חיתוכים במרחב פרויקטיבי

אלעד סייג

הקדמה:

המטרה של חלק זה הוא לחקור את החיתוכים של יריעות במרחבים פרויקטיבים. אם Y,Z יריעות ב $\mathbb{P}^n$ אז מה נוכל להגיד על $Y\cap Z$? בתרגיל 2.16, ראיתם כי $Y\cap Z$ לא חייב להיות יריעה, אבל זו קבוצה אלגברית, ואפשר לשאול על המימד של רכיבי אי הפריקות שלה. הרמז שלנו יהיה התורה של מ"ו, אם U,V תתי מרחבים ממימדים r,s של מרחב ממימד n, אז $U\cap V$ מ"ו ממימד $d\geq r+s-n$ ויתר על כן, אם הן במצב כללי, אז $d=r+s-n$ (כאשר הוא לפחות 0). תוצאה זו על מ"ו נותנת אוטומטית את הטענות המתאימות לתתי מרחבים לינאריים של $\mathbb{P}^n$. אחת מהתוצאות הראשונות שנקבל בפרק זה יהיה שאם Y,Z תתי יריעות של $\mathbb{P}^n$ ממימדים $r.s$ אז כל רכיב אי פריקות של $Y\cap Z$ הוא ממימד לפחות $r+s-n$, ויתר על כן, אם מספר זה אי־שלילי אז החיתוך לא ריק.

אפשר לשאול עוד שאלות, לדוגמה, אם $r+s=n$ וכי $Y\cap Z$ מורכב מקבוצה סופית של נקודות. אז אפשר לשאול, כמה נקודות יש? נתבונן במקרה מיוחד: אם $Y\subset\mathbb{P}^2$ עקום ממעלה d ו $Z\subset\mathbb{P}^2$ ישר, אז אנו יודעים כי ב $Y\cap Z$ יש לכל היותר d נקודות, והמספר הוא d אם נספור עם הכיפליות (שנבין מה זה בקונטקסט כללי בהמשך). זה מקרה ספציפי יותר של **משפט בזו**: אם $Y,Z\subset\mathbb{P}^2$ עקומות שונות מדרגות d,e אז $Y\cap Z$ מכיל de נקודות, אם נספור עם הכפיליות, אנו נוכיח את משפט בזו מאוחר יותר.

ההכללה העיקרית של משפט בזו ל $\mathbb{P}^n$ היא: ראשית, להגדיר את הדרגה של יריעה פרויקטיבית. ואם Y,Z יריעות ממימדים r,s ודרגות d,e ובהנחה ש Y וZ במצב כללי כך שכל רכיבי אי הפריקות של $Y\cap Z$ בעלי מימד השווה ל $r+s-n$ ונניח כי $r+s-n\geq 0$. לכל רכיב אי פריקות W של $Y\cap Z$, נגדיר את ריבוי החיתוך $i(Y,Z;W)$ של Y ו Z לאורך W. אז נקבל :

$$\sum i(Y,Z;W)\cdot deg(W)=de$$

כאשר הסכום רץ על רכיבי אי הפריקות של החיתוך.

החלק הכי קשה של ההכללה היא ההכללה של ריבוי החיתוך. אנו נגדיר את ריבוי החיתוך רק במקרה ש Z על־משטח. (בנספחים בהארטסורן יש את המקרה הכללי).

המשימה העיקרית שלנו בחלק זה הוא יהיה ההגדרה של דרגה של יריעה Y ממימד r במרחב פרויקטיבי $\mathbb{P}^n$. ההגדרה הקלאסית, הדרגה של Y מוגדרת כמספר נקודות חיתוך של Y עם תת מרחב לינארי L ממימד $n-r$ "מספיק כללי". עם הגדרה זו קשה לעבוד, ניתן לחלק את Y עם $n-r$ על מישורים מספיק כללי, אפשר למצוא L כנ"ל החותך את Y במספר סופי של נקודות. אבל המספר הזה יכול להיות תלוי ב L וקשה להסביר מה "מספיק כללי" אומר. לכן אנו ניתן הגדרה של דרגה שהיא אלגברית לחלוטין, דרך פולינומי הילברט. הגדרה זו היא פחות גיאומטרית, אבל יש לה את היתרון שהיא מדויקת.

1 משפטי מימד לחיתוכים של יריעות (אפיני ופרויקטיבי)

משפט (משפט מימד אפיני)
יהו Y, Z יריעות אפיניות ממימדים r, s ב $\mathbb{A}^n$. אז כל רכיב אי פריקות (יתכן כי אין כאלה) W של $Y \cap Z$ הוא ממימד לפחות $r+s-n$.

הוכחה
ראשית, נוכיח עבור Z שהוא על־משטח המוגדר ע"י משוואה $f=0$. אם $Y \subseteq Z$ אז אין מה להוכיח. אם $Z \nsubseteq Y$ אז נוכיח כי לכל רכיב אי פריקות W של $Y \cap Z$ יש מימד $r-1$. יהיה $A(Y)$ חוג הקורדינטות האפיני, אז רכיבי אי הפריקות W של $Y \cap Z$ מתאימים לאידאלים ראשוניים מינימליים $\mathfrak{p}$ המכילים את האידאל הראשי (f) ב $A(Y)$. כעת, לפי משפט האידאל הראשי של קרול, נובע כי גובהו של $\mathfrak{p}$ הוא 1, ולכן לפי משפט המימד $A(Y)/\mathfrak{p}$ ממימד $r-1$. ולכן נקבל כי כל רכיב אי פריקות W ממימד $r-1$.
כעת עבור המקרה הכללי, נתבונן במכפלה $Y \times Z \subseteq \mathbb{A}^{2n}$ שהיא יריעה ממימד $r+s$ יהא Δ האלכסון $\{\mathrm{P}\times\mathrm{P} : \mathrm{P}\in \mathbb{A}^n\} \subseteq \mathbb{A}^{2n}$ אז $\mathbb{A}^n$ איזומורפית ל Δ בעזרת ההעתקה $P \to P \times P$. ובהעתקה זו, $Y \cap Z$ מתאים ל $(Y \times Z) \cap \Delta$. מכיוון של Δ יש מימד n ומכיוון ש $r+s-n=(r+s)+n-2n$ מספיק להוכיח את הטענה עבור שתי היריעות $Y \times Z, \Delta$ ב $\mathbb{A}^{2n}$, אבל Δ הוא חיתוך של בדיוק n על־מישורים: $\Delta = V(x_1-y_1) \cap V(x_2-y_2) \cap \cdots \cap V(x_n-y_n)$ כאשר $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$ הקורדינטות ב $\mathbb{A}^{2n}$. כעת נשתמש במקרה המיוחד לעיל n פעמים ונקבל את הרצוי. ■

משפט (משפט מימד פרויקטיבי)
יהו Y, Z שתי יריעות פרויקטיביות ממימדים r, s ב $\mathbb{P}^n$. אז כל רכיב אי פריקות של $Y \cap Z$ בעל מימד $\leq r+s-n$. יתר על כן, אם $r+s-n \geq 0$ אז $Y \cap Z \neq \emptyset$.

