

ניסוח 3.7 מילר - תורת האינפורמציה

נתון $G = (V, E)$

$$|V| = 2^m$$

V הוא קבוצת האינפורמציה M

נתון D - קבוצת האינפורמציה G - קבוצת האינפורמציה D - קבוצת האינפורמציה

$v \in V$

נתון $G_T \in [D]$

$$v_0 = v, v_1, \dots, v_T$$

האינפורמציה $v_0, v_1, \dots, v_T$

נתון $M(x, v_i)$ $i = 0, \dots, T$ $\Rightarrow$ האינפורמציה v_i

ניסוח 3.8 (מילר) האינפורמציה v_i היא האינפורמציה v_i $i = 0, \dots, T$

האינפורמציה v_i היא האינפורמציה v_i $i = 0, \dots, T$

האינפורמציה v_i היא האינפורמציה v_i $i = 0, \dots, T$

האינפורמציה v_i היא האינפורמציה v_i $i = 0, \dots, T$

האינפורמציה v_i היא האינפורמציה v_i $i = 0, \dots, T$

האינפורמציה v_i היא האינפורמציה v_i $i = 0, \dots, T$

האינפורמציה v_i היא האינפורמציה v_i $i = 0, \dots, T$

האינפורמציה v_i היא האינפורמציה v_i $i = 0, \dots, T$

האינפורמציה v_i היא האינפורמציה v_i $i = 0, \dots, T$

$$Y = \{y \in \{0,1\}^m \mid M(y) = 1\} \quad /no$$

$$X \in L \quad +/c, \quad Y = \emptyset$$

$$|Y| \geq \alpha \cdot 2^m \quad : X \in L \quad +/c$$

$$pr(\neg \phi) \leq pr(\forall_{a \leq i \leq T} v_i \notin Y)$$

על

$$\bar{\lambda}(\phi) \leq \bar{\lambda} < \lambda_1 = 1, \quad \neg \lambda_1 \in \mathcal{D} \quad \text{הם } G = (V, E) \quad \text{על } G$$

$$|B| \leq \beta |V|, \quad B \subseteq V \quad \text{על}$$

$$v_1, \dots, v_T \quad \tau \quad \text{על } \tau \quad \text{על } \tau \quad \text{על } \tau$$

$$(v_i \in V = \tau) \quad \text{על } \tau \quad \text{על } \tau \quad \text{על } \tau$$

$$\chi(B) = \mu(B) \quad \text{על } B$$

$$pr \left[\bar{\lambda} (v_i \in B) \right] \leq \left[\beta + \lambda(1-\beta) \right]^T$$

$$B \subseteq \bar{V}, \quad |B| \leq (1-\alpha) 2^m, \quad 1-\alpha = \beta \leq \frac{1}{2} \quad \text{על } B$$

$$(\bar{\lambda} \leq \frac{1}{2}) \quad \beta + \lambda(1-\beta) < \frac{3}{4} \quad \text{על } \tau \quad \text{על } \tau \quad \text{על } \tau$$

$$(\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2^h}) \quad \text{על } \tau \quad \text{על } \tau \quad \text{על } \tau, \quad pr \left[\bar{\lambda} (v_i \in B) \right] \leq 2^{-2^h} \quad \text{על } \tau$$

$$! \quad \text{על } \tau \quad \text{על } \tau \quad \text{על } \tau, \quad \text{על } \tau \quad \text{על } \tau \quad \text{על } \tau$$

תוכנית קוונטית

$$N = M = 2^m$$

$$V = \mathbb{R}^{2^m}$$

$$V = \mathbb{R}^{2^m}$$

הפרק

$$A_{2^m \times 2^m}$$

G

ת

e

A

הפרק / הפרק / הפרק

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} & (i,j) \in E \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

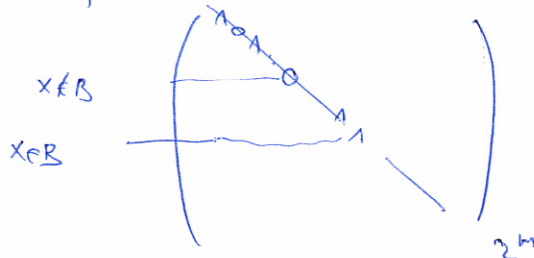
$$B \in \mathbb{R}^{2^m \times 2^m}$$

הפרק

B

הפרק

הפרק



$$P \left[\bigcap_{i=1}^T (v_i \in B) \right] = \frac{1}{2^m} \left| (B^T M)^T B \cdot u \right|_1$$

הפרק

$$\pi_0 = \frac{1}{2^m} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right| = u$$

הפרק

הפרק

$$B u = \frac{1}{2^m} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in B$$

הפרק

$$A B u$$

הפרק

הפרק

$$B \rightarrow \text{הפרק} \quad \left(\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} \right)$$

הפרק

$$\left| (B A)^T B u \right|_1 = \sum p_i$$

הפרק

הפרק

$$\|(BA)^{T-1} B u\|_1 \leq \sqrt{\beta M} \|(BA)^{T-1} B u\|_2 \leq \sqrt{\beta M} \cdot \|B u\| \cdot \|B A B\|$$

