קירובים דיופנטיים, דף תרגילים

1. הוכח שלכל $d \geq 1$, מתקיים האנלוג הבא למשפט דיריכלה: קיים Q_0 כך שלכל $Q \in N$, $Q > Q_0$ ולכל $\vec{x} \in R^d$ קיימים $q \in Z$, $\vec{p} \in Z^d$ המקיימים את אי השוויונות $0 < q < Q^d$, $\left\| \vec{x} - \frac{1}{q}\vec{p} \right\|_\infty \leq \frac{1}{qQ}$.

2. הוכח שלכל $x \in R$, ולכל $n_0 \geq 0$ יש $n \in \{n_0, n_0+1, n_0+2\}$ כך שמתקיים $\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_n^2}$. כאן המספרים p_n, q_n הם הקירובים ל-x המתקבלים מאלגוריתם השברים המשולבים.

3. יהי $\sigma \in (0,1)$ ויהי $x \in R$. אומרים ש-x הוא **σ-שפיר למשפט דיריכלה** אם קיים Q_0 כך שלכל $Q > Q_0$ יש שלמים $p, q \in Z$ הפותרים את אי השוויונות $0 < q < \sigma Q$, $\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\sigma}{qQ}$.

   א. הוכח שאם x אירציונלי הוא σ-שפיר למשפט דיריכלה לאיזשהו $\sigma \in (0,1)$, אז x הוא מקורב רע, כלומר יש $c > 0$ כך שלכל $p \in Z, q \in Z_+$ מתקיים $\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^2}$.

   ב. הוכח שאם x הוא σ-שפיר למשפט דיריכלה לכל $\sigma \in (0,1)$ אז x רציונלי.

4. הוכח שהמטריצות $c = -Id$, $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ יוצרות את החבורה $\Gamma = GL_2(Z)$. **רמז**: Γ פועלת על $R \cup \{\infty\}$ בהעתקות מביוס. בהנתן $\gamma \in \Gamma$ בחר $x_0 = 0 \in R$ והראה שיש מילה γ_1 במטריצות a, b כך ש-$\gamma_1 \gamma x_0 = x_0$.

5. הוכח שקבוצת המספרים המקורבים רע (BA) היא קבוצת F_σ מקטגוריה ראשונה (איחוד בן מניה של קבוצות סגורות בעלות פנים ריק).

6. הוכח שהמספר $\sum_{n=1}^{\infty} 7^{-n!}$ הוא טרנסצנדנטי.

7. א. הוכח שקיימת פונקציה אי-שלילית $\psi : N \to R$, עבורה $\sum_{q=1}^{\infty} \psi(q) = \infty$ אבל $\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\phi(q)}{q} \psi(q) < \infty$ (כאשר ϕ היא פונקציית אוילר).

ב. הוכח שקיימת פונקציה אי-שלילית $\varphi:N\to R$ המקיימת $\sum_{q=1}^{\infty} q\varphi(q)=\infty$, עבורה קבוצת המספרים x עבורם יש אינסוף פתרונות ל- $\left|x-\frac{p}{q}\right|<\varphi(q)$, $\gcd(p,q)=1$ היא בעלת מידה אפס.

ג. הוכח שבסעיף ג' אפשר לוותר על התנאי $\gcd(p,q)=1$, כלומר קיימת פונקציה אי-שלילית $\varphi:N\to R$ המקיימת $\sum_{q=1}^{\infty} q\varphi(q)=\infty$, עבורה קבוצת המספרים ה-$\varphi$ מקורבים היא בעלת מידה אפס.

8. הוכח שאם $\varepsilon>0$ אז מידת לבג של הקבוצה $A\subset R$ היא אפס, כאשר A היא קבוצות המספרים $\theta\in R$ כך שקיימים אינסוף טבעיים Q עבורם קיימים טבעיים p_1,p_2,q_1,q_2 המקיימים את אי השוויונות $p_i<2q_i$, $q_2\le q_1\le Q$, $\left|q_2\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\theta-p_2\right|<\frac{1}{Q^{3+\varepsilon}}$.

9. הוכח את הנוסחה $\frac{\phi(q)}{q}=\sum_{1\le d|q}\frac{\mu(d)}{d}$, כאשר ϕ פונקציית אוילר ו-μ פונקציית מביוס.

10. הוכח שאם $\psi:N\to R$ פונקציה מונוטונית חיובית לא עולה המקיימת $\sum_{q=1}^{\infty}\psi(q)=\infty$ אז יש פונקציה מונוטונית לא עולה ψ_0 המקיימת $\sum_{q=1}^{\infty}\psi_0(q)=\infty$, כך שלכל $r\ge1$ מתקיים $\frac{\psi_0(q)}{\psi(rq)}\xrightarrow[q\to\infty]{}0$. הסק שאם θ הוא $\psi_0(q)/q$-מקורב אז לכל t רציונלי, $\theta+t$ הוא $\psi(q)/q$-מקורב.

11. תהי C קבוצת קנטור הסטנדרטית (כל המספרים שבפיתוח שלהם לפי בסיס 3 מופיעות רק הספרות 0,2), ועבור $p\in(0,1)$ נגדיר מידת הסתברות μ_p עם תומך C, בה מגרילים מספר בבסיס 3 כאשר ההסתברות לספרות 0,2 היא $p,1-p$ בהתאמה. נסמן ב-VWA את המספרים הממשיים x עבורם קיים $\varepsilon>0$ כך שיש אינסוף פתרונות p/q לאי השוויון $\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$. הוכח ש-$\mu_p(VWA)=0$.

