

הערות לשיעור 3

(N, D, \lambda) (א) G=(V, E) הן מרחב וקטורי

\lambda(G) \leq \lambda , -D מרחב וקטורי G , N=N א"א

(N, D, \lambda) (ב) G א"א מרחב וקטורי

(N, D^2, \lambda^2) " G^2 א"א

אם \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N, אז v_1, \dots, v_N, G הן מרחב וקטורי A מרחב וקטורי
 \lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_N^2 אז v_1, \dots, v_N, A^2 מרחב וקטורי G^2 א"א

$$\lambda(A^2) = \max\{\lambda_1^2, \lambda_N^2\} = (\lambda(A))^2 \quad / \text{א"א}$$

G הן מרחב וקטורי G^2 א"א

$$A_{n_1 \times m_1}$$

pk W3C

$$B_{n_2 \times m_2}$$

$$n_1, n_2 \times m_1, m_2$$

$$\Rightarrow \text{block } A \otimes B$$

jk

$$(A \otimes B)_{(i,j)(k,l)} = A_{ik} B_{jl}$$

l

$$1 \leq i, k \leq n$$

$$1 \leq j, l \leq m$$

$$A \otimes B$$

$$\begin{matrix} (1,1) & \dots & (1,m) \\ \vdots & & \vdots \\ (n,1) & \dots & (n,m) \end{matrix} \left(\begin{array}{c|c} a_{11} B & a_{1n} B \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline a_{n1} B & a_{nn} B \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \otimes (w_1 \dots w_m) = \begin{pmatrix} v_1 w_1 \\ \vdots \\ v_n w_m \end{pmatrix} = |v\rangle \langle w|$$

W3C

$$H_2 \otimes B = \begin{pmatrix} B & B \\ B & -B \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

-2

$\Rightarrow$

$$H_2 \otimes H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

JP 6 8/8 10/1

(2)

A_{n_1, n_2}

pk (1.8-1) 256

A_{n_1, n_2}

C_{n_2, n_3}

B_{m_1, m_2}

D_{m_2, m_3}

$$(A \otimes B) \cdot (C \otimes D) = AC \otimes BD$$

$$\underbrace{n_1 m_1 \times n_2 m_2}_{n_1 m_1 \times n_3 m_3} \quad \underbrace{n_2 m_2 \times n_3 m_3}_{n_1 m_1 \times n_3 m_3} \quad \underbrace{n_1 n_3}_{n_1 m_1 \times n_3 m_3} \quad \underbrace{m_1 m_3}_{n_1 m_1 \times n_3 m_3}$$

λ_i $v_1 \dots v_n$

" " A δ pk 256

μ_j

$w_1 \dots w_m$

" " B

$\lambda_i \mu_j$

"

"

$\{v_i \otimes w_j\}$

"

"

$A \otimes B$

δ, μ

$$(A \otimes B)(v_i \otimes w_j) = Av_i \otimes Bw_j = \lambda_i \mu_j v_i \otimes w_j$$

$$(A \otimes B) \{v_i \otimes w_j\} = \{ \lambda_i \mu_j v_i \otimes w_j \}$$

re 256

use 3.1.16 to get $G_1 = (V_1, E_1)$ h.c. is

" " " $G_2 = (V_2, E_2)$

to $V_1 \otimes V_2$ to get $G_1 \otimes G_2$ h.c.

$A = A_1 \otimes A_2$ h.c.

$$A(v_1, v_2) = (A_1 \otimes A_2)(v_1 \otimes v_2)$$

$$= A_1 v_1 \otimes A_2 v_2$$

h.c.

h.c. $\frac{A_1 \otimes A_2}{A_1 \otimes I_2}$ h.c.

h.c.

$$A_1 \otimes A_2 = (I \otimes A_2) (A_1 \otimes I)$$

h.c. $\frac{A_1 \otimes I}{A_1 \otimes I_2}$ h.c.

$G_1 (N_1, D_1, \lambda_1)$ h.c. is

$G_2 (N_2, D_2, \lambda_2)$

$G_1 \otimes G_2 (N_1, N_2, D_1, D_2, \max\{\lambda_1, \lambda_2\})$ h.c.