הוכחה
העובדה הראשונה נובעת מהמשפט הקודם, כיוון ש $\mathbb{P}^n$ מכוסה ע"י יריעות אפיניות n־מימדיות.
כדי להראות שהחיתוך לא ריק, נתבונן ב $C(Y), C(Z) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ הקונוסים מעל Y, Z (התמונה ההפוכה של ההטלה המגדירה מרחב פרויקטיבי איחוד עם הראשית) . אלו יריעות. המימדים של $C(Y), C(Z)$ הם $r+1, s+1$. ובנוסף $C(Y) \cap C(Z) \neq \emptyset$ כי שניהם מכילים את הראשית $P=(0,\ldots,0)$ אבל לפי משפט המימד האפיני, לרכיב אי הפריקות $P \in W \subset Y \cap Z$ יש מימד d כאשר

$$d \geq (r+1)+(s+1)-(n+1) = r+s-n+1 > 0$$

ומכאן יש ב W נקודה נוספת פרט ל P, ולכן יש ב $C(Y) \cap C(Z)$ נקודה פרט לראשית, כלומר $Y \cap Z \neq \emptyset$. ■

2 פולינום הילברט ודרגה של יריעה פרויקטיבית

כעת, אנו נגדיר את פולינום הילברט של יריעה פרויקטיבית $Y \subseteq \mathbb{P}^n_k$ פולינום $P_Y \in \mathbb{Q}[z]$ שממינו נסיק אינווריאנטים נומריים (מספרים) על Y. אנו נגדיר את P_Y בעזרת חוג הקורדינטות ההומוגני $S(Y)$. למען האמת, אנו נגדיר פולינום הילברט עבור S־מודול מדורג, כאשר $S=k[x_0,\ldots,x_n]$. אנו נוכיח את כל הטענות מאלגברה שנטען בפרק זה.

הגדרה פולינום נומרי זה פולינום $P(z) \in \mathbb{Q}[z]$ כך ש $P(n) \in \mathbb{Z}$ לכל $n \in \mathbb{Z}$ $n \gg 0$ (n מספיק גדול)

למה 1:
א. אם $P(z) \in \mathbb{Q}[z]$ פולינום נומרי, אזי יש שלמים $c_0, \dots, c_r$

$$P(z) = c_0 \binom{z}{r} + c_1 \binom{z}{r-1} + \dots + c_r$$

כאשר

$$\binom{z}{k} = \frac{1}{k!} z(z-1)\cdots(z-r+1)$$

פונקציות המקדמים הבינומיים. בפרט $P(n) \in \mathbb{Z}$ לכל $n \in \mathbb{Z}$.
ב. אם $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ פונקציה, ונניח כי יש פולינום נומרי $Q(z)$ כך שפונקציית ההפרש $\Delta f = f(n+1) - f(n)$ שווה ל $Q(n)$ עבור $n \gg 0$.

הוכחה
א. באינדוקציה על הדרגה של P , בסיס האינדוקציה: דרגת P היא 0 , ואז הטענה ברורה. כעת נניח עבור $r-1$ ונוכיח עבור r , נשים לב כי ... + $\binom{z}{r} = z^r/r!$ ולכן באינדוקציה קל להוכיח כי כל פולינום ניתן לייצוג יחיד באופן לעיל , כאשר $c_0, \dots, c_r \in \mathbb{Q}$ (כלומר זהו בסיס לפולינומים מעל $\mathbb{Q}$). לכל פולינום P נגדיר את פולינום ההפרש ΔP לפי $\Delta P(z) = P(z+1) - P(z)$. מכיוון ש $\Delta\binom{z}{r} = \binom{z}{r-1}$, נקבל

$$\Delta P(z) = c_0 \binom{z}{r-1} + c_1 \binom{z}{r-2} + \dots + c_{r-1}$$

ולפי יחידות והנחת האינדוקציה (ברור כי ΔP פולינום נומרי אם P כזה) , $c_0, \dots c_{r-1} \in \mathbb{Z}$. אבל אז $c_r \in \mathbb{Z}$ מכיוון ש $P(n) \in \mathbb{Z}$ עבור $n \gg 0$.
ב. נכתוב

$$Q = c_0 \binom{z}{r} + \dots + c_r$$

כאשר $c_0, \dots, c_r \in \mathbb{Z}$. יהא $P = c_0\binom{z}{r+1} + \dots + c_r\binom{z}{1}$ אזי $\Delta P = Q$ ולכן, $\Delta(f-P)(n) = 0$ עבור n מספיק גדול, ולכן $(f-P)(n) = c_{r+1}$ קבוע (שלם) עבור $n \gg 0$. ואז $f(n) = P(n) + c_{r+1}$ עבור $n \gg 0$. ■

כעת, נזדקק למעט הכנה בנוגע למודולים מדורגים.

הגדרה: יהא S חוג מדורג, S־מודול מדורג זה S־מודול M, יחד עם פירוק $M = \oplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$ כך ש $S_d M_e \subseteq M_{d+e}$.
עבור איזשהו S־מודול מדורג M ו $l \in \mathbb{Z}$ נגדיר את המודול המוזז (twisted module) $M(l)$ ע"י הזזת l מקומות ימינה, כלומר $M(l)_d = M_{d+l}$. אם M הוא S־מודול מדורג, המאפס שלו $Ann(M) = \{s \in S | s \cdot M = 0\}$ זהו אידאל הומוגני של S.

למה 2: יהא M מודול מדורג נוצר סופית מעל חוג מדורג נתרי S. אז יש פילטרציה (filration) $0=M^0\subseteq M^1\subseteq\cdots\subseteq M^r=M$ של M ע"י תתי מודולים מדורגים, כך שלכל i, $M^i/M^{i-1}\cong(S/\mathfrak{p}_i)(l_i)$ כאשר $\mathfrak{p}_i$ אידאלים ראשונים הומוגניים של S ו $l_i\in\mathbb{Z}$.
הפילטרציה לא יחידה, אבל לכל פילטרציה כנ"ל מתקיים:

א. אם $\mathfrak{p}$ אידאל הומוגני ראשוני של S, אז $\exists i:\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{p}_i\iff\mathfrak{p}\supseteq Ann(M)$. בפרט, האיברים המינימליים בקבוצה $\{\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_r\}$ הם האידאלים הראשונים המינימליים של M, כלומר האידאלים הראשונים שהם מינימליים מאלה המכילים $Ann(M)$.

