3.5 בלואו אפ והרחבה של מורפיזמים

$X \subset \mathbb{A}^n$, $f_1, ..., f_r \in A(X)$ יש מורפיזם $f : x \longrightarrow (f_1(x) : ... : f_r(x))$ המוגדר עבור הקבוצה $U = X - V(f_1, ..., f_r(x))$. באופן כללי, לא ניתן להרחיב אותו לכל X אבל כן אפשר להרחיב אותו לאחר בלו־אפ באידאל $I = \ < f_1, ..., f_r >$ של קבוצת "אי המוגדרות". יש הרחבה $\widetilde{f} : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^{r-1}$ ע"י הטלה לרכיב שני $\widetilde{X} \subset X \times \mathbb{P}^{r-1}$ וכמובן $\widetilde{f}|_U = f = (f_1 : ... : f_r)$.
כלומר, בלו־אפ נותן דרך להרחיב מורפיזמים לקבוצות גדולות יותר שללא הבלו־אפ הן לא היו מוגדרות.

3.6 דוגמאות

דוגמא 1: בלואו־אפ של node

הדוגמא הראשונה בה נדון הוא בלואו אפ בראשית ליריעה $N = V(y^2 - x^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2$ נסמן $\pi : \tilde{N} \longrightarrow N$ את העתקת הבלואו אפ ותהא $E = \pi^{-1}(0)$ הקבוצה המיוחדת. נתבונן ב $\tilde{N} - E$ ונתאר את נקודותיה כך: אם $(x, y, (z : w)) \in \tilde{N} - E$ אז $y^2 = x^2(x+1)$ וכן $xw = yz$ ממשוואות אלו נובע כי $x \neq 0$ וכי $z \neq 0$

כעת מהשויונים למעלה נובע: $x^2w^2 = y^2z^2 = x^2z^2(x+1)$ ולכן $y^2 = z^2(x+1)$.

ולכן $\tilde{N} - E \subset \{(x, y, (z : w)) : w^2 = z^2(x+1), y^2 = x^2(x+1)\}$

ומכאן

$$\widetilde{N} \subset \{(x, y, (z : w)) : w^2 = z^2(x+1), y^2 = x^2(x+1)\}$$

שהרי $\widetilde{N} - E \subset \widetilde{N}$ צפופה.

כעת נתאר את הקבוצה המיוחדת כאשר $x = 0$ הרי $w^2 = z^2$ ולכן

$$\widetilde{N} \cap E \subset \{(0, 0, (1 : 1)), (0, 0, (1 : -1))\}$$

נראה כי מתקיים שויון כי העקומה הפרמטרית $\gamma : \mathbb{A}^1 - \{-1, 1\} \longrightarrow \widetilde{N} - E$ הניתנת על ידי $\gamma(t) = (t^2 - 1, (t^2 - 1)t, (1 : t))$ היא על $\widetilde{N} - E$ ונקודות הקבוצה $\{(0, 0, (1 : 1)), (0, 0, (1 : -1))\}$ הן בסגור העקומה.

טענה $\widetilde{N} \simeq \mathbb{A}^1$

הרעיון הוא שהפונקציה ההפוכה ל γ לא הייתה מוגדרת בראשית, אבל לאחר בלו־אפ היא כן תהייה $\phi : \mathbb{A}^1 \longrightarrow N, \phi(t) = (t^2 - 1, (t^2 - 1)t, (1 : t))$ מורפיזם, הופכי: $\phi^{-1}((x, y, (z : w)) = \frac{w}{z}$

הסבר פילוסופי לעקום N יש בעיה בראשית: יש לו שני כיוונים משיקים באותה נקודה. לתופעה זו קוראים נקודה סינגולרית. על ידי מעבר לבלואו ־אפ הנקודה הכפולה של העקומה N הוחלפה בשתי נקודות שונות $\widetilde{N} \cap E$ מכיוון ששני הכיוונים המשיקים לעקומה N בראשית הם שונים ובעלי כיוונים שונים, בבלואו־אפ הם עולים למקומות שונים וכך מתקנים את הסינגולריות של העקום N. לתהליך זה קוראים התרת סינגולריות.