$\Rightarrow \lambda_1 \leq \lambda_2$ $V_1 \sim V_{N_1}$ G_1 h.c. is

הוכחה $q \mid \dots$ F למעשה

$$|V| = q^2 \quad G = (V, E)$$

$$(a, b) \in L_{c,d} \Leftrightarrow ((a, b), (c, d)) \in E$$

$$L_{c,d}(x) = cx - d \quad \text{מכאן}$$

$$L_{c,d} = \{ (x, L_{c,d}(x)) \mid x \in F_q \}$$

$\therefore \text{הוכחה} - q$ הוכחה לפי G הוכחה

$$((a, b), (c, d)) \in E$$

$$(a, b) \in L_{c,d} \Leftrightarrow$$

$$b = L_{c,d}(a) \Leftrightarrow$$

$$b = ac - d \Leftrightarrow$$

$$ac = b + d \Leftrightarrow$$

$$(c, d) \in L_{a,b} \quad \text{מכאן}$$

$$d = ac - b \quad \text{אם } d \in F, (a, b) \in F, \text{ אז}$$

$$\therefore \text{הוכחה} - q \mid \dots \quad ((a, b), (c, d)) \in E \quad \text{לפי}$$

$$! \quad \overline{\chi}(G) \quad \text{לפי}$$

$$\bar{\lambda}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{q}}$$

20/06

$$h^2 \quad \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \quad \text{r.b., } \mathbb{G}^2 \quad \text{r.r.} \quad (3-0)$$

$$[(a,b), (c,d)] = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{F}^2} M[(a,b), (\alpha, \beta)] \cdot M[(\alpha, \beta), (c,d)]$$

$$= \frac{1}{q^2} \left| \left\{ (\alpha, \beta) \mid \begin{array}{l} (\alpha, \beta) \in \mathcal{L}_{a,b} \\ (\alpha, \beta) \in \mathcal{L}_{c,d} \end{array} \right\} \right| = \frac{1}{q^2} |\mathcal{L}_{a,b} \cap \mathcal{L}_{c,d}|$$

$$\frac{q}{q^2}$$

$$1-U$$

$$, \quad a = \frac{c}{b}, \quad b = d \quad \text{r.l.c.} \quad \text{r.r.}$$

$$, \quad cx-d = y = ax-b \quad \Leftrightarrow \quad b=d$$

$$0 \quad b \neq d, \quad \frac{a=c}{a \neq c} \quad \text{r.l.c.}$$

$$cx-d = y = ax-b$$

$$(c-a)x = d-b$$

$$x = \frac{d-b}{c-a}$$

$$\frac{1}{q^2}$$

$$a \neq c \quad \text{r.l.c.}$$

$$\frac{1}{q^2} \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{qI} & J & \\ J & \boxed{qI} & J \\ \hline & & \boxed{qI} \end{array} \right]$$

$$\text{r.r.}$$

$$= \frac{1}{q^2} \left[q I_q \otimes I_q + (J_q - I_q) \otimes J_q \right]$$

? $\delta(0) \rightarrow \infty$

Per $\delta(0) \rightarrow \infty$ J_q, J_q Δ

$\delta(0) \rightarrow \infty$ $v_2, \dots, v_q, v_1 = 1$

	$v_1, \dots, v_q$
I	1 1 1 1
J	q 0 0 0
$\delta - I$	q-1 -1 -1

	$v_1 \otimes v_1, v_2 \otimes v_1, \dots, v_q \otimes v_1, v_1 \otimes v_2, \dots, v_1 \otimes v_q$
$q(I \otimes I)$	q q q q
$(J-I) \otimes J$	$q(q-1)$ -q -q 0 0 0
M^2	$\frac{q^2}{q^2} = 1$ 0 0 $\frac{1}{q}$
mult	1 $q-1$ q^2-q

