סימון: $\gamma=\begin{pmatrix} r & s \\ t & u\end{pmatrix}$, $x,y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $y=\gamma x=\dfrac{rx+s}{tx+u}$

עבור $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, $p,q\in\mathbb{Z}$ נסמן $\begin{pmatrix} p' \\ q'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} pu-qs \\ -pt+qr\end{pmatrix}=\pm\gamma^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q\end{pmatrix}$

נסמן את קירובים השברים, המשלבים של y ב- $\frac{p_n}{q_n}$ ושל x ב- $\frac{\tilde{p}_n}{\tilde{q}_n}$.

<u>טענה</u>: קיימים N_1, N_2 כך שלכל $m\geq 1$,

$$\begin{pmatrix} p'_{N_1+m} \\ q'_{N_1+m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \tilde{p}_{N_2+m} \\ \tilde{q}_{N_2+m}\end{pmatrix}$$

<u>כלומר</u>: החל ממקום מסוים, התמונות תחת $\pm\gamma^{-1}$ של קירובי השברים המשלבים של y, הם קירובי השברים המשלבים של x; וההתאמה $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} p'_n \\ q'_n\end{pmatrix}$ מעבירה קירובים עוקבים לקירובים עוקבים (החל ממקום מסוים).

<u>הוכחה</u>: $q'=qr-pt$ ולכן אפשר לרשום

$$q'=q(r-ty)+t(qy-p) \qquad (*)$$

ע"י החלפת סימני כל המספרים r,s,t,u אפשר להניח בה"כ ש- $r-ty>0$. לכן מ- $(*)$ נובע:

$$\text{אם } |qy-p|<\frac{r-ty}{|t|} \text{ אז ל- } q', q \text{ אותו סימן.} \qquad (**)$$

עבור n מספיק גדול, התנאי בצד ימין של $(**)$ מתקיים עבור $(p,q)=(p_n,q_n)$ (כי $|q_ny-p_n|\to 0$) ולכן ל- q_n, q'_n אותו סימן.
לכן לכל $n\geq N_1$, כל המספרים $q_n, q'_n, q_{n+1}, q'_{n+1}$ חיוביים.
באופן דומה, עבור n מספיק גדול, אפשר להפעיל את $(**)$ עבור $(p,q)=(p_{n+1}-p_n, q_{n+1}-q_n)$ ולקבל ש- $q'_{n+1}>q'_n$, כלומר ע"י הגדלת N_1 מקבלים $0<q'_n<q'_{n+1}<q'_{n+2}<\cdots$ לכל $n\geq N_1$.
עלינו להראות שאם $\frac{p_n}{q_n}$ ו- $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ קירובים עוקבים של y אז $\frac{p'_n}{q'_n}$, $\frac{p'_{n+1}}{q'_{n+1}}$ קירובים עוקבים של x לפי הגדרת המספרים p'_n, q'_n:

$$|q'_nx-p'_n|=|tx+u|\,|q_ny-p_n|>|tx+u|\,|q_{n+1}y-p_{n+1}|=|q'_{n+1}x-p'_{n+1}|$$

עתה נניח שיש שלמים P',Q' כך ש- $|Q'x-P'| \le |q'_n x - p'_n|$ ו- $0<Q'<q'_{n+1}$,

אז גם המספרים $(p,q)=(P',Q')$ וגם המספרים [illegible] $(p,q)=(p_{n+1}-P', q_{n+1}-Q')$ יקיימו את אי השוויון הימני כי [illegible] חק:

~~עבור $0<Q'\le q_{n+1}$ יתקיים $\binom{P}{Q} = \gamma\binom{P'}{Q'}$~~

$$\binom{P}{Q} = \gamma\binom{P'}{Q'}$$ יתקיים ו- $0<Q<q_{n+1}$

$$|Qy-P| \le |q_n y - p_n|$$

מאחר שה- $\frac{p_n}{q_n}$ הם קירובי שברים משולבים של y, מתקיים $p_n = P$, $q_n = Q$

$$\binom{P'}{Q'} = \pm\gamma^{-1}\binom{P}{Q} = \pm\gamma^{-1}\binom{p_n}{q_n} = \binom{p'_n}{q'_n}$$

זה מראה ש- p'_n,q'_n הם קירובים שבשם משולבים עוקבים עבור x.