סלון פינ
שעור 2

בעיית הקישורים (st con) מכוונים

st con

$G=(V,E)$ מכוון, $s,t \in V$ הגרף נ קשיר ל-.

- st con - NL-שלמה.
- NL = coNL גורר st con $\leq_L$ $\overline{\text{st con}}$
- $NL \in AC^1 \subseteq DSPACE(O(\log n))$

הוכחה: יהי A מ"ש הסמיכות של G

$(I+A)^n[s,t] > 0 \iff$ יש מסלול מ s ל t באורך $\leq n$.

אז יש $O(\log n)$ רמות של השאלה בהמון. כל השאלה ברמות

הן $\in AC^0$.

שאלה סרק

מסקנה: $NL \in DET$

$NL \leq_L DET$

הוכחה: A מ"ש הסמיכות של G

$\|A\| \leq n$

יש $0<\gamma<1$ כך ש $\|\gamma A\| < 1$ (נניח $\gamma = \frac{1}{2n}$).

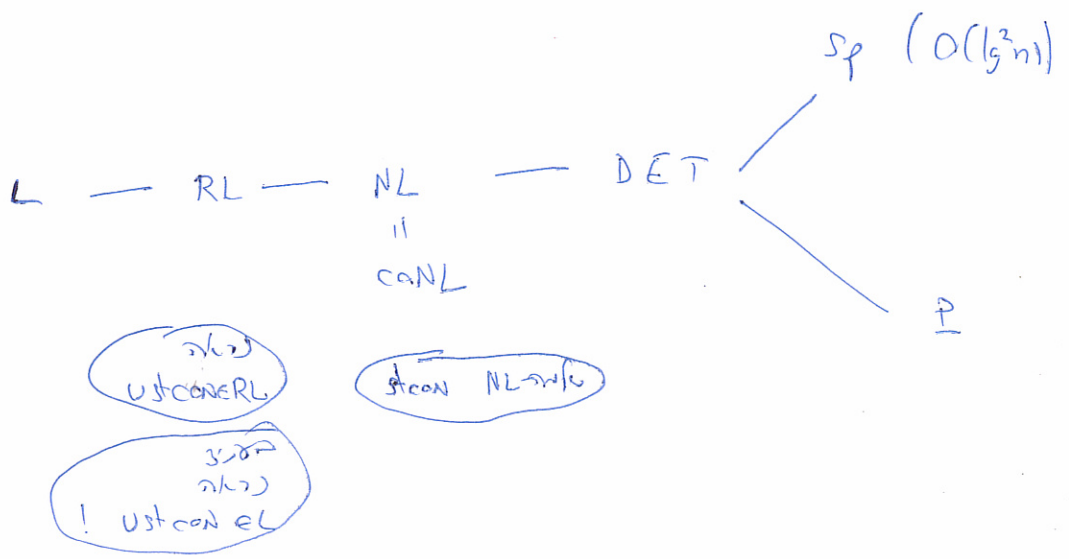
$$(1-A)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i$$

נחשב $I-A$

נחשב $(I-A)^{-1} \to DET$

ונחלק לרמות הבינומה $s,t > 0$.

לכל i $A^i[s,t] \geq 0$ $\sum_{i=0}^{\infty} A^i[s,t] = 0 \iff$ נ אין קשר ל s ל t. □



נשפט: USTCON ∈ RL

הוכחה: יהי $G=(V,E)$ גרף לא-מכוון.

נוסיף לו self-loops עד שיהיה **רגולרי**, למשל self-loop אחד לכל קודקוד.

תהי $G=(V,E)$ לא-מכוון **ורגולרי** עם כיוון d

לכל כיוון המעבר בו הוא

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d} & (i,j) \in E \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

האלגוריתם: — התחל ב s.

- לשלוח T צעדים ($T = O(n^5)$)

מתחילה לשבוע יקרא על השכן הנוכחי:

- אם כאיתי t עצור ותגיד "יקיים".

אחרת, לאחר T צעדים עצור ותגיד "לא יקיים".

