## Replacement product ר מכפלת

$G_1 = (V_1, D_1, \lambda_1)$

$H_2 = (V_2 = [D_1], D_2, \lambda_2)$

$V_1 \otimes V_2$ א על $G_1 Ⓡ H$

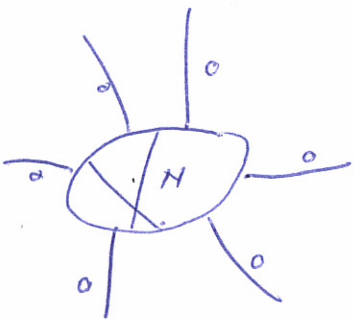
מדרגה $D_2 + 1$

$$\text{Rot}_{G_1 Ⓡ H}((v,h), i) = \begin{cases} ((v',h'), 0) & i = 0 \\ ((v,h'), i') & i \geq 1 \end{cases}$$

$\text{Rot}_G(v,h) = (v', h')$

$\text{Rot}_H(h,i) = (h', i')$

מהו $\bar{\lambda}(G Ⓡ H)$ ?



## הגדרה ג  replacement product
zig zag

יהיו $G = (V_1, D_1, \lambda_1)$

$H = (V_2 = [D_1], D_2, \lambda_2)$

נגדיר $G ⓩ H = (V, E)$     הדרגה $D_2^2$

כאשר $V = V_1 \otimes V_2$

$$\mathrm{Rot}_{G ⓩ H}\left((v_1, v_2), (i_1, i_2)\right) = \left((v_1', v_2'''), (i_2', i_1')\right)$$

$$\mathrm{Rot}_H(v_2, i_1) = (v_2', i_1')$$

$$\mathrm{Rot}_G(v_1, v_2') = (v_1', v_2'')$$

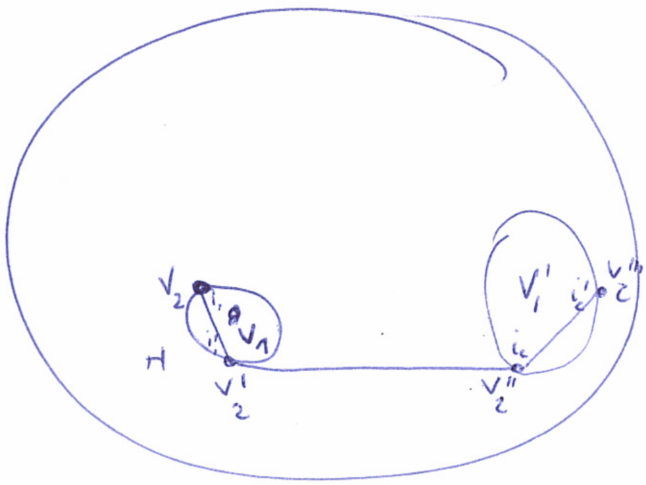
$$\mathrm{Rot}_H(v_2'', i_2) = (v_2''', i_2')$$

צעד ב $H$

צעד ב $G$ – בין עננים (עננים)

צעד ב $H$

<u>zig-zag</u>



למה

$G_1 \quad (N_1, D_1, \lambda_1)$ אם

$G_2 \quad (N_2 = D_1, D_2, \lambda_2)$

$G_1 \circledz G_2 \quad (N, D_1, D_2^2, f(\lambda_1, \lambda_2))$ אז

$\gamma \geq \gamma_1 \gamma_2^2$ γ כזה

כש

הפער החדש לפחות

| |
|---|
| הפער של הפעם הקודמת. |
| ״ ״ ״ הבא f תרגיל |

הפערים.
$$\begin{cases} \gamma = 1 - f(\lambda_1, \lambda_2) \\ \gamma_1 = 1 - \lambda_1 \\ \gamma_2 = 1 - \lambda_2 \end{cases}$$

מסכל:

$$\begin{aligned} f(\lambda_1, \lambda_2) &\leq 1 - (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)^2 \\ &= 1 - (1-\lambda_1)(1 - 2\lambda_2 + \lambda_2^2) \\ &\leq 1 - (1-\lambda_1)(1-2\lambda_2) \\ &= \lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_2 \\ &\leq \boxed{\lambda_1 + 2\lambda_2} \end{aligned}$$