$\downarrow$
 $\|XY\| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$
 $B^2 = B, \text{ rank } B$

$$\leq \sqrt{\beta M} \cdot \sqrt{\frac{\beta M}{M}} \cdot \|B A B\|^{T-1} = \beta \cdot \|B A B\|^{T-1}$$

ד. גורם - גורם - גורם - גורם

$$\|B A B\| \leq \beta + (1-\beta) \bar{\lambda} \quad \text{דפ"ק} \quad \text{דפ"ק}$$

דפ"ק דפ"ק

$$J = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \underbrace{(1-\bar{\lambda})}_{\text{rank } 1} J + \bar{\lambda} E$$

$\|E\| \leq 1$

דפ"ק

[J (גורם דפ"ק)]
 (גורם דפ"ק) $\geq$ גורם דפ"ק

$$E = \frac{A - (1-\bar{\lambda})J}{\bar{\lambda}}$$

דפ"ק דפ"ק

$$E u = \frac{A u - (1-\bar{\lambda})J u}{\bar{\lambda}} = \frac{u - (1-\bar{\lambda})u}{\bar{\lambda}} = \frac{\bar{\lambda}u}{\bar{\lambda}} = u$$

דפ"ק

דפ"ק דפ"ק דפ"ק

$$E x = \frac{A x - (1-\bar{\lambda})J x}{\bar{\lambda}} \stackrel{Jx=0}{=} \frac{A x - 0}{\bar{\lambda}} = \frac{A x}{\bar{\lambda}}, \quad x \perp u \quad \text{דפ"ק}$$

$$\langle u, E x \rangle = u^T E x = \frac{1}{\bar{\lambda}} u^T A x = \frac{u^T x}{\bar{\lambda}} = 0$$

$\downarrow$
 $u^T A = u$
 $\downarrow$
 $E \text{ rank } 1$
 $1 \rightarrow \text{rank } 1$

דפ"ק דפ"ק דפ"ק

$$E x \perp u \quad \text{דפ"ק}$$

דפ"ק

$$\|E_x\| = \frac{\|Ax\|}{x} \leq \frac{\lambda}{x} > 1$$

$$\|x\|=1, x \in \mathbb{R}^n$$

$$E_{\mathbb{R}^n} = I$$

$$\boxed{\|E\| \leq 1}$$

$$I = I$$

$$\|E\| \leq 1, A = (1-\lambda)J + \lambda E$$

$$J = \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^T$$

$$\|BAB\| = \|B((1-\lambda)J + \lambda E)B\|$$

$$= \|(1-\lambda)BJB + \lambda BEB\|$$

$$\leq (1-\lambda) \|BJB\| + \lambda \|BEB\|$$

↓
norm 1.1

$$(BJB) \sim$$

$$B \text{ / } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n - BJB$$

$$(J) \text{ : } \text{map } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$B \text{ / } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\|BJB\| \leq \|BJ\| \|B\| = \max_{\|x\|=1} \|BJx\| = \|BJ\| = \sqrt{\frac{BM}{M}} = \sqrt{\frac{B}{M}}$$

$$\|BJB\| = \max_{x: \|x\|=1} \|BJBx\|$$

$$y = (y_1, \dots, y_M) = Bx$$

$$y = (y_1, \dots, y_M) = Bx$$

$$y = (y_1, \dots, y_M) = Bx$$

$$JBx = Jy = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix}$$

$$s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M y_i$$

$$s$$

$$\|BJBx\| = \sqrt{BM \cdot \left(\frac{s}{M}\right)^2} = \sqrt{\frac{B}{M}} \cdot s \leq \sqrt{\frac{B}{M}} \sqrt{BM \sum y_i^2} \leq \sqrt{B} \sqrt{\sum x_i^2} = B$$

$$p = B$$

$$\boxed{\|BJB\| \leq p}$$

$$p = B$$

$$\|B \in B\| \leq \|B^2\| \quad \|e\| = 1$$

$$\|BAB\| \leq (1-\bar{\lambda})\beta + \bar{\lambda} = \boxed{\beta + \bar{\lambda}(1-\beta)}$$

done!

□

הזכרנו קודם לכן ש- $\lambda < 1$ זה נובע מכך ש- $\lambda < 1$ Sampling

$\lambda = \lambda < 1 = \lambda$, זה נובע מכך ש- $\lambda < 1$ Goal

$f_i: V \rightarrow [0, 1]$ הזכרנו

$v_1, \dots, v_T$ הזכרנו

$v \in V$ הזכרנו

$(i=1, \dots, T)$ הזכרנו

$\mu_i = E(X_i)$ הזכרנו

$\mu = \sum_{i=1}^T \mu_i$ הזכרנו

$P \left[\left| \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T X_i - \mu \right| \geq \epsilon \right] \leq 2e^{-\frac{(1-\lambda)\epsilon^2}{4} T}$ הזכרנו