ב. לכל אידאל ראשוני מינימלי של M, מספר הפעמים ש $\mathfrak{p}$ מופיע בקבוצה $\{\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_r\}$ שווה לאורך של המודול $M_\mathfrak{p}$ מעל החוג המקומי $S_\mathfrak{p}$. (ולכן לא תלוי בפילטרציה)

הוכחה:

עבור קיום פילטרציה: נתבונן בקבוצת תתי־המודלים־המדורגים של M עבורם יש פילטרציה כנ"ל. בבירור למודל ה0 יש פילטרציה ולכן הקבוצה אינה ריקה. M מודול נתרי (כי נוצר סופית מעל חוג נתרי), ולכן יש תת מודול כנ"ל $M'\subseteq M$. כעת נתבונן במודול המנה $M''=M/M'$ אם $M''=0$ סיימנו. אחרת, נתבונן בקבוצת האידאלים $\mathfrak{J}=\{I_m=Ann(m)|0\neq m\in M''\ homogneoues\ element\}$ אז כל I_m הוא אידאל הומוגני, ו $I_m\neq S$. מכיוון ש S חוג נתרי, ניתן למצוא איבר $0\neq m\in M''$ כך ש I_m איבר מקסימלי בקבוצה $\mathfrak{J}$, נוכיח קודם כי I_m אידאל ראשוני, אכן נניח $a,b\in S$ ונניח $ab\in I_m$ וכי $b\notin I_m$ אז אנו טוענים $a\in I_m$ ע"י פירוק לאיברים הומוגניים, ניתן להוכיח עבור a,bאיברים הומוגניים. כעת נתבונן באיבר $bm\in M''$ אז מכיוון ש $b\notin I_m$ נקבל כי $bm\neq 0$ ולכן $I_m\subseteq I_{bm}$ ולכן לפי מקסימליות של I_m, $I_m=I_{bm}$. אבל $ab\in I_m$ ולכן $abm=0$ ולכן $a\in I_{bm}=I_m$ כרצוי. כעת קיבלנו $\mathfrak{p}=I_m$ אידאל ראשוני, תהא הדרגה של mלהיות l. אז המודול $N\subseteq M''$ הנוצר ע"י m איזומורפי ל $(S/\mathfrak{p})(-l)$ ולכן נתבונן בתמונה ההפוכה של N ב M:N'. אז $M'\subsetneq N'$ ו $N'/M'\cong(S/\mathfrak{p})(-l)$ ולכן יש ל N' פילטרציה בסתירה למקסימליות של M'', כרצוי.

עבור א: נשים לב $\mathfrak{p}\supseteq Ann(M^i/M^{i-1})\ for\ some\ i\iff\mathfrak{p}\supseteq Ann(M)$ אכן, נראה:$\Rightarrow$ $\mathfrak{p}\supseteq\cap_{i=1}^r Ann(M^i/M^{i-1})$ וזאת כי $\mathfrak{p}\supseteq\sqrt{Ann(M)}\supseteq\cap_{i=1}^r Ann(M^i/M^{i-1})$ נניח כי $x\in Ann(M^i/M^{i-1})$ לכל i אז $xM^i\subseteq M^{i-1}$ ומכיוון ש $M^0=0$, $M^r=M$ נקבל כי $x^{r+100}M=0$ ולכן $x\in Ann(M)$ ומכאן $x\in\sqrt{Ann(M)}$ המוכיח את ההכלה. עכשיו רק נותר לשים לב כי $Ann(M^i/M^{i-1})=Ann((S/\mathfrak{p}_i)(l))=\mathfrak{p}_i$, כרצוי.

עבור ב: נעשה לוקליזציה באידאל ראשוני מינימלי $\mathfrak{p}$, מכיוון ש $\mathfrak{p}$ מינימלי בקבוצה $\{\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_r\}$, לאחר לוקליזציה, נקבל $M_\mathfrak{p}^i=M_\mathfrak{p}^{i-1}$ פרט למקומות בהן $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_i$ ובמקומות אלה: $M_\mathfrak{p}^i/M_\mathfrak{p}^{i-1}\cong(S/\mathfrak{p})_\mathfrak{p}=k(\mathfrak{p})$ שדה השברים של $S/\mathfrak{p}$ (אנו שוכחים את הדירוג) . ומכיוון שאלו שדות (ולכן זו סדרת הרכב לאחר שמוציאים את ה$M_\mathfrak{p}^i$ המתאימים), זה מוכיח כי ל$M_\mathfrak{p}$ כ$S_\mathfrak{p}$־מודול יש אורך סופי, השווה למספר הפעמים ש $\mathfrak{p}$ מופיע בקבוצה $\{\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_r\}$.
■

הגדרה: אם $\mathfrak{p}$ אידאל מינימלי של S־מודול מדורג M, נגדיר את הריבוי (multiplicity) של M ב $\mathfrak{p}$ המסומנת ב $\mu_\mathfrak{p}(M)$ להיות האורך של $M_\mathfrak{p}$ מעל $S_\mathfrak{p}$.

כעת אנו יכולים להגדיר את פולינום הילברט של מודול מדורג M מעל $S=k[x_0,\ldots,x_n]$.
ראשית, נגדיר את פונקציית הילברט φ_M של M, לפי

$$\varphi(l)=dim_k(M_l)\ ,l\in\mathbb{Z}$$

משפט: (הילברט־סר) יהי M S־מודול נוצר סופית מדורג כאשר $S = k[x_0, \dots, x_n]$.
אז יש פולינום יחיד $P_M(z) \in \mathbb{Q}[z]$ כך ש $\varphi_M(l) = P_M(l)$ עבור $l \gg 0$. יתר על כן, $deg\, P_M(z) = dim\, Z(Ann(M))$ כאשר Z מסמל את האפסים של אידאל הומוגני במרחב פרויקטיבי $\mathbb{P}^n$.

הוכחה: היחידות ברורה (פולינום נקבע על כל קבוצה אינסופית). קיום: נשים לב כי אם $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ סדרה מדויקת, אזי $\varphi_M = \varphi_{M'} + \varphi_{M''}$ וגם $Z(Ann\, M) = Z(Ann\, M') \cup Z(Ann\, M'')$, ולכן אם המשפט נכון עבור M', M'' אז הוא נכון גם עבור M (הדרגה של הסכום היא מקסימום הדרגות כי המקדמים המובילים אי שליליים כי מימד הוא אי שלילי). מלמה 2, ל M יש פילטרציה עם מנות מהצורה $(S/\mathfrak{p})(l)$ כאשר $\mathfrak{p}$ אידאל הומוגני ראשוני, ו $l \in \mathbb{Z}$. לכן צריכים להוכיח את המשפט עבור $M \cong (S/\mathfrak{p})(l)$, ההזזה l מתאימה להחלפת המשתנה $z \to z + l$, ולכן מספיק לבדוק את המקרה: $M \cong S/\mathfrak{p}$. אם $\mathfrak{p} = (x_0, \dots, x_n)$ אז $\varphi_M(l) = 0$ עבור $l > 0$ ולכן $P_M = 0$ עובד, ואכן $deg\, P_M = dim\, Z(\mathfrak{p})$ הגיוני אם נסכים שלפולינום ה0 יש דרגה -1 ולקבוצה הריקה יש מימד -1. אם $\mathfrak{p} \neq (x_0, \dots, x_n)$ אז יש i עבורו $x_i \notin \mathfrak{p}$ ונתבונן בסדרה המדויקת $0 \to M \to M \to M'' \to 0$ כאשר החץ השני הוא כפל ב x_i וכאשר $M'' = M/x_iM$. אזי $\varphi_{M''}(l) = \varphi_M(l) - \varphi_M(l-1) = (\Delta\varphi_M)(l-1)$ (מכיוון שיש הזזה ב 1 באינדקסים של l כי כופלים ב x_i). מצד שני: $Z(Ann\, M'') = Z(\mathfrak{p}) \cap H$ כאשר H הוא על־המישור $x_i = 0$, ו $Z(\mathfrak{p}) \nsubseteq H$ לפי הגדרת x_i ולכן על פי משפט הוכחת משפט המימד (בתחילת ההרצאה) $dim\, Z(Ann\, M'') = dim\, Z(\mathfrak{p}) - 1$. כעת בעזרת אינדוקציה על $dim\, Z(Ann\, M)$, ניתן להניח כי $\varphi_{M''}$ פונקציה פולינומיאלית $P_{M''}$ ממקום מסויים, וכי $deg\, P_{M''} = dim\, Z(Ann\, M'')$. כעת, לפי למה 1 חלק ב' , נובע כי φ_M הוא פונקציה פולינומיאלית ממקום מסויים, שנסמנו P_M וכמובן נובע גם מלמה 1, $deg\, P_M = dim\, Z(\mathfrak{p})$.
■