דוגמה: נסמן $A$ מטריצת שכנות מנורמלת של $G_1$

$B$ " " " $G_2$

$M$ " " " $G_1 Ⓩ G_2$

$\hat{A}$ - המטריצה המתאימה ל-Rotation map

$\hat{B} = I \otimes B$ (זה לא בדיוק הדבר)

אז

$$M = (I \otimes B)\,\hat{A}\,(I \otimes B)$$

כיוון ש $G_2$ $[N_2, D_2, \lambda_2]$

ניתן לכתוב

$$B = (1-\lambda_2) J + \lambda_2 E$$

כאשר $E$ , $J = \frac{1}{N_2}|\vec{1}\rangle\langle\vec{1}|$

לכן

$$M = \left((1-\lambda_2)\, I \otimes J + \lambda_2 (I \otimes E)\right) \hat{A} \left((1-\lambda_2)\, I \otimes J + \lambda_2\, I \otimes E\right)$$

$$= (1-\lambda_2)^2 (I \otimes J)\,\hat{A}\,(I \otimes J) + F$$

$$\|F\| \le \lambda_2(1-\lambda_2) + \lambda_2^2 + \lambda_2(1-\lambda_2)$$

כי $\|\hat{A}\| = 1$, $\|E\| \le 1$, $\|A \otimes B\| = \|A\| \cdot \|B\|$

$$= \lambda_2^2 + 2\lambda_2(1-\lambda_2)$$

להבין המשפט למה לא פועל

$$(I\otimes J)\,\hat{A}\,(I\otimes J)=A\otimes J$$

כי לכל $v\otimes w$

$$\underbrace{(I\otimes J)\,\hat{A}\,\underbrace{(I\otimes J)\,\underbrace{(v\otimes w)}_{(v\otimes u)}}_{(A_v,\,*)}}_{(A_v,\,u)}$$

$u=\frac{1}{D_1}\vec{1}$

---

אינ׳ - צעד ראשון - גורם לשכן יופי אקראי.

Rot - מעבר בין העננים. אם בענן הה-גרף קטן שכן ב $G_1$

- צעד שני - גורם להיות שוב אחיד ב העננים.

---

הוכחה:

$\|K\|\le 1$

$$\boxed{M=\gamma_2^2(A\otimes J)+(1-\gamma_2^2)K}$$

וכן לפי (הוכחנו!)

$$\bar{\lambda}(M)\le\gamma_2^2\,\bar{\lambda}(A\otimes J)+(1-\gamma_2^2)$$

$$\le\gamma_2^2\lambda_1+1-\gamma_2^2=1-\gamma_2^2(1-\lambda_1)=\boxed{1-\gamma_2^2\gamma_1}$$

<u>בחזקה רביעית:</u>

$G \quad \left(q^2, q, \frac{1}{\sqrt{q}}\right)$

$G \textcircled{+} G \quad \left(q^4, q^2, \frac{1}{\sqrt{q}}\right)$

$(G \textcircled{+} G) \textcircled{z} G \quad \left(q^6, q^2, \lambda_1 + 2\lambda_2 = \frac{3}{\sqrt{q}}\right)$

$((G \textcircled{+} G) \textcircled{z} G) \textcircled{z} G \quad \left(q^8, q^2, \frac{3}{\sqrt{q}} + \frac{2}{\sqrt{q}} = \frac{5}{\sqrt{q}}\right)$

---

<u>מסקנה:</u> יש גרף מעלה קבוע [illegible]

$\left(D^4, D, \frac{1}{8}\right)$

$\left(D^8, D^2, \frac{1}{8}\right)$

---

$H = (D^4, D, \frac{1}{8})$ דוגמה ראשונה

$G_1 = H^2$

$G_{t+1} = G_t^2 ⓩ H$

טענה: $G_t$ הוא $\left(D^{4t}, D^2, \frac{1}{2}\right)$

מס' קודקודים    דרגה

הוכחה באינדוקציה על $t$.

$t=1$    $G_1 \quad \left(D^4, D^2, \left(\frac{1}{8}\right)^2\right)$

נניח ל $t$, נוכיח ל $t+1$.