T הזכרנו

$\lambda < 1$ הזכרנו

$O(n)$ הזכרנו

$\mu_i = E(X_i) = \sum_{v \in V} f_i(v)$ הזכרנו

$$Pr[X \geq \mu + \epsilon T] \leq 2^{-\frac{(1-\lambda)\epsilon^2}{4} T}$$

for $\lambda < 1$

$$Pr[X \leq \mu - \epsilon T] \leq \frac{1}{2}$$

for $\lambda < 1$

$$f'_i = 1 - f_i$$

$$f'_1, \dots, f'_n$$

prob. cons. - 2.1)

$$X \geq \mu - \epsilon T = Pr[e^{rX} \geq e^{r(\mu - \epsilon T)}] \leq \frac{E[e^{rX}]}{e^{r(\mu - \epsilon T)}}$$

$$\frac{\log(\frac{1}{\delta})}{2r}$$

prob. cons. - 2.1)

$$r = (1-\lambda) \frac{\epsilon}{2}$$

$$(1-\lambda) \leq \log(1-\lambda) \quad \text{prob. cons. - 2.1)}$$

$$r \leq \frac{\log(1-\lambda)}{2} \leq \frac{\log(1-\lambda)}{2} \quad \text{prob. cons. - 2.1)}$$

$$X \leq e^{r\mu + \frac{r^2 T}{(1-\lambda)}}$$

$$E[e^{rX}]$$

for $\lambda < 1$

$$X \geq \mu - \epsilon T \leq e^{\frac{r^2 T}{1-\lambda} - r\epsilon T} = e^{(\frac{r^2}{1-\lambda} - r\epsilon) T} = e^{-\frac{\epsilon}{2} r T}$$

for $\lambda < 1$

$$? E(e^{rx})$$

$$1.0.2) \quad ?$$

$$E[e^{rx}] = 1^T E_1 A E_{T-1} A \dots E_1 A u$$

1.0.3C

$$u = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.0.4

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{M} & (i,j) \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{for } (i \rightarrow j) \text{ or } (j \rightarrow i) \quad \rightarrow A_{M \times M}$$

$$E_k = \text{Diag}(e^{rf_k(0,0)}, \dots, e^{rf_k(1,1)})$$

$$E_k = \begin{pmatrix} x & & \\ & \text{circle} & \\ & & e^{rf_k(x)} \\ & & & \text{circle} \end{pmatrix}$$

↓

$$Z_k = E_k A E_{k-1} A \dots E_1 A u$$

1.0.5) 1.0.6) 1.0.7)

$$Z_{k,i} = \sum_{\substack{v_0, \dots, v_k \\ v_0, \dots, v_k = i}} p^r[v_0, \dots, v_k] \cdot e^{r \cdot (f_1(v_1) + \dots + f_k(v_k))} = (Z_k, i) \quad \text{1.0.8)$$

$$v_0, \dots, v_k = i$$

1.0.9

$$\langle \vec{1}, Z_T \rangle = \sum_i \vec{1}_i = E \sum_{v_1, \dots, v_T} e^{r(f_1(v_1) + \dots + f_T(v_T))} = E[e^{rx}]$$

1.0.10

$$Z_1 = E_1 A U = E_1 U = 1 \begin{pmatrix} e^{r f_1(v_1)} \\ e \\ \vdots \\ e^{r f_M(v_M)} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{row } k \\ \text{col } k \end{matrix} \quad k=1$$

$$k+1 \quad r \quad n+1 \quad , k \quad r \quad n+1$$

$$Z_{k+1} = E_{k+1} A Z_k$$

$$Z_{k+1,i} = \sum_j e^{r f_{k+1}(j)} (A Z_k)_j$$

$$= \sum_j e^{r f_{k+1}(j)} \sum_l A_{jl} Z_k(l)$$

$$= \sum_j e^{r f_{k+1}(j)} \sum_l p^r[l \rightarrow j] \sum_{v_0, \dots, v_k=l} p^r(v_0, v_k) e^{r(f_1(v_1) + \dots + f_k(v_k))}$$

$$= \sum_{v_0, \dots, v_{k+1}} p^r(v_0, \dots, v_{k+1}) \cdot e^{r(f_1(v_1) + \dots + f_{k+1}(v_{k+1}))}$$

$$\langle \vec{r}, Z_T \rangle = E(e^{rX}) \leq e^{r\mu + \frac{r^2 T}{1-\lambda}}$$

1-loop work

$\frac{521}{1, k \text{ is } (1, 2) \text{ is } 200}$

בא, 27, נבחרה מילאנה בקולות
1: קלאדיה, מילאנה בדרגות

670251

$$0 \leq x < 1 \quad e^x - 1 \leq x + \frac{2x^2}{3} \leq \frac{4x}{3}$$

$$\downarrow n \leq T$$

$$\leq e^{r\mu + r^2 T \left[1 + \frac{\lambda}{1-\lambda}\right]} = e^{r\mu + r^2 T \left[\frac{1}{1-\lambda}\right]}$$