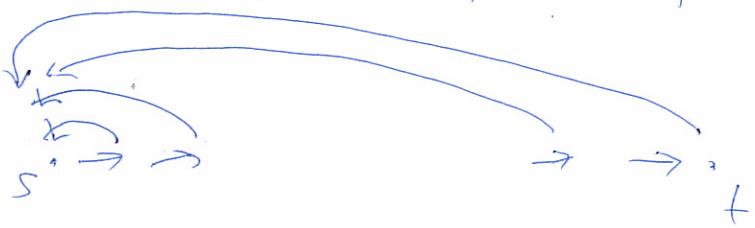
כיצד האלגוריתם מתכנס לכל מסלול?

(1) אי אפשר לדבר על המסלול הקל ביותר אם קיימים self loops

כי יתכן שיש קודקוד v כך ש $d_{in}(v) \neq d_{out}(v)$

(2) אולם נוכל את האלגוריתם מבלי הרוסים self-loops

יתכן כמו בדוגמה הקטנה כלל, למשל:



הוכחה נכונות האלגוריתם

A סימטרית,

לכן יש לה בסיס אורתונormלי $v_1, \dots, v_n$

עם ערכים עצמיים λ_1, המקיים $\lambda_1 \le \dots \le \lambda_n$

תרגיל: $\|A\| \le 1 \overset{def}{=} \max_{\|v\|=1} \|Av\|$

תרגיל: $\pi = \frac{1}{n}\vec{1}$ הוא וקטור עם ערך עצמי 1.

תרגיל: $\|A\| = \max_{\text{עצמי}} |\lambda_i(A)| = \max\{\lambda_1, -\lambda_n\}$

ולכן מסקנה $\lambda_1 = 1$, $v_1 = \frac{1}{n}\vec{1}$ $\lambda_n \ge -1$.

תרגיל: אם G מקיים כל-כך, A סימטרי ורציונלי

אז יש התאמה חח"ע בין ערכים שליליים לחיוביים.

(נבנה את ההתאמה בין הווקטורים העצמיים).

בפרט יש v_n עבורו $\lambda_n = -1$.

לא בהכרח הגרף הבא הוא מקרה שאינו מקיים את λ_n.

תרגיל: אם G סימטרי רציונלי, Φ **לא-קשיר**

אז $\dim(W_1) \ge 2$

הווקטור $\vec{1}$ הוא עם ערך עצמי 1

לעומת זאת $\dim(W_1) \ge$ מספר הרכיבי הקשירות.

משפט: אם G קשיר, פחות לא-מכוון, כלומר

~~(לא 1, 3=13 ~~

אז $\lambda_2(G) < \lambda_1(G)$ (בלומר $\dim(V_1)=1$).

ואם

$$\boxed{\lambda_2(G) \le \underset{\lambda_1(G)}{\underset{\shortparallel}{1}} - \frac{1}{pd_{V(G)}}}$$

בלומר: יהי G לא-מכוון, כלומר ~~(לא כל-{33})~~.

אזי

G לא קשיר $\iff$ $\lambda_2(G) = \lambda_1(G) = 1$

G קשיר $\iff$ $\lambda_2(G) < 1 - \frac{1}{pd_{V(G)}}$

$\lambda_2(G)$ מודדת האם G קשיר.

קשירות - כמה מעט מקשתות להסיר כדי לנתק. (שים לב לקשתות
שלא מגיעות אליך, כל מרכיבי קשירות מנותקים).

אם G קשיר, יש מספר תיאורים (פתרונות קיים)
ל $\lambda_1(G)$ ו $\lambda_2(G)$.

שפע: אם A נורמלי ($AA^t=A^tA$) יש ל A בסיס אורתונורמלי $v_1,\dots,v_n$ עם ערכים $\lambda_1,\dots,\lambda_n$

אם בנוסף A הרמיטי ($A=A^t$), אז כל הערכים $\lambda_i\in\mathbb{R}$

נסדר כך ש $\lambda_1\le\dots\le\lambda_n$.

$$\lambda_1=\max_{v:\|v\|=1}\langle Av,v\rangle$$

$$\lambda_2=\max_{\substack{v\perp v_1,\ \|v\|\\ \|v\|=1}}\langle Av,v\rangle$$

$$\vdots$$

$$\lambda_k=\max_{\substack{v\perp v_1,\dots,v_{k-1}\\ \|v\|=1}}\langle Av,v\rangle$$

$$\lambda_n=\min_{v:\|v\|=1}\langle Av,v\rangle$$

$$\|A\|=\max_{v:\|v\|=1}\frac{\|Av\|}{\|v\|}=\max\{|\lambda_n|,\lambda_1\}$$

אם הנורם הכי גדול (לגבי A מרכיבי מטריצה מקסימום לפי ערך מוחלט-עיין D-קלרי)

אז $\|A\|\le 1$.