הגדרה:

- ⋆ הפולינום P_M מהמשפט יקרא פולינום הילברט (Hilbert polynomial) של M.
- ⋆ אם $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ קבוצה אלגברית ממימד r, פולינום הילברט של Y מוגדר כפולינום הילברט של $S(Y)$ (חוג הקורדינטות ההומוגני), ונסמן אותו ב P_Y. מהמשפט נובע כי הוא פולינום מדרגה r.
- ⋆ נגדיר את **הדרגה** של Y (degree) להיות $r!$ כפול המקדם המוביל של P_Y, ונסמנו ב $deg\, Y$

טענה: (תכונות של דרגה)

א. אם $Y \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \neq \emptyset$ אז P_Y הדרגה של Y הוא מספר שלם חיובי

ב. אם $Y = Y_1 \cup Y_2$ כאשר ל Y_1 ול Y_2 יש את אותו מימד r, וכאשר $dim(Y_1 \cap Y_2) < r$ אזי, $deg\, Y = deg\, Y_1 + deg\, Y_2$.

ג. $deg\, \mathbb{P}^n = 1$.

ד. אם $H \subseteq \mathbb{P}^n$ על־משטח שהאידאל שלו נוצר ע"י איבר הומוגני מדרגה d, אז $deg\, H = d$ (ולכן, ההגדרה של דרגה שנתנו פה מסכימה עם ההגדרה של דרגה של על־משטח כפי שהגדרנו בעבר (בפרק 1))

הוכחה:

א. מכיוון ש $Y \neq \emptyset$ נקבל כי P_Y פולינום לא 0 מדרגה $r = dim\, Y$, לפי למה 1.א $deg\, Y = c_0$ שהוא שלם. הוא חיובי מכיוון שעבור $l \gg 0$ $P_Y(l) = \varphi_{S(Y)}(l) \geq 0$ ולכן המקדם המוביל לא יכול להיות שלילי.

ב. נסמן I_1, I_2 האידאלים של Y_1, Y_2 בהתאמה. אז $I = I_1 \cap I_2$ האידאל של Y. יש סדרה מדויקת:

$$0 \to S/I \to S/I_1 \oplus S/I_2 \to S/(I_1 + I_2) \to 0$$

כעת, $Z(I_1 + I_2) = Y_1 \cap Y_2$ בעל מימד נמוך יותר. ולכן $P_{S/(I_1+I_2)}$ בעל דרגה $< r$. ולכן המקדם המוביל של $P_{S/I}$ הוא סכום המקדמים המובילים של P_{S/I_1} ו P_{S/I_2}.

ג. נחשב את פולינום הילברט של $\mathbb{P}^n$, זהו פולינום הילברט של P_S כאשר $S = k[x_0, \ldots, x_n]$. עבור $l > 0$ $\varphi_S(l) = \binom{l+n}{n}$, ולכן $P_S = \binom{z+n}{n}$ והמקדם המוביל של פולינום זה הוא $1/n!$, כרצוי.

ד. אם $f \in S$ פולינום הומוגני מדרגה d, יש לנו סדרה מדויקת (של S־מודולים מדורגים) $\square$

$$0 \to S(-d) \to S \to S/(f) \to 0$$

$\square$

כאשר החץ השני (לתוך S) הוא לכפול ב f, ולכן

$$\varphi_{S/(f)}(l) = \varphi_S(l) - \varphi_S(l-d)$$

ולכן פולינום הילברט של H הוא:

$$P_H(z) = \binom{z+n}{n} - \binom{z-d+n}{n} = \frac{d}{(n-1)!}z^{n-1} + \ldots$$

ולכן $deg\, H = d$. ■

כעת, מגיעה הטענה המרכזית של חלק זה, לגבי חיתוך של יריעה פרויקטיבית עם על־משטח, שזהו חלק מההכללה של משפט בזו למרחבים פרויקטיבים ממימד גבוה יותר, אבל לפני זאת, נגדיר ריבוי חיתוך:

הגדרה: יהא $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ יריעה פרויקטיבית ממימד r. יהא H על־משטח שלא מכיל את Y. אז, לפי הוכחת משפט המימד, $Y \cap H = Z_1 \cup \cdots \cup Z_s$ כאשר Z_j יריעות ממימד $r-1$. יהא $\mathfrak{p}_j$ האידאל ההומוגני של Z_j. נגדיר את **ריבוי החיתוך** (intersection multiplicity) של Y ו H לאורך Z_j להיות $i(Y, H; Z_j) = \mu_{\mathfrak{p}_j}(S/(I_Y + I_H))$ כאשר I_Y, I_H הם האידאלים ההומוגנים של Y, H. למודול $M = S/(I_Y + I_H)$ יש מאפס $I_Y + I_H$ ו $Z(I_Y + I_H) = Y \cap H$ ו μ זה הריבוי שהוגדר קודם (האורך של המודול לאחר לוקליזציה).

משפט: תהא $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ יריעה פרויקטיבית ממימד לפחות 1, ויהא $H \subseteq \mathbb{P}^n$ על משטח שלא מכיל את Y. יהו $Z_1, \ldots, Z_s$ להיות רכיבי אי הפריקות של $Y \cap H$. אזי

$$\sum_{j=1}^{s} i(Y, H; Z_j) \cdot deg\, Z_j = (deg\, Y)(deg\, H)$$

הוכחה:
יהי f פולינום הומוגני מדרגה d אשר מגדיר את H. נתבונן בסדרה המדויקת של S-מודולים מדורגים

$$0 \to (S/I_Y)(-d) \xrightarrow{f} S/I_Y \to M \to 0$$

כאשר $M = S/(I_Y + I_H)$. לאחר לקיחת פולינומי הילברט, נקבל:

$$P_M(z) = P_Y(z) - P_Y(z-d)$$

כעת נחשב את המקדם המוביל של שני הצדדים.
נניח Y ממימד r ומדרגה e. אז $P_Y(z) = (e/r!)z^r + \dots$ ולכן

$$P_Y(z) - P_Y(z-d) = (e/r!)z^r + \dots - [(e/r!)(z-d)^r + \dots] = (de/(r-1)!)z^{r-1} + \dots$$

