תיקונים והשלמות לשיעור של 24.4.13

① נסמן ב- A את קבוצת המטריצות $X = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ כך שיש אינסוף וקטורים $q\in\mathbb{Z}^m$ עבורם

$$\operatorname{dist}({}^t q X, \mathbb{Z}^n) < \psi(\|q\|) \qquad (*)$$

ונסמן ב- B את קבוצת המטריצות X עבורם יש אינסוף $q\in\mathbb{Z}^m$ פרימיטיביים כך שמתקיים $(*)$.

ברור ש- $B\subset A$. בחלק ההתכנסות של ההוכחה אנו מוכיחים $\lambda(A)=0$, ובחלק השני אנו מוכיחים ש- $\lambda(B^c)=0$. מאחר ש- $B^c\supset A^c$, נובע מכך ש- $\lambda(A^c)=0$.

הערה: בכיתה נתנו נימוק נפנוף מדוע $\lambda(A\Delta B)=0$, בלי הרבה פרטים - אך מהסיבה הנ"ל אין צורך להוכיח $\lambda(A\Delta B)=0$.

② בהוכחת מקרה ההתבדרות של משפט חינצ'ין-גרושב, נזקקנו לטענה הבאה:

אם $r^{m-1}\psi(r)^n\searrow$ וגם $\sum_r r^{m-1}\psi(r)^n=\infty$,

אז גם $\sum_r \#\{q\in\mathbb{Z}^m : \|q\|_\infty = r,\ q \text{ פרימיטיבי}\}\psi(r)^n$ מתבדר.

לא הוכחתי טענה זו, ואף נתתי נימוק היוריסטי מדוע
הצפיפות של הוקטורים הפרימיטיביים היא חיובית,
וטענתי שמהצפיפות החיובית אפשר להסיק את הטענה.
במחשבה שניה המעבר "צפיפות חיובית" ⇐ הטענה
אינו ברור כלל. הנה סקיצה של הוכחה
של הטענה, תוך שימוש בעובדות מפורסמות מתורת המספרים.

נסמן $P_N=\left\{q\in\mathbb{Z}^m : \begin{matrix} q \text{ פרימיטיבי} \\ \|q\|\le N\end{matrix}\right\}$

$$S_k=\left\{q\in\mathbb{Z}^m : \begin{matrix} q \text{ פרימיטיבי} \\ \|q\|=k\end{matrix}\right\}$$

כך ש- $P_N=\bigcup_{k=1}^{N} S_k$,

וכל הוקטורים הפרימיטיביים הם $P_\infty=\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$.

נאמר ששתי פונקציות $f(k),g(k)$ הן אסימפטוטיות,
ונסמן $f\sim g$, אם יש $c_1,c_2>0$ כך שלכל k,

$$c_1\le\frac{f(k)}{g(k)}\le c_2.$$

<u>טענת עזר:</u> אם $m\ge 3$ אז $\#S_k\sim k^{m-1}$
אם $m=2$ אז $\#S_k\sim\phi(k)$ (פונקציית אוילר)

הוכחת טענת העזר:

נזכר שפונקציית מביוס

$$\mu\left(p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k}\right)=\begin{cases}0 & \exists i\ a_i\geq 2\\ (-1)^k & \text{אחרת}\end{cases}$$

(כאשר $a_i \geq 1$ לכל i), מקיימת את הזהות

$$\sum_{d|k}\mu(d)=\begin{cases}1 & k=1\\ 0 & k\geq 2\end{cases}$$ (נוסחת ההיפוך)

לכן:

$$\#S_k=\sum_{\substack{\|q\|=k\\ \gcd(q_i)=1}}1=\sum_{\substack{\|q\|=k\\ \gcd(q_i)=h}}\ \sum_{d|h}\mu(d)$$

$$\underset{r=\frac{1}{h}q}{=}\sum_{d|k}\mu(d)\sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}^m\\ \|r\|=\frac{k}{d}}}1 = c\sum_{d|k}\mu(d)\left(\frac{k}{d}\right)^{m-1}+O\left(k^{m-2}\sum_{d|k}\frac{|\mu(d)|}{d^{m-2}}\right)$$

מספר הנקודות ב-$\mathbb{Z}^m$ עם נורמה t הוא $ct^{m-1}+O(t^{m-2})$

עבור $C>0$

ראינו ש- $\phi(k)=k\sum_{d|k}\frac{\mu(d)}{d}$, ולכן, כאשר $m=2$,

$$\#S_k=c\phi(k)+O\left(\sum_{d|k}|\mu(d)|\right)$$

המשמעות: קיבלנו שמספר הנקודות ב-G_k, שיעור שסדרו [illegible] ל-$\phi(k)$

א/כ $m \geq 3$, ז/כ

$$\frac{6}{\pi^2} = \frac{1}{\zeta(2)} \leq \frac{1}{\zeta(m-1)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{m-1}}\right)^{-1}$$

$$< \prod_{\substack{p|k \\ \text{ראשוני}}} \left(1 - \frac{1}{p^{m-1}}\right) = \sum_{d|k} \frac{\mu(d)}{d^{m-1}} < 1$$

כי
$$\zeta(z) = \prod_{p \text{ ראשוני}} \left(1 - \frac{1}{p^{z-1}}\right)^{-1}$$

לכן $\# S_k \sim k^{m-1}$.

זה מוכיח את טענת העזר.

ברור שעבור $m\geq 3$, הטענה נובעת מהמשפט הנזכר.

עבור $m=2$, הוכחנו קודם שאם נסמן

$\Phi(N)=\sum_{k=1}^{N}\phi(k)$, אז $\sum_{k=1}^{N}\frac{\phi(k)}{k}\geq CN$

ולכן $\Phi(N)\geq C'N^2$.