$1=\lambda_1\le\dots\le\lambda_n\le 1$ ואז $v_1=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\vec{1}$

שפע: יהי G גרף מישורי D-קלרי, A מטריצת הקשירות

אז, $v_1,\dots,v_n$ אז כל עם $\lambda_1\le\dots\le\lambda_n$

G קשיר $\iff$ $\lambda_1(G)=1<\lambda_2(G)$

מבחר פרוק: אם G קשיר אז $\lambda_2(G)<1-\frac{1}{g^3n}$

אם G אינו קשיר: $\lambda_2(G)=1$.

הגדרה:

$$\lambda_1(A) = \max_{x:\ \|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$$

הגדרה:

$$\lambda_2(A) = \max_{\substack{x \perp v_1 \\ \|x\|=1}} \langle Ax, x\rangle$$

הוכחה:

$\lambda_2 \le 1 - \frac{1}{poly(n)}$!

$$\lambda_2(A) = \max_{x \perp \vec{1},\ \|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$$

$$= 1 - \frac{1}{d} \min_{x \perp \vec{1},\ \|x\|=1} \sum_{(i,j)\in E} (x_i - x_j)^2$$

$$1 - \frac{1}{d} \min_{x \perp 1,\ \|x\|=1} \left[\sum_{i=1}^{n} d\, x_i^2 - 2 \sum_{(i,j)\in E} x_i x_j \right]$$

[כי אין צורך נקבל

$$= \frac{2}{d} \max_{x \perp 1,\ \|x\|=1} \sum_{(i,j)\in E} x_i x_j = \langle Ax, x\rangle$$]

אבל, לכל $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|=1$, $x \perp \vec{1}$

יש חיובי כך $x_i > 0$, $x_j < 0$

נקח i לדוגמא האינדקס בו $x_i > 0$ מקסימלי

ו j " " " $x_j < 0$ מינימלי

אז בהכרח $\max\{|x_i|, |x_j|\} \ge \frac{1}{\sqrt{n}}$

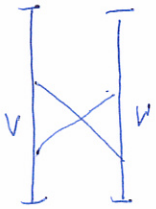
ולכן $|x_i - x_j| \ge \frac{1}{\sqrt{n}}$

ולכן יש $(\ell_1, \ell_2) \in E$ כך שמתוך i ו j (כי i קיצוני ו j קיצוני)

מתקיים $|x_{\ell_1} - x_{\ell_2}| \ge \frac{1}{n\sqrt{n}}$, ולכן $\lambda_2(A) \le 1 - \frac{1}{d}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{dn^3}$ $\square$

הערה: ניתן לשפר ל $\lambda_2(A) \le 1 - \frac{1}{dn^2}$.

אולם אם [illegible] בו-3333, לא מכוון, ל-כשלו



$|W| = |V| = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{c|c} & W \\ \hline V & B \\ \hline W & A \end{array} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$(B = A^{-1})$

לכל ערך
עם ערך λ

$$B v_2 = \lambda v_1$$
$$A v_1 = \lambda v_2$$

מה יקרה עם

$$\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & \end{array} \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B v_2 \\ -A v_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix} = (-\lambda) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

לכל ערך $-\lambda$.

יש שקיים גם הפוך.

תרגיל: לא הפיכה הכול- 333.

תרגיל:

$$\lambda_n = \min_{v:\ \|v\|=1} \langle Av, v\rangle$$

טענה: אם G לא מכוון, d-רגולרי, לא כל-333, אז קיים

$$\lambda_n(G) > (-1) + \frac{1}{n^2}$$

הוכחה: יהי x וקטור עצמי עבור λ_n, $\|x\|=1$.