(כי כל מחובר יורד דרגה כי $z^k - (z-d)^k$ ממעלה $k-1$) .
נתבונן במודול M, מלמה 2 יש לו פילטרציה $0 = M^0 \subseteq M^1 \subseteq \dots \subseteq M^q = M$ והמנות M^i/M^{i-1} מהצורה $(S/\mathfrak{q}_i)(l_i)$. ולכן $P_M = \sum_{i=1}^q P_i$, כאשר P_i הוא פולינום הילברט של $(S/\mathfrak{q}_i)(l_i)$. אם $Z(\mathfrak{q}_i)$ יריעה פרויקטיבית ממימד r_i ודרגה f_i, אזי $P_i = (f_i/r_i!)z^{r_i} + \dots$ ונשים לב כי ההזזה l_i לא משפיעה במקדם מוביל של P_i, ולכן אנו מעוניינים רק במקדמים המובילים של P_i , ונתעלם מאלה ש$deg\, P_i < r-1$. נותרנו רק אם ה P_i, שה $\mathfrak{q}_i$ אידאל מינימלי של M, והם $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ המתאימים ל Z_j-ים. וכל אחד מופיע $\mu_{\mathfrak{p}_j}(M)$ ולכן המקדם המוביל של P_M הוא:

$$(\sum_{j=1}^{s} i(Y, H; Z_j) \cdot deg\, Z_j)/(r-1)!$$

ולכן קיבלנו את הרצוי לאחר הכפלה ב $(r-1)!$. ■

מסקנה (משפט בזו Bezout's Theorem): יהו Y, Z שתי עקומות שונות ב $\mathbb{P}^2$, מדרגות r, s. אם $Y \cap Z = \{P_1, \dots, P_s\}$ אז

$$\sum_{j=1}^{s} i(Y, Z; P_j) = de$$

הוכחה: לנקודה יש פולינום הילברט 1, ולכן דרגה 1. (שם לב כי אנו מסמנים $i(Y, Z; P)$ במקום $i(Y, Z; \{P\})$)■

הערה: ההוכחה שלנו נותנת מקרה של משפט בזו גם במקרה ש Y, Z הם "עקומים פריקים" כלומר, קבוצות אלגבריות ממימד 1 ב $\mathbb{P}^2$, בהינתן שאין להם רכיבי אי פריקות משותפים.

הערה: ממשפט בזו בפרט נובע כי אם Y, Z קבוצות אלגבריות ממימד 1 ב $\mathbb{P}^2$ מדרגות d, e נחתכים לכל היותר ב$d \cdot e$ נקודות, בהינתן שאין להן רכיבי אי פריקות משותפים

3 איך לחשב ריבוי חיתוך?

נפתח בלמה שימושית לחיים:

למה:

(א) יהא $I \subseteq k[x_1,\dots,x_n]$, ונניח כי $V(I)=\{p_1,\dots,p_N\}$ קבוצה סופית. נסמן $\mathcal{O}_i=\mathcal{O}_{p_i}(\mathbb{A}^n)$, אז יש איזומורפיזם קנוני: $k[x_1,\dots,x_n]/I \cong \prod_{i=1}^N \mathcal{O}_i/I\mathcal{O}_i$.

(ב) יהא $I \subseteq k[x_1,\dots,x_n]$ אידאל, אז $V(I)$ סופית אמ"מ $k[x_1\dots,x_n]/I$ ממימד סופי.

משניהם נקבל בפרט:

(ג) $dim_k(k[x_1,\dots x_n]/I)=\sum_{i=1}^N dim_k(\mathcal{O}_i/I\mathcal{O}_i)$, ובפרט כל $\mathcal{O}_i/I\mathcal{O}_i$ ממימד סופי מעל k.

(ד) אם $V(I)=\{p\}$ אז $k[x_1,\dots,x_n]/I \cong \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^n)/I\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^n)$.

הוכחה:

(א) $I_i=I(\{p_i\})\subset k[x_1,\dots,x_n]$ האידאלים המקסמליים השונים אשר מכילים I. $R=k[x_1,\dots,x_n]/I$, $R_i=\mathcal{O}_i/I\mathcal{O}_i$. יש הומו' קנוני $\varphi_i:R\to R_i$, ולכן מושרה הומו $\varphi:R\to\prod_{i=1}^N R_i$.

לפי משפט האפסים של הילברט, $\sqrt{I}=I(\{p_1,\dots,p_N\})=\bigcap I_i$ ולכן $(\bigcap I_i)^d\subset I$ לאיזשהו d (בגלל שהחוג נתרי), מכיוון ש $\bigcap_{j\neq i} I_j, I_i$ אידאלים זרים (החיבור יוצא הכל), נובע כי $\bigcap I_j^d=(I_1\cdot\dots\cdot I_N)^d=(\bigcap I_j)^d$ (זו טענה אלגברית כללית). כעת נבחר $F_i\in k[x_1,\dots,x_n]$ כך ש $F_i(p_j)=\delta_{ij}$ (דלתא של קרונקר, קיום של כאלה פולינומים יושאר כתרגיל). נסמן $E_i=1-(1-F_i^d)^d$ נשים לב כי $E_i=F_i^dD_i$ עבור איזשהם D_i, ולכן $E_i\in I_j^d$ אם $j\neq i$ ו $1-\sum_i E_i=(1-E_j)-\sum_{i\neq j}E_i\in\bigcap I_j^d\subseteq I$.

בנוסף, $E_i-E_i^2=E_i(1-F_i^d)^d\in\bigcap_{j\neq i}I_j^d\cdot I_i^d\subseteq I$, נסמן ב e_i את המחלקה של E_i ב R, קבלנו: $e_i^2=e_i$ וגם $e_ie_j=0$ ל $i\neq j$, $\sum e_i=1$. **טענה:** אם $G\in k[x_1,\dots,x_n]$ ו $G(p_i)\neq 0$ אז יש $t\in R$ כך ש $gt=e_i$ כאשר $g=G+I\in R$

הסבר: ניתן להניח כי $G(p_i)=1$, יהא $H=1-G$ אז $(1-H)(E_i+HE_i+\dots+H^{d-1}E_i)=E_i-H^dE_i$, ולכן $H\in I_i$, ולכן $H^dE_i\in I$. ולכן $t=e_i+he_i+\dots+h^{d-1}e_i$ יעבוד כאשר $h=H+I$.

φ חח"ע: אם $\varphi(f)=0$ אז ניקח לf נציג F, לכל i יש G_i עם $G_i(p_i)\neq 0$ ו $G_iF\in I$. מהטענה יש $t_i\in R$ כך ש $g_it_i=e_i$, אז: $f=\sum e_if=\sum t_ig_if=0$ כרצוי.

φ על: מכיוון ש $E_i(p_i)=1$, $\varphi_i(e_i)$ הפיך ב R_i ומכיוון ש $\varphi_i(e_i)\varphi_i(e_j)=\varphi_i(e_ie_j)=0$, ולכן $\varphi_i(e_j)=0$ ל $i\neq j$. ולכן $\varphi_i(e_i)=\varphi_i(\sum e_j)=\varphi(1)=1$. כעת נניח $z=(a_1/s_1,\dots,a_N/s_N)\in\prod R_i$. מהטענה, אפשר למצוא t_i כך ש $t_is_i=e_i$, ואז $a_i/s_i=a_it_i$ ב R_i. ואז $\varphi_i(\sum t_ja_je_i)=\varphi_i(t_ia_i)=a_i/s_i$ ואז $\varphi(\sum t_ja_je_j)=z$. $\square$

(ב) לכל r ניקח $P_1,\dots,P_r\in V(I)$ שונות, ניקח פולינומים $F_i\in k[x_1,\dots x_n]$ כך ש $F_i(P_j)=\delta_{i,j}$ נסמן $\overline{F_i}=F_i+I\in k[x_1,\dots,x_n]/I$. אז נראה כי הם בלתי תלויים: אם $\sum\lambda_i\overline{F_i}=0$, $\lambda_i\in k$ אז $\sum\lambda_iF_i\in I$ ואז $\lambda_i=(\sum\lambda_jF_j)(P_i)=0$. ולכן קבלנו $dim_k(k[x_1,\dots x_n]/I)\geq r$ וזאת לכל r.