12. נאמר שמידת בורל μ על הישר הממשי מקיימת <u>תנאי דעיכה חלש עם חזקה α</u> אם קיים קבוע C כך שלכל x ולכל r מתקיים $\mu(B(x,r))\le Cr^{\alpha}$. הוכח שלכל $\alpha<1$ יש מידה μ המקיימת תנאי דעיכה חלש עם חזקה α, כך ש-$\mu(VWA)>0$.

13. יהי (X,d) מרחב מטרי שלם ותהי $S\subset X$ קבוצת מטרה עבור משחק שמידט. נניח שקיימים $\alpha,\varepsilon_0\in(0,1)$ כך שלכל $\beta\in(0,\varepsilon_0)$, הקבוצה S היא (α,β)-מנצחת. הוכח ש-S היא α-מנצחת, כלומר (α,β)-מנצחת לכל $\beta\in(0,1)$.

14. הוכח שלא קיימים $\alpha,\beta\in(0,1/2)$ כך שהקבוצה VWA (ר' שאלה 11) היא (α,β)-מנצחת.

15. יהי $d\geq 2$, ויהי $a_i\in\{0,\dots,d-1\}$, $x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{d^i}$ הפיתוח של x לפי בסיס d. נאמר של-x <u>חסרים בלוקים בבסיס d</u> אם יש N ויש $b_i\in\{0,\dots,d-1\}$, $i=1,\dots,N$ כך שלא קיים n_0 עבורו $a_{n_0+i}=b_i$, $i=1,\dots,N$. הוכח שקבוצת המספרים שחסרים להם בלוקים בבסיס d היא α-מנצחת לכל $\alpha<1/2$. הסק שלכל $c_1,c_2,\dots$ קיימים מספרים x כך שכל אחד מהמספרים $x+c_j$, $j=1,2,\dots$ אינו נורמלי לפי אף בסיס (מספר $x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{d^i}$ הוא **נורמלי לפי בסיס** d אם לכל N ולכל בלוק $b_i\in\{0,\dots,d-1\}$, $i=1,\dots,N$ מתקיים $\frac{1}{d^N}=\lim_{T\to\infty}\frac{\#\{n\in\{1,\dots,T\}:a_{n+1}=b_1,\dots,a_{n+N}=b_N\}}{T}$).

16. תהי C קבוצת קנטור הסטנדרטית (המספרים ב-$[0,1]$ עבורם הספרה 1 לא מופיעה בייצוגם לפי בסיס 3). נחשוב על C כעל מרחב מטרי שלם, עם המטריקה המושרית מהמטריקה האוקלידית על R. הוכח שלכל $\alpha\in(1/3,1/2)$, $BA\cap C$ אינה קבוצה α-מנצחת למשחק שמידט על C.

17. האם קיימת קבוצה $S\subset R$ בעלת מידה מלאה (כלומר $\lambda(S^c)=0$) כך ש-S אינה $1/3$-מנצחת?

18. נאמר שמידת בורל μ על המרחב האוקלידי R^d מקיימת <u>תנאי דעיכה עם חזקה α</u> אם קיים קבוע C כך שלכל $x\in R^d$ ולכל $\varepsilon,r\in(0,1)$ מתקיים $\mu(B(x,\varepsilon r))\leq C\varepsilon^{\alpha}\mu(B(x,r))$. עבור פונקציה $\psi:N\to(0,\infty)$, נאמר ש-$x\in R^d$ הוא $\frac{\psi(q)}{q}$**-מקורב** אם יש אינסוף פתרונות $q\in N, p\in Z^d$ לאי השוויון $\|qx-p\|_{\infty}<\psi(q)$.
הוכח שאם μ מקיימת תנאי דעיכה עם חזקה α ו-$\sum_q\psi(q)^{\alpha}<\infty$ אז כמעט כל $x\in R^d$ (ביחס ל-μ) אינו $\frac{\psi(q)}{q}$-מקורב (שים לב שאין תנאי מונוטוניות על ψ).

19. תהי C כמו בשאלה 11 ו- $\alpha=\frac{\log 2}{\log 3}$. מצא דוגמא לפונקציה $\psi:N\to(0,\infty)$ המקיימת $\sum_q q^{\alpha-1}(\psi(q))^{\alpha}<\infty$ כך שכל $x\in C$ הוא $\frac{\psi(q)}{q}$-מקורב.

20. יהי α מספר ממשי ויהיו $q_1,q_2,\dots$ המכנים של הקירובים של α הנובעים מפיתוח השברים המשולבים. נניח ש-$\limsup_{n\to\infty}\frac{(\log\log q_n)\sqrt{\log n}}{n}=\infty$. הוכח ש-$\alpha$ טרנסצנדנטי (כלומר לא אלגברי).

21. נניח ש-$F(X,Y)$ פולינום הומוגני בשני משתנים עם מקדמים רציונליים, מדרגה $d \geq 3$, כך שבפירוק שלו למכפלת גורמים לינאריים, כל הגורמים המופיעים אינם פרופורציוניים זה לזה. הוכח שלכל $\alpha < d-2$ יש לכל היותר מספר סופי של פתרונות $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in Z^2$ לאי-השוויון $0 < |F(z)| < \|z\|^{\alpha}$.