הנחה $\max_{1\le i\le n} |x_i| = |x_1|$, הנחה $x_1 \ge 0$.

אז:

$$\sum_{(i,j)\in E} (x_i+x_j)^2 = \sum_{i=1}^{n} d x_i^2 + 2\sum_{(i,j)\in E} x_i x_j = d+\lambda_n.$$

נסמן:

$$A=\{i \mid x_i \ge 0\}$$
$$B=\{i \mid x_i < 0\}$$

מכוון ש G אינו קב 333, או $E\cap A\neq\emptyset$ או $E\cap B\neq\emptyset$.

מקרה 1: $E\cap A\neq\emptyset$

ל' $(i,j)\in E$ $x_i x_j \ge 0$.

הפיכת קשת, ולכן יש מסלול מ 1 ל $\{n,i\}$ המורכב מקשתות ב

בהנחה $i+1=j$.

בהנחה

$x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_j$

הבמסלול המקשר מ 1 ל i הוא המורכב גם

גם ... 1 ל j ...

יהי k מקסימלי מספר כזה כך $x_k \in \{x_i, x_j\}$

כך ש

$$\underset{\vee\, 0}{x_1},\ x_2,\ \dots,\ \underset{\vee\, 0}{x_k}$$

$$d+\lambda_n = \sum_{(i,j)\in E} (x_i+x_j)^2 \geq \sum_{i=1}^{k-1} (x_i+x_{i+1})^2 \geq \frac{1}{k-1}\left[\sum_{i=1}^{k-1} |x_i+x_{i+1}|\right]^2$$

לא הכי חלש

מספיק פשוט

קש. בורט

$$\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i\right) \leq \sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum 1}$$

$$\frac{(\sum a_i)^2}{k-1} \leq \sum a_i^2$$

$$\geq \frac{1}{k-1}\left[(x_1+x_2) + (-x_2-x_3) + (x_3+x_4) + (-x_4-x_5) + \dots + (x_{k-1}+x_k)\right]^2$$

$k-1$ איברים

$$= \frac{1}{k-1}\left[(x_1+x_k)^2\right] \geq \frac{x_1^2}{k-1} \geq \frac{x_1^2}{n} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$

<u>מקרה 2</u> $x_i, x_j < 0$ $(i,j)\in E$

$$\underbrace{1, \dots, i}_{\text{מסלול מינימלי}},\ \underset{j}{i+1}$$

$k \in \{i, i+1\}$ k - איברים

$$\underset{\vee\, 0}{x_1} \qquad \underset{\wedge\, 0}{x_k}$$

$$d+\lambda_n = \sum_{(i,j)\in E} (x_i+x_j)^2 \geq \frac{1}{k-1}\left[(x_1+x_2) + (-x_2-x_3) + (x_3+x_4) \dots + (-x_{k-1}-x_k)\right]^2$$

$$= \frac{1}{k-1}\left[(\underset{\vee\, 0}{x_1} - \underset{\wedge\, 0}{x_k})^2\right] \geq \frac{x_1^2}{k-1} \geq \frac{x_1^2}{n} \geq \frac{1}{n^2}$$

$\square$

<u>הגדרה:</u> G גרף מכוון $d^+_{out}(v) = d^-_{in}(v)$ $\forall v$. אז G', G הוא הכפלה G קש-

לחלק מכוון. לכל $v_1, v_2 \in V(G)$ קיים כל $v_1 \to v_2$ ב G

$\Leftrightarrow$ " " " G'.

<u>הערה:</u> גרף מכוון מקיים $d^+_{out} = d^-_{in}$ אם ורק אם הוא הכפלה של מעגלים.