דוגמא 2: בלואו־אפ של cusp

נתבונן בעקום $C = V(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2$ ונבחין כי יש לו סינגולריות בראשית הנקראת שפיץ כלומר cusp. נעשה בלואו־אפ בראשית ונקבל $\pi : \widetilde{C} \longrightarrow C$ ונוכיח כי שוב $\widetilde{C} \simeq \mathbb{A}^1$ כלומר זו שוב התרת סינגולריות.

הטכניקה כמו קודם: נתבונן ב $\widetilde{C} - E$ כאשר $E = \pi^{-1}(0)$ הקבוצה המיוחדת. יהי $(x, y, (z : w)) \in \widetilde{C} - E$ אזי $x^3 = y^2, xw = yz$ נקבל כי $z \neq 0, x \neq 0$ ומכאן $x^3 z^2 = x^2 w^2$ כלומר $xz^2 = w^2$.

לכן $\widetilde{C} - E \subset \{(x, y, (z : w)) : x^3 = y^2, w^2 = xz^2\}$ ולכן אותה הכלה תקפה עבור $\widetilde{C}$.

מכאן $\widetilde{C} \cap E \subset \{(0, 0, (1 : 0))\}$ נראה כי זהו שויון על ידי התבוננות בעקומה $\gamma : \mathbb{A}^1 - \{0\} \longrightarrow \widetilde{C} - E$ הניתנת על ידי $\gamma(t) = (t^2, t^3, (1 : t))$ היא על $\widetilde{C} - E$ והנקודה $(0, 0, (1 : 0))$ היא בסגור של העקומה. תיארנו כעת את $\widetilde{C}$ כקבוצה וכדי להראות את האיזומורפיזם נעזר בהעתקה $\phi : \mathbb{A} \longrightarrow \widetilde{C}$ הניתנת על ידי אותה נוסחה כמו γ, קל לראות שזהו מורפיזם וההפכי $\phi^{-1}(x, y, (z : w)) = \frac{w}{z}$

הסבר פילוסופי לעקום C יש בעיה בראשית: יש לו שפיץ בנקודה כלומר למרות שיש משיק יחיד בנקודה אם נבנה סידרת מיתרים משני צידי הנקודה המתקרבים למשיק נקבל אותו קו ישר גבולי אבל עם כיוון הפוך

על ידי מעבר לבלואו ־אפ הנקודה כיון אחד מסתובב מרחבית כמו בציור והמיתרים לעקום $\widetilde{C}$ כבר ישאפו למשיקים בעלי כיוון זהה. לתהליך זה קוראים התרת סינגולריות. נעיר כי משפט כללי של הירונקה מבטיח כי כל יריעה ניתנת להתרת סינגולריות על ידי סדרה של בלואו־אפים (מוכללים). במקרה של עקומים מספיק לעשות בלואו־אפ בנקודות.

דוגמא 3: בלואו־אפ של $\mathbb{P}^2$ בשתי נקודות

טענה בלואו אפ של $\mathbb{P}^2$ בשתי נקודות איזומורפי לבלואו אפ של $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ בנקודה.

הוכחה נבחין תחילה כי $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ איזומורפי למשטח הישרים

$$X = V_p(x_0 x_3 - x_1 x_2) \subset \mathbb{P}^3$$

נחשב את $\widetilde{X} = Bl_a(X)$ כאשר מרכז בלואו־אפ הוא $a = (0 : 0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}^3$.

נסמן $b = (0 : 1 : 0), c = (0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}^2$.

$\widetilde{\mathbb{P}^2} \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$ הבלואו־אפ של $\mathbb{P}^2$ ביחס לפונקציות הבאות:

$$y_0^2, y_0 y_1, y_0 y_2, y_1 y_2$$

פולינומים אלו אינם יוצרים את האידיאל $I = I(\{b, c\}) =< y_0, y_1, y_2 >$ אבל כיוון שהבלואו־אפ הינו בניה מקומית הרי בקבוצות הפתוחות האפיניות $U_k = \{(y_0 : y_1 :$

$y_2) : y_k \neq 0\}$ ניתן לקבוע את $y_k = 1$ ב U_1 הפונקציות הנ"ל יוצרות את האידיאל $< y_0, y_2 >$ ובדומה ב U_2 ואילו בקבוצה U_0 הבלואו־אפ לא עושה כלום.