להפך, אם $V(I)=\{p_1,\dots,p_N\}$ סופית, נסמן $p_i=(a_{i1},\dots,a_{in})$ ונגדיר $F_j=\prod_{i=1}^r(x_j-a_{ij})$, $j=1,\dots,n$. יודעים $F_j\in I(V(I))$ ולכן ממשפט האפסים $F_j^N\in I$ עבור N כלשהו מספיק גדול. נסתכל מודולו I(נכתוב צמוד כדי לסמן מחלקה) $\overline{F_j^N}=0$ ולכן $\overline{x_j}^{rN}$ הוא צירוף k- לינארי של $\overline{1},\overline{x_j},\dots,\overline{x_j}^{rN-1}$. מכאן נובע כי כל $\overline{x_j}^s$ הוא צירוף

של $\overline{1}, \overline{x_j}, \dots, \overline{x_j}^{rN-1}$ ולכן הקבוצה הסופית $\{\overline{x_i}^{m_i} | i = 1, \dots n,\ m_i = 1, \dots rN-1\}$ פורשת את $k[x_1, \dots x_n]/I$ מעל k. כרצוי. $\square$

(ג),(ד)־ מסקנות מיידיות $\blacksquare$

אנו נראה בחלק זה, אלגוריתם לחישוב של ריבוי חיתוך במקרה של עקומים, ברור כי עד כדי הזזה לינארית ניתן להניח כי העקומים נחתכים ב $p = (0:0:1)$

סימונים: $C, D \subseteq \mathbb{P}^2$ עקומות פרויקטיביות הנחתכות ב $(0:0:1)$, הפולינומים המתאימים להם $f, g \in k[x,y,z] = S$ (בהתאמה). $f^\star, g^\star \in k[x,y] = S^\star$ הפולינומים $f^\star(x,y) = f(x,y,1)$ וכנ"ל על $g^\star$. $\mathfrak{p}$ האידאל הומוגני של $(0:0:1)$.$\mathfrak{p}^\star$ האידאל המתאים ל $p^\star = (0,0)$. $M = k[x,y,z]/(f,g)$, $M^\star = k[x,y]/(f^\star, g^\star)$.

טענה: (ניתן לחשב ריבוי רק לפי חלק אפיני) $i(C,D;p) = length_{S^\star_{\mathfrak{p}^\star}}(k[x,y]/(f^\star,g^\star))_{\mathfrak{p}^\star} = length_{S^\star_{\mathfrak{p}^\star}}(M^\star_{\mathfrak{p}^\star})$

הוכחה: נשים לב כי החוגים $S_\mathfrak{p}$ ו $S^\star_{\mathfrak{p}^\star}$ הם איזומורפיים לפי שליחת z ל 1 כמו שיש בכל פעם שכותבים $\star$. אכן, אלו החוגים המקומים $\mathcal{O}_p(\mathbb{P}^2)$ ו $\mathcal{O}_{p^\star}(\mathbb{A}^2)$ ואלו הפונקציות בסביבה של p (או $p^\star$ שמזוהות לפי השיכון $\mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^2$) ומכיוון ש $\mathbb{A}^2$ פתוחה ב $\mathbb{P}^2$, נקבל כי זה אותם החוגים לפי ההעתקה לעיל, שבעזרתה המודול $M_\mathfrak{p}$ מזוהה עם המודול $M^\star_{\mathfrak{p}^\star}$, ובפרט בעלי אותו אורך. $\blacksquare$

טענה: $i(C,D;p) = dim_k\ \mathcal{O}_{p^\star}(\mathbb{A}^2)/(f^\star, g^\star)$

הוכחה: מספיק להבין מדוע $length_{S^\star_{\mathfrak{p}^\star}}(k[x,y]/(f^\star,g^\star))_{\mathfrak{p}^\star} = dim_k\ \mathcal{O}_{p^\star}(\mathbb{A}^2)/(f^\star,g^\star)$, בעצם אם נסמן $A = \mathcal{O}_{p^\star}(\mathbb{A}^2)$ $M = \mathcal{O}_{p^\star}(\mathbb{A}^2)/(f^\star,g^\star)$ אז צריך להוכיח: $length_A M = dim_k M$. נשים לב כי ל M יש אורך סופי מעל החוג הנתרי A כי הוא מרחב וקטורי סוף מימדי מעל k, וזאת נובע מהלמה והעובדה שהעקומים נחתכים במספר סופי של נקודות (שנובעת מבזו לדוגמא, אנו במקרה של עקומים אי־פריקים), כעת, נשים לב כי יש ל M פילטרציה מעל A (אין צורך לדירוג, לא אכפת לנו ממנו, ניתן לעשות דירוג שיש רק M_0, A_0 בדירוג ולקבל גרסה לא מדורגת) $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$ כאשר $M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{p}_i$ כאשר $\mathfrak{p}_i \subset A$ אידאלים ראשוניים, מכיוון ש $A/\mathfrak{p}_i$ תחום שלמות שהוא מ"ו ממימד סופי מעל k, נקבל כי הוא שדה, כלומר $\mathfrak{p}_i$ מקסימלי ולכן $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}_p$ (כי אנו בחוג מקומי!) ולכן

$$length_A M = \sum_i length_A(M_i/M_{i-1}) = \sum_i length_A(A/\mathfrak{m}_p) = \sum_i length_A k = \sum_i 1 = \sum_i dim_k(M_i/M_{i-1}) = dim_k M$$

$\blacksquare$

הערה: א. עקומים לעיתים יסמנו את ה V שלהם ולפעמים את הפולינום.

בעזרת הטענה הקודמת ניתן להגדיר גם ריבוי חיתוך במקרה של עקומים פריקים, וקל לראות שבעזרת המשפט הבא (תכונה 6!) ומשפט בזו לעקומות אי פריקות שהוכחנו נקבל את המקרה הכללי של משפט בזו לעקומים לאו דווקא אי פריקים, בהינתן שאין להם רכיב אי פריקות משותף.

משפט: עבור עקומים (יתכן כי פריקים) F, G במישור $p \in \mathbb{A}^2$ ריבוי החיתוך $i(F,G;p) = dim_k(\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)/(F,G))$ מקיים את התכונות הבאות:

1.$i(F,G;p)$ מספר שלם אי שלילי לכל F,G,p כך ש F,G נחתכים באופן טוב ב p (רכיבי אי הפריקות של F,G המכילים את p שונים) ו$i(F,G;p)=\infty$ אם הם לא נחתכים באופן טוב ב p.

2. $i(F,G;p)=0$ אם ורק אם $p\notin F\cap G$. $i(F,G;p)$ תלוי רק ברכיבי אי הפריקות של F,Gהעוברים דרך p. ($i(F,G;p)=0$ אם G או F קבוע לא 0)

3.אם T שינוי אפיני של קורדינטות ב $\mathbb{A}^2$ ו $T(q)=p$ אז $i(F,G;p)=i(F^T,G^T,q)$.