הוכחה – נכונות אלגוריתם

A סימטרי $\qquad \lambda_n \le \dots \le \lambda_1 = 1$

$$\bar{\lambda} = \max_{i \ne 1} |\lambda_i| = \max\{\lambda_2, -\lambda_n\}$$

כי:

$$\lambda_2 \le 1 - \frac{1}{(dn)^2}$$

$$\lambda_n > (-1) + \frac{1}{n^c}$$

$$\boxed{\bar{\lambda} \le 1 - \frac{1}{d^2 n^2}}$$

לכן

$$p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ s}$$

$p_t = A^t p_0$ (מכפלת מטריצה t פעמים)

$A\vec{1} = \vec{1} \qquad v_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\vec{1}$

$$\|p_t - p_0\|_2 = \|A^t p_0 - \tfrac{1}{n}\vec{1}\| = \|A^t(p_0 - \tfrac{1}{n}\vec{1})\| = \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^t v_i - \tfrac{1}{\sqrt{n}} v_1\|$$

$$p_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

$$\alpha_1 = \langle p_0, v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\langle p_0, \vec{1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$= \|\sum_{i=2}^{n} \alpha_i \lambda_i^t v_i\| \le \sum_{i=2}^{n} |\alpha_i| \, |\lambda_i|^t \le \bar{\lambda}^t \sqrt{n} \underbrace{\sqrt{\sum |\alpha_i|^2}}_{\langle p_0, p_0\rangle = 1} = \sqrt{n}\,\bar{\lambda}^t$$

$$\le \sqrt{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{d^2 n^2}\right)^t$$

$$\|p_t - p_0\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |p_t(i) - p_0(i)| \le \sqrt{|p_t(i) - p_0(i)|^2}\,\sqrt{n} \le \|p_t - p_0\|_2 \cdot n \le n \cdot \bar{\lambda}^t$$

$$= n \cdot \left(1 - \frac{1}{d^2 n^2}\right)^t = n \cdot \left(1 - \frac{1}{d^2 n^2}\right)^{d^2 n^2 c \lg n} \le n \cdot \frac{1}{e^{c \ln n}} = \frac{n}{n^c} = \frac{1}{n^{c-1}}$$

$t = d^2 n^2 \cdot c \lg n$

לסיכום רואים שt גדול מספיק $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^{c-1}} \le$ (לדוגמא) מרחק בין הפצה לפיי $\|\cdot\|_\infty$.

הערה: על נורמות $\|\cdot\|_\infty \le \|\cdot\|_2 \le \|\cdot\|_1$

Universal Traversal Sequences

יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר, $v\in V$ כלשהו, $t\in V$

כי אז

$$\Pr\left[\begin{array}{c}\text{המלך מקור מלך}\\ O(dn^2\lg n)\\ \text{מגיע ל } t\end{array}\right] \geq \frac{1}{2n}$$

$$\Pr\left[\begin{array}{c}\text{המלך מקור מלך } T\\ \text{לא מגיע לת}\end{array}\right] \leq \left(1-\frac{1}{2n}\right)^{T/dn^2\lg n} = e^{-\frac{T}{2dn^3\lg n}}$$

הגדרה סדרה $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_T)\in[D]^T$

היא סדרה אוניברסלית לגרפים קשירים-מכוונים $G=(V,E)$, D-רגולרית

על n קודקודים, $n\geq 1$

אם לכל כניסה t, לכל כניסה לגרפר ו- הקשתות היוצאות מ $1..D$

לכל תת-קבוצה

המלך מ s לפי σ על G מגיע בדיוק ב t.

סימון יהי סדרה אוניברסלית כנ"ל מלך $T=$

הגדרה נאמר t,s מכוסים

$$\Pr_\sigma\left[\begin{array}{c}\sigma \text{ של אורך}\\ t,s \text{ לא מכוסים}\end{array}\right] \leq e^{-T/2dn^3\lg n}$$

$$\Pr_\sigma\left[\exists\ \begin{array}{c}t,s\\ \text{לא מכוסים}\end{array}\right] \leq \left|\begin{array}{c}t,s\\ \text{אפשרי}\end{array}\right| \cdot e^{-T/2dn^3\lg n} \leq (d+1)^{n^2}\cdot e^{-\frac{T}{2dn^3\lg n}} = 2^{-\frac{T}{2dn^3\lg n}+n^2\lg d} < 1$$

לכל בחירת מסלולים מספרי אלמנטים $1..d$

עבור $T > dn^5 \log(n)$

לאחרונה עבור T כנ"ל, יש סדרה אבודה כנ"ל. □