$$\bar{\lambda}(M^2) = \frac{1}{q}$$

$$\boxed{\bar{\lambda}(M) = \frac{1}{\sqrt{q}}}$$

$$(q^2, q, \frac{1}{\sqrt{q}})$$

1010 G

דף 7

נתון $(N_0, D_0, \lambda_0 < 1)$ קבועים

– יחסים מסוימים λ ו- D מתקיימים

– יחסים מסוימים N ו- D מתקיימים $\otimes$

המקרה של N ו- D מתקיים

צדדים של N ו- D מתקיים, ו- λ ו- D מתקיים (המשפט)
 הקובץ λ ו- D

λ	צדדים	מספר קובץ	מספר
$\downarrow \lambda^2$	$\uparrow D^2$	$=$	A^2
$= \lambda$	$\uparrow D^2$	$\uparrow N^2$	$A \otimes A$
$u =$	$\downarrow$	$u =$	מספר

המקרה של N ו- D מתקיים

$(\otimes, \lambda, D)$

הקבועים (λ, D) מתקיים

המקרה של N ו- D מתקיים, ו- λ ו- D מתקיים

הכנסת הקוסם

השערה 1: אם G הוא גרף עם n קודקודים ו- m קשתות

$$D = [n], \quad V = \mathbb{Z}_2^n$$

האם קיימת פונקציה $f: V \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ (הקוסם) כזו ש-

היא מציבה את כל הקודקודים של G על קווי הישר $\mathbb{Z}_2^n$.

כלומר, קיימת פונקציה $f: V \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ כזו ש-

היא מציבה את כל הקודקודים של G על קווי הישר $\mathbb{Z}_2^n$.

אם G הוא גרף עם n קודקודים ו- m קשתות

Replacement product

$$G' = \{ (v, i) \mid v \in V, 1 \leq i \leq D \}$$

אם G הוא גרף עם n קודקודים ו- m קשתות $\Leftrightarrow ((v, i), (w, j)) \in E'$

האם קיימת פונקציה $f: V \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ כזו ש-

labeled graph

3.3.3

labeled (v, i) for $v \in V$ and $i \in D$

$v \in V, i \in D \Rightarrow (v, i) \in V \times D$ $e \in E \Rightarrow e = (v, i) \rightarrow (w, j)$ $e \in E \Rightarrow e = (v, i) \rightarrow (w, j)$

$w = v[i]$ $i \in D$

for $G = (V, E)$

for D

Rotation map

$\text{Rot}: V \times D \rightarrow V \times D$

$\forall (v, i)$

$\text{Rot}(\text{Rot}(v, i)) = (v, i)$

b/c

$\text{Rot}(v, i) = (w, j)$

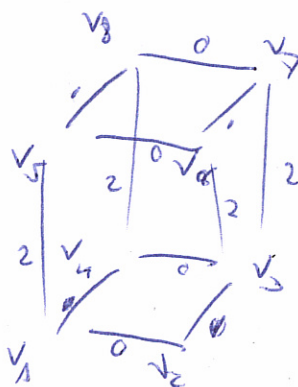
then

$\text{Rot}(w, j) = (v, i)$

by

$e \in E$ for $v \in V$ and $i \in D$ $e \in E$ for $v \in V$ and $i \in D$

$e \in E$ for $v \in V$ and $i \in D$ $e \in E$ for $v \in V$ and $i \in D$



3.3.3

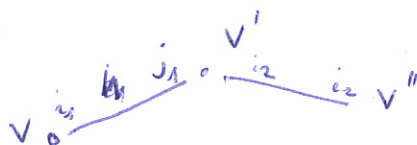
$\text{Rot}(v_2, 2) = (v_6, 2)$

$$\begin{array}{ccc} \text{Rot}_{\mathfrak{g}_1} & \text{to} & \text{Rot}_{\mathfrak{g}_2} \\ \text{to} & \text{to} & \text{to} \end{array}$$

$$\text{Rot}_{\mathfrak{g}_2} (v, (i_1, i_2)) = (v'', (j_2, j_1))$$

$$\text{Rot}_{\mathfrak{g}_1} (v, i_1) = (v', j_1)$$

$$\text{Rot}_{\mathfrak{g}_2} (v', i_2) = (v'', j_2)$$



$$\begin{array}{ccc} \text{Rot}_{\mathfrak{g}_1} & \text{to} & \text{Rot}_{\mathfrak{g}_2} \\ \text{to} & \text{to} & \text{to} \end{array}$$