~~$\Phi(N)=\frac{3}{\pi^2}N^2+O(N\log N)$~~

בעצם $\Phi(N)\sim N^2$. לפי "סכימה לפי חלקים" (נוסחת אבל):

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{\phi(k)}{k}=\frac{\Phi(N)}{N}+\sum_{k=1}^{N-1}\Phi(k)\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]\geq\frac{\Phi(N)}{N}$$

$$\geq C''N$$

נסמן $\xi(k)=k\psi(k)^n$, $\tilde{\Phi}(k)=\sum_{j=1}^{k}\frac{\phi(j)}{j}$

אז לפי הנתון, $\xi(k)\searrow$ ולכן (שוב סכימה לפי חלקים)

$$\sum_{k=1}^{N}\phi(k)\psi(k)^n=\sum_{k=1}^{N}\frac{\phi(k)}{k}\xi(k)=\sum_{k=1}^{N-1}\tilde{\Phi}(k)\big(\xi(k)-\xi(k+1)\big)+\tilde{\Phi}(N)\xi(N)$$

$$\geq C''\sum_{k=2}^{N-1}k\big(\xi(k)-\xi(k+1)\big)+C''N\xi(N)\geq C''\sum_{k=2}^{N}k\,\psi(k)^n$$

זה מוכיח את הטענה.

③ דרך חלופית ופשוטה יותר לחישוב נפח של הטורוס.

לכל מטריצה $A \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ שהיא על (כלומר בעלת דרגה m) מגדירה העתקה $T_A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$

ע"י:

$$T_A(\pi(v)) = \pi(Av)$$

כאשר $v \in \mathbb{R}^n$ (קל לבדוק ש-T_A מוגדרת היטב).

אם $f : X \to Y$ ו-μ מידה סופית על X, אז $f_*\mu(B) = \mu(f^{-1}(B))$ היא מידה על Y (f מדידה ביחס ל-σ-אלגבראות של X, Y בהתאמה).

נסמן ב-λ_m, λ_n את מידות <u>האר</u> של $\mathbb{T}^m, \mathbb{T}^n$ בהתאמה. כלומר המידה המתקבלת מזיהוי $\mathbb{T}^n$ עם הקוביה $[0,1]^n$ וצמצום מידת לבג אליה.

תכונה חשובה של מידת האר היא שהיא (היחידה שהיא מידת הסתברות) אינווריאנטית להזזות, כלומר $\lambda_n(A+x) = \lambda_n(A)$ לכל $A \subset \mathbb{T}^n$ מדידה ולכל $x \in \mathbb{T}^n$. כאן $A+x = \{a+x : a \in A\}$, והחיבור הוא פעולת החיבור של $\mathbb{T}^n$.

<u>הערה:</u> * את מידת האר אפשר להגדיר על כל חבורה טופולוגית קומפקטית מקומית.

* היינו גם עובדה מכך שמידת לבג

היא מידת בורל היחידה על $\mathbb{R}^n$ שאינוו' תחת הזזה
וסופית על קבוצות קומפקטיות (עד כדי כפל בסקלר).

בהסתמך על ~~...~~ תכונות אלה נסיק את הטענה הבאה:

<u>טענה:</u> לכל n, m ולכל A כנ"ל, $T_{A*}\lambda_n = \lambda_m$.

<u>הוכחה:</u> לפי היחידות, די להוכיח שלכל $x \in \mathbb{T}^m$

ולכל $B \subset \mathbb{T}^m$ מדידה, $T_{A*}\lambda_n(B) = T_{A*}\lambda_n(B+x)$

ואכן:

$$T_{A*}\lambda_n(B+x) = \lambda_n\left(T_A^{-1}(B+x)\right)$$

$$= \lambda_n\left(T_A^{-1}(B) + y\right) = \lambda_n\left(T_A^{-1}(B)\right)$$

$$= T_{A*}\lambda_n(B)$$

נבחר $y \in \mathbb{T}^n$ כך ש-

$$T_A(y) = x$$

בהסתמך על טענה זו נוכיח את ~~...~~ שתי הטענות שהוכחנו
בכיתה: (א) $\lambda_{mn}(W_q) = 2^n \psi(\|q\|)^n$

כאשר $W_q = T_q^{-1}\left(\pi\left([-\psi(\|q\|), \psi(\|q\|)]^n\right)\right)$

(ב) $\lambda_{mn}(W_{q_1} \cap W_{q_2}) = \lambda_{mn}(W_{q_1}) \cdot \lambda_{mn}(W_{q_2})$

לכל q_1, q_2 שונים.

הרעיון בכיתה שבעזרתה (A),(B) אפשר לבנות זאת.

עבור (A) נקבל מיידי מהטענה, כי ההעתקה T_q

היא מהצורה T_A:

$$\lambda_1(\Pi([-\psi(\|q\|),\psi(\|q\|)])) = 2\psi(\|q\|)$$

עבור (B) נפעיל שוב את הטענה, הפעם

על ההעתקה $T_{q_1 q_2}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^2$

$$X \longmapsto (T_{q_1}(X), T_{q_2}(X))$$

כי ההעתקה על ידי q_1, q_2 בת"ל

לכן מהטענה:

$$\lambda_m(T_{q_1}^{-1}(B_1) \cap T_{q_2}^{-1}(B_2)) =$$

$$= \lambda_m(T_{q_1 q_2}^{-1}(B_1 \times B_2)) = \lambda_2(B_1 \times B_2)$$

$$= \lambda_1(B_1)\lambda_1(B_2)$$

הערה: ההוכחה הנ"ל הוצגה ע"י קורצ.