4. $i(F,G;p)=i(G,F'p)$

5.$i(F,G;p)\geqslant m_p(F)m_p(G)$ ויש שיוויון אמ"מ ל F,G אין ישרים משיקים משותפים בp.

6.אם $F=\prod F_i^{r_i}$ ו $G=\prod G_j^{s_j}$ אזי $i(F,G;p)=\sum_{i.j}r_is_ji(F_i,G_j;p)$ (ולכן משפט בזו מוכלל גם לעקומים פריקי הודות לחישוב זה, הנותן דרך להגדיר ריבוי לעקומים פריקים)

7.$i(F,G;p)=i(F,G+AF;p)$ לכל $A\in k[x,y]$(כלומר הריבוי תלוי רק בתמונת G ב $A(F)$- חוג הקורדינטות האפיני של העקום)

ויתר על כן, זה המספר היחיד המקיים תכונות אלה, המוגדר עבור כל העקומות המישוריות (ויתר על כן, יש אלגוריתם לחשב את מספר זה בעזרת שבע התכונות)

הוכחה:

יחידות: נראה כי יש אלגוריתם לחשב את $i(F,G;p)$ בעזרת 7 התכונות. בעזרת 3ניתן להניח $p=(0,0)$, וכי $i(F,G;p)$ סופי לפי 1.המקרה בו $i(F,G;p)=0$ טופל בעזרת 2. ונמשיך בעזרת אינדוקציה: נניח $i(F,G;p)=n>0$, וכי $i(A,B;p)$ ניתן לחישוב כאשר $i(A,B;p)<n$. נתבונן ב $F(x,0),G(x,0)\in k[x]$, נניח כי הם מדרגות r,s בהתאמה כאשר $r.s$יהיו 0 כאשר הפולינום 0. ניתן בעזרת 4 להניח כי $r\leq s$, יש שני מקרים:

מקרה א: y מחלק את F, ואז $F=yH$ ולפי 6:

$$i(F,G;p)=i(y,G;p)+i(H,G,p)$$

אם, $G(x,0)=x^m(a_0+a_1x+...)$, $a_0\neq 0$. אז $i(y,G;p)=i(y,G(x,0)=i(y,x^m)=m$ לפי 7,2,6,5. מכיוון ש $p\in G$, $m>0$ אז $i(H,G;p)\leq n-1$ ובעזרת אינדוקציה סיימנו.

מקרה ב: $r>0$ואז ע"י הכפלת F,G בקבועים ניתן להפוך $F(x,0),G(x,0)$ למתוקנים. יהי $H=G-x^{s-r}F$ אז, $i(F,G;p)=i(F,H;p)$ לפי 7, ו $deg(H(x,0))=t<s$. נמשיך בתהליך זה, (ע"י שינוי Fב H ו $t<r$) לאחר מספר סופי של פעמים כאלה נישאר עם זוג עקומים A,B אשר נופלים למקרה 1, ו $i(A,B;p)=i(F,G;p)$. וסיימנו.

קיום: אנו צריכים להוכיח כי $i(F,G;p)=dim_k(\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)/(F,G))$ מקיימת תכונות 1-7.

מכיוון ש $i(F,G;p)$ תלוי רק באידאל ב $\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)$ הנוצר ע"י F,G, תכונות **2,4,7** ברורות. מכיוון ששינוי אפיני של קורדינטות נותן איזומורפיזם על חוגים מקומיים, **3** נובע גם. נסמן $\mathcal{O}=\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)$.

אם ל F ול G אין רכיבי אי פריקות משותפים, אז $i(F,G;p)$ סופי לפי הלמה חלק (ב). אם ל F ול G יש רכיב אי פריקות משותף H, אז $(F,G)\subseteq(H)$ ויש הומומרפיזם $\mathcal{O}/(F,G)\twoheadrightarrow\mathcal{O}/(H)$, ולכן $i(F,G;p)\geqslant dim_k(\mathcal{O}/(H))$. אבל $\mathcal{O}/(H)\cong\mathcal{O}_p(H)$ ו $\mathcal{O}_p(H)\supseteq A(H)$ ו $A(H)$ ממימד אינסופי שוב בעזרת הלמה חלק (ב). ולכן נקבל את **1**.

עבור **6**: מספיק להוכיח כי $i(F,GH;p)=i(F,G;p)+i(F,H;p)$ עבור כל F,G,H. ניתן להניח כי ל F ול GH אין גורמים אי פריקים משותפים, כי אז זה ברור ($\infty=\infty$) יהא $\varphi:\mathcal{O}/(F,GH)\to\mathcal{O}/(F,G)$ ההומומורפיזם הטבעי, ונגדיר העתקה k-לינארית $\psi:\mathcal{O}/(F,H)\to\mathcal{O}/(F,GH)$, $\psi(\bar{z})=\bar{G}z$ (כאשר הצמוד מסמל מודולו). בעזרת

אדיטיביות המימד מספיק להוכיח כי הסדרה

$$0 \to \mathcal{O}/(F,H) \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}/(F,GH) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}/(F,G) \to 0$$

מדוייקת. אנו נבדוק כי ψ חח"ע, השאר קל יותר וישאר כתרגיל. אם $\psi(\bar{z}) = 0$ אז $Gz = uF + vGH$ כאשר $u, v \in \mathcal{O}$. ניקח $S \in k[x,y]$ ש $S(p) \neq 0$ ו $Su = A$, $Sv = B$, $Sz = C$ ו $A, B, C \in k[x,y]$. אז $AF = G(C - BH)$ ב $k[x,y]$. אבל ל F, G אין גורם משותף ולכן F מחלק את $C - BH$ ולכן $C - BH = DF$ ולכן $z = (B/S)H + (D/S)F$ ולכן $\bar{z} = 0$. כרצוי.

עבור **5**: נסמן $m = m_p(F)$ ו $n = m_p(G)$. יהא $I = (x,y) \trianglelefteq k[x,y]$ נתבונן בדיאגרמה הבאה של מרחבים וקטורים והעתקות לינאריות

$$\begin{tikzcd}
(k[x,y]/I^n) \times (k[x,y]/I^m) \arrow[r, "\psi"] & k[x,y]/I^{m+n} \arrow[r, "\varphi"] & k[x,y]/(I^{n+m}, F, G) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
 & \mathcal{O}/(F,G) \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{O}/(I^{n+m}, F, G) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

כאשר φ, π, α ההומו' חוגים הטבעיים, ו ψ מוגדר לפי $\psi(\bar{A}, \bar{B}) = \overline{AF + BG}$.