$$\text{Rot}_{\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2} (v_1 \oplus v_2, (i_1, i_2)) = ((v'_1 \oplus v'_2), (j_1, j_2))$$

$$\text{Rot}_{\mathfrak{g}_1} (v_1, i_1) = (v'_1, j_1)$$

$$\text{Rot}_{\mathfrak{g}_2} (v_2, i_2) = (v'_2, j_2)$$

$$G = [q^2, q, \frac{1}{\sqrt{q}}]$$

we F_q dipn to the field

$$((a,b), (c,d)) \in E \Leftrightarrow (a,b) \in l_{c,d}$$

$$\text{Rot}_G \left((a,b), \underset{\uparrow}{t} \right) = \begin{cases} ((\frac{t}{a}, t-b), t) & a \neq 0, t \neq 0 \\ ((t, -b), a) & t=0 \text{ or } a=0 \end{cases}$$

we want to show that

$$(\frac{t}{a}, t-b) \in l_{a,b}$$

$$, (a,b), (\frac{t}{a}, t-b) \in E \quad a \neq 0, t \neq 0$$

$$\checkmark \quad \frac{t}{a} \cdot a - b = t - b$$

$$\checkmark \quad \underset{0}{a} t - b = b \quad (t, -b) \in l_{a,b}$$

$$((a,b), (t, -b)) \in E$$

$a=0$ h/c
 $t \neq 0$ h/c

• $a \neq 0$, (a,b) dipn ? we want to show that

$$\frac{t}{a} \neq 0, \text{ dipn } q^{-1}, \text{ h/c } (\frac{t}{a}, t-b) \text{ dipn } \text{ h/c } t \neq 0, \text{ h/c}$$

$$\text{h/c } t \neq 0, \text{ h/c } q \text{ dipn } \text{ h/c } (0, b) \text{ dipn } t=0$$

$$(a,b), a=0 \text{ h/c}$$

$$t \in F_q \text{ h/c } (t, -b) \text{ dipn}$$

$$\underset{\frac{t}{a} \neq 0}{a \neq 0, t \neq 0} \quad \text{Rot} \left((\frac{t}{a}, t-b), t \right) = (\frac{t}{t/a}, t - (t-b), t) = ((a,b), t) \quad ? \text{ Rotation h/c } \Rightarrow$$

$$a=0 \quad \text{Rot} \left((t, -b), a \right) = ((a,b), t)$$

✓ (12)

$$\sigma = [q^2, q, \frac{1}{\sqrt{q}}]$$

$$\sigma \otimes \sigma = [q^4, q^2, \frac{1}{\sqrt{q}}]$$

$$\text{next } (\sigma \otimes \sigma) \otimes \sigma \quad \rho^1$$

$$\text{the } \sigma \text{ is } [q^6, q^2, ?] \quad \text{10101}$$

$$\text{next } ((\sigma \otimes \sigma) \otimes \sigma) \otimes \sigma \quad + 8$$

$$\text{the } \sigma \text{ is } [q^8, q^2, ?]$$

Replacement product $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$G_1 = (V_1, D_1, \lambda_1)$$

$$H \oplus_{\mathbb{R}} \left(\begin{matrix} V_2 = [D_2] \\ H_2 \end{matrix}, D_2, \lambda_2 \right)$$

$$V_1 \otimes V_2 \quad A \quad D_1 \otimes D_2 \quad G_1 \otimes_{\mathbb{R}} H$$

$$D_2 + 1 \quad \approx 3n$$

$$\text{Rot}_{G_1 \otimes_{\mathbb{R}} H} \left((v, h), i \right) = \begin{cases} ((v', h'), 0) & i=0 \\ ((v, h'), i') & i \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Rot}_G(v, h) = (v', h')$$

$$\text{Rot}_H(h, i) = (h', i')$$

$$? \quad \bar{\lambda}(G \otimes H) \quad \mathbb{R}^n$$