נגדיר מורפיזם אלגברי $f : \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$ על ידי

$$f((x_0 : x_1 : x_2 : x_3), (y_0 : y_1 : y_2)) = ((y_0 : y_1 : y_2), (x_0 : x_1 : x_2 : x_3))$$

אנו טוענים שצמצום $f : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$ משרה איזומורפיזם בין $\widetilde{X}$ ובין $\widetilde{\mathbb{P}^2}$

נוכיח כי f מעביר את $\widetilde{X}$ ל $\widetilde{\mathbb{P}^2}$ ושההופכי f^{-1} שולח את $\widetilde{\mathbb{P}^2}$ ל $\widetilde{X}$ מספיק לבדוק זאת על קבוצה פתוחה צפופה, וזה פשוט: על המשלים של הקבוצה המיוחדת ב $\widetilde{X}$ $x_0x_3 = x_1x_2$ ו $(x_0 : x_1 : x_2) = (y_0 : y_1 : y_2)$ ולכן על המשלים של $V_p(x_0)$ נקבל

$$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_0x_3) = (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2) = (y_0^2 : y_0y_1 : y_0y_2 : y_1y_2)$$

מה שנותן את המשוואות הנכונות עבור התמונה תחת f ב $\widetilde{\mathbb{P}^2}$ להפך, מסתכלים על המשלים ב $\widetilde{\mathbb{P}^2}$ של $V_p(y_0)$ (והקבוצה המיוחדת מוכלת במי שהוצאנו) נקבל מ $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (y_0^2 : y_0y_1 : y_0y_2 : y_1y_2)$ את שתי המשוואות: $x_0x_3 = x_1x_2$ ו $(x_0 : x_1 : x_2) = (y_0 : y_1 : y_2)$ מה שמראה כי התמונה תחת f^{-1} נמצאת ב $\widetilde{X}$.

הסבר פילוסופי נסתכל שוב על $X = V_p(x_0x_3 - x_1x_2) \subset \mathbb{P}^3$ ונטיל את X מ a למישור $V_p(x_3) \simeq \mathbb{P}^2$ בנוסחאות זה $f : (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \longrightarrow (x_0 : x_1 : x_2)$ מורפיזם המוגדר בכל נק פרט לב a. לא ניתן להגדיר $f(a)$ כי על מנת לעשות זאת היינו צריכים לקחת גבול של $f(x)$ כאשר $x \to a$ כלומר להסתכל על ישרים דרך x, a ש $x \to a$. ישרים אלו יהפכו לישרים המשיקים לX ב a. אבל X, מהיותו דו מימדי, בעל משפחה של ישרים משיקים כאלה ולכן $f(a)$ לא יהיה מוגדר היטב. אבל אם נעשה בלואו אפ בa, אנו נחליף את a בישרים המשיקים לX בו, וכל אחד מהם אנחנו יודעים לאיפה לשלוח, לוכן פתרנו בעיה זו ו f יהיה מוגדר מ $\widetilde{X} \longrightarrow V_p(x_3) = \mathbb{P}^2$.

עבור המורפיזם ההפוך, הנקודות ב $X - \{a\}$ הממופות לנק $y \in \mathbb{P}^2$ הן בדיוק אלה על הישר $\overline{ay}$ דרך a, y בד"כ הישר חותך את X בנקודה אחת פרט ל a , ועל נקודות אלה מוגדר f^{-1}, אבל זה לא נכון עבור הנקודות y, ש $\overline{ay} \subset X$, שם לאא יכול להיות הופכי. ויש בדיוק שתי נקודות y כאלה b, c ועבור שתי נקודות אלו, לאחק שנעשה בלו־אפ בכל אחת, אנו נחליף כל אחת בישר , ונעתיק אותו באופן 1־1 לישר $\overline{ay}$. ולכן נצפה כי f תהפוך לאיזומורפזים לאחר שנעשה בלו־אפ ב b, c, וזה מה שהוכחנו פורמלית.