$G_t^2 = \left(D^{4t}, D^4, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$

ה zigzag מוגדר. $N_2 = D$.

$$G_t^2 ⓩ H = \left(D^{4t} \cdot D^4,\ D^2,\ \begin{matrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \frac{1}{4} + 2\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \end{matrix}\right)$$

האם הבניה מפורשת?

" ניתן לחשב שכניו בקלות

" " Rot map " ?

$$Rot_{G_{t+1}}\big((\underset{\in [D^{4k}]}{v}, \underset{\in [D^4]}{a}), (\underset{\in [D]}{i_1}, \underset{\in [D]}{i_2})\big) = \big((v', a'''), (i_2', i_1')\big)$$

$$Rot_H(a, i_1) = (\underset{\in [D^4]}{a'}, i_1')$$

$$Rot_{G_t^2}(v, a') = (v', a'')$$

$$Rot_H(a', i_2) = (a''', i_2')$$

---

כלומר:

$$Rot_{G_t^2}(\underset{\in [D^{4k}]}{v}, \underbrace{\underset{\in [D^2]}{a_1'}, \underset{\in [D^2]}{a_2'}}_{\in [D^4]}) = (w_2, (b_2, b_1))$$

$$Rot_{G_t}(v, a_1') = (w_1, b_1)$$

$$Rot_{G_t}(w_1, a_2') = (w_2, b_2)$$

רק אז $Time(t)$ - הזמן הנדרש לחשב $\varphi_t$

אז $Time(t) = 2\,Time(t-1) + O(1)$

$\downarrow$

H מגודל קבוע

ולכן $Time(t) = O(2^t)$

$= poly(N_t)$ $\quad N_t = 4^t$

הגדרנו את $G=(V,E)$ הוא מפורש, אם

ניתן לחשב $Rot(v,i)$ בזמן $poly(|G|)$

הגדרנו את $G=(V,E)$ הוא מפורש לגמרי explicit

אם ניתן לחשב $Rot(v,i)$ בזמן $poly$.

(בק ר Rot, בזמן $= poly(\log|V|, \log D)$

מאפשר לעבור גם את …

## האם ניתן לבנות גרף מפורש לגמרי?

$$H = (D^8, D, \tfrac{1}{8})$$

$$G_1 = H^2$$

$$G_{t+1} = (G_t \otimes G_t)^2 ⓩ H$$

טענה: $G_t$ הוא $(N_t, D^2, \lambda_t)$

כך ש- $N_t \geq D^{(2^t)}$

ו- $\lambda_t \leq \frac{1}{2}$

הוכחה: באינדוקציה.

עבור $t=1$: $G_1$ הוא $(D^8, D^2, (\frac{1}{8})^2)$.

---

נניח ל- $t$, ונוכיח ל- $t+1$

$G_t$ מדרגה $D^2$

$G_t \otimes G_t$ " $D^4$

$(G_t \otimes G_t)^2$ " $D^8$

וה zig-zag מוריד. $G_{t+1}$ מדרגה $D^2$.

---

$$N_{t+1} = (N_t)^2 \cdot D^8 \geq N_t^2 \underset{\text{הנחה}}{\geq} (D^{(2^t)})^2 = D^{(2^{t+1})}$$

$$\lambda_{t+1} \le \left(\lambda(G_t \otimes G_t)\right)^2 + 2\lambda(H)$$

$$\le \lambda_t^2 + 2\cdot\frac{1}{8} \le \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

---

נסמן $Time(t)$ כזמן ריצה.

אז $G_{t+1} = (G_t \otimes G_t)^2 \textcircled{z} H$

$H$ צעד

$(G_t \otimes G_t)^2$ צעד

$H$ צעד

---

$(G_t \otimes G_t)^2$ צעד

$G_t \otimes G_t$ צעד 2 [illegible]

$G_t$ צעד 4

$Time(t) = 4\, Time(t-1) + O(1)$

$Time(t) = O(4^t) = \boxed{poly(\lg N_t)}$ $\quad N_t \ge D^{(2^t)}$

$\lg(N_t) \ge 2^t$

כמו שרצינו!