(1) $G=SL_2(\mathbb{R})$, $\Gamma<G$ סריג, $X=G/\Gamma$, $\pi:G\to X$ הטלה, $u_s=\begin{pmatrix}1&s\\0&1\end{pmatrix}$,
$v_\sigma=\begin{pmatrix}1&0\\ \sigma&1\end{pmatrix}$, $a_t=\begin{pmatrix}e^t&\\&e^{-t}\end{pmatrix}$, $U=\{u_s\}_{s\in\mathbb{R}}$, $V=\{v_\sigma\}_{\sigma\in\mathbb{R}}$, $A=\{a_t\}_{t\in\mathbb{R}}$

טענה 1

יהי $x_0\in X$ נק' כך ש $t_n\nearrow\infty$ ו- $x_\infty\in X$ נק' ש-
$a_{-t_n}x_0\xrightarrow[n\to\infty]{}x_\infty$. אז, לכל $\varepsilon>0$ ולכל $f\in C_c(X)$:

יש סדרות $S_n\nearrow\infty$, $S_n'\nearrow\infty$ כך ש-

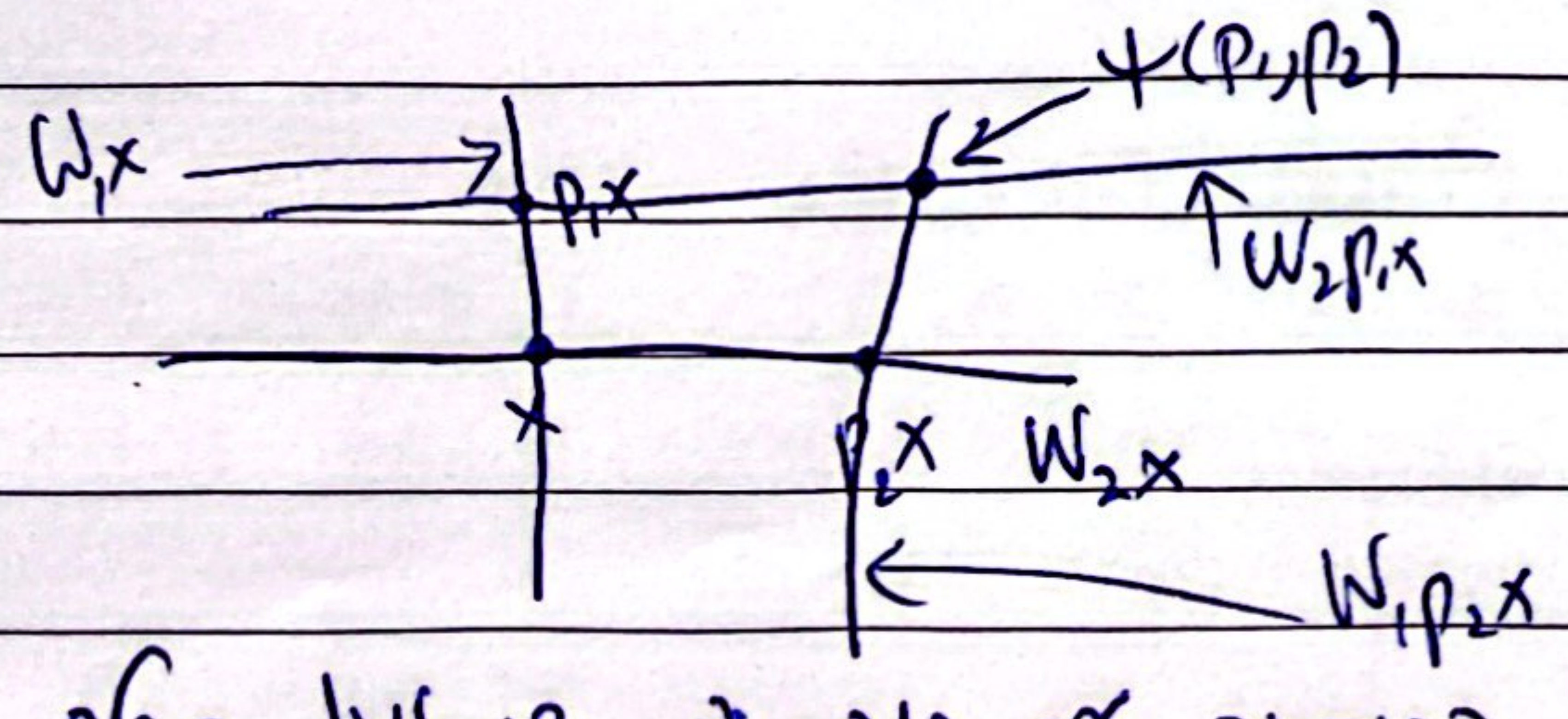
$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{1}{S_n+S_n'}\int_{-S_n'}^{S_n}f(u_sx_0)\,ds-\int_X f\,dm_X\right|<\varepsilon$$

בהרצאה נתתי "הוכחה לא נכונה" של הטענה. כדי לתקן את ההוכחה שנתתי, צריך להגדיר "קופסאות דינאמיות" באופן הבא:

נסמן $\bar{P}=AV=\left\{\begin{pmatrix}*&0\\ *&*\end{pmatrix}\right\}<G$. $B\subset X$ נקראת קופסא דינאמית סביב x אם יש סביבות פתוחות W_1,W_2 של היחידה בחבורות $U,\bar{P}$ בהתאמה,

כך שההעתקה $\Psi:W_1\times W_2\longrightarrow B$
המוגדרת ע"י התנאי $\{\Psi(p_1,p_2)\}=W_2p_1x\cap W_1p_2x$
מוגדרת היטב, וחלקה.

ציור:



אפשר להמשיך את ההוכחה עם קופסאות דינאמיות כאלה, ולא נוכיח את קיומן. יש פרטים על הבנייה הזו, במרחבים יותר כלליים, בספר G.A. Margulis, On some aspects