בבירור φ, π חח"ע, ומכיוון ש $V(I^{n+m}, F, G) \subseteq \{p\}$ נקבל מחלק (ד) של הלמה כי α איזומורפיזם. קל לבדוק כי השורה העליונה מדויקת, ונובע מכך כי

$$dim(k[x,y]/I^n) + dim(k[x,y]//I^m) \geq dim(Ker(\varphi))$$

ושיוויון אמ"מ ψ חח"ע. ועוד נובע כי

$$dim(k[x,y]/(I^{n+m}, F, G)) = dim(k[x,y]/I^{n+m}) - dim(Ker(\varphi))$$

ולכן:

$$i(F,G;p) = dim(\mathcal{O}/(F,G)) \geq dim(\mathcal{O}/(I^{n+m}, F, G)) = dim(k[x,y]/(I^{n+m}, F, G) \geq dim(k[x,y]/I^{n+m}) - dim(k[x,y]/I^n) - dim(k[x,y]/I^m) = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2} = nm$$

וזה מוכיח כי $i(F,G;p) \geq mn$ ושווה אמ"מ שני א"ש לעיל הם שיווין, כלומר אם: $I^{n+m} \subseteq (F,G)\mathcal{O}$ וגם ψ חח"ע. ולכן תכונה **5** תנבע מהטענה הבאה:

טענה: (א) אם ל F, G אין ישרים משיקים משותפים ב p, אז $I^t \subseteq (F,G)\mathcal{O}$ עבור $t \geq m + n - 1$.

(ב) ψחח"ע אמ"מ ל F, G יש משיקים שונים ב p.

הוכחה: (א) יהו $L_1, \dots, L_m$ המשיקים ל F ב p. $M_1, \dots, M_n$ המשיקים ב G. נסמן $L_i = L_m, M_j = M_n$ עבור $i \geq m, j \geq n$, ונגדיר: $A_{ij} = L_1 \cdot \dots \cdot L_i \cdot M_1 \cdot \dots \cdot M_j$ לכל $i, j \geq 0$ ($A_{00} = 1$) הקבוצה $\{A_{ij} | i + j = t\}$ היא בסיס למ"ו של כל הפולינומים ההומוגנים מדרגה t (מספיק להוכיח אי תלות, כי ממימד $t + 1$, אם היה צירוף לינארי אז ע"י לקיחת האינדקס הראשון i כך שהמקדם שלו אינו 0, ואז מקבלים לאחר הנחת בה"כ ש$t \geq 1$ כי M_{t-i+1} מחלק איזשהו L_v, וזו בסתירה להנחה) , על מנת להוכיח (א), מספיק להראות כי $A_{ij} \in (F, G)\mathcal{O}$ כאשר $i + j \geq m + n - 1$, כלומר כאשר $i \geq m$ או $j \geq n$, נניח $i \geq m$ אז $A_{ij} = A_{m0}B$ כאשר B פולינום הומוגני מדרגה $i + j - m$. נכתוב $F = A_{m0} + F'$ כאשר כל הגורמים ב F' מדרגה$\leq m + 1$. אז $A_{ij} = BF - BF'$ כאשר כל גורם ב BF' מדרגה $\leq i + j + 1$. לכן היינו מסיימים, אם היינו יכולים להוכיח כי $I^t \subseteq (F, G)\mathcal{O}$ עבור t מספיק גדול. זו תוצאה של משפט האפסים של הילברט: יהא $V((F, G)) = \{p, q_1, \dots, q_s\}$ ונבחר פולינום H כך ש $H(q_i) = 0$ ו $H(p) \neq 0$. אז Hx ו Hy ב $I(V((F, G)))$ ולכן $(Hx)^N, (Hy)^N \in (F, G) \in k[x, y]$ עבור איזשהו N. ומכיוון ש H^N הפיך ב $\mathcal{O}$, $X^N, Y^N \in (F, G)\mathcal{O}$ ולכן $I^{2N} \subseteq (F, G)\mathcal{O}$ כרצוי.

(ב) נניח שהמשיקים שונים, וכי $\psi(\bar{A}, \bar{B}) = \overline{AF + BG} = 0$, אז $AF + BG$ מורכב מגורמים מדרגה לפחות $m + n$. נניח $r < m$, $s < n$ ונכתוב $A = A_r + higher\, terms$, $B = B_s + higher\, terms$, אז $AF + BG = A_r F_m + B_s G_n + \dots$. אז נקבל $r + m = s + n$ וכי $A_r F_m = -B_s G_n$. אבל ל F_m, G_n אין גורמים משותפים, ולכן F_m מחלק את B_s ו G_n מחלק את A_r. ולכן $s \geq m$, $r \geq n$. ולכן $(\bar{A}, \bar{B}) = (0, 0)$.

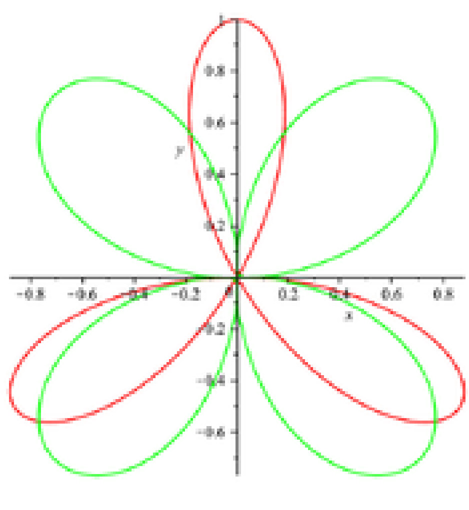
להפך, אם L היה ישר משיק משותף ל F, G ב p, נכתוב $F_m = LF'_{m-1}$ ו $Gn = LG'_{n-1}$, אז $\psi(\overline{G'_{n-1}}, -\overline{F'_{m-1}}) = 0$ ולכן ψ אינה חח"ע. ■

זה מוכיח את הטענה וכך גם את המשפט ■

דוגמא: (נניח מאפיין 0 או מעל $\mathbb{C}$ כדי לא לעשות שטויות)

1. ריבוי החיתוך של פרבולה וישר $C = y - x^2$ ו $D = y$ ב $p = (0, 0)$, אז נחליף את C ב $A = D - C = x \cdot x$ אז $i(C, D; p) = i(A, D; p) = i(x, y) + i(x, y) = 2$ כי $i(x, y) = 1$ כי שני הישרים נחתכים כראוי, והכפליות של כל אחד בראשית היא 1.
2. נחשב את ריבוי החיתוך $i(E, F; p)$ כאשר $E = (x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3$, $F = (x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2$ ו $p = (0, 0)$

בציור, בירוק זה F ובאדום זה E.



נחליף את F ב

$$\tilde{F} = F-(x^2+y^2)E = -4x^2y^2-(x^2+y^2)3x^2y+(x^2+y^2)y^3 = y(y^4+x^2y^2-3x^4-3x^2y^2-4x^2y) = y((x^2+y^2)(y^2-3x^2)-4x^2y) = yG$$

נחליף את Gב

$$\tilde{G} = G+3E = y^4-2x^2y-3x^4-4x^2y+3x^4+3y^4+6x^2y^2+9x^2y-3y^3 = y(5x^2-3y^2+4y^3+4x^2y) = yH$$

אז הישרים המשיקים ל E זה הגורמים של $3x^2-y^3$ זה שלושת הישרים: $y, (\sqrt{3}x-y), (\sqrt{3}x+y)$

הישרים המשיקים ל H : הגורמים של $5x^2-3y^2$ זה שני הישרים: $(\sqrt{5}x-\sqrt{3}y), (\sqrt{5}x+\sqrt{3}y)$.

לכן $i(E,F;p) = 2i(E,y;p)+i(E,H;p) = 2i(x^4,y;p)+m_p(E)m_p(H) = 2\cdot 4+2\cdot 3 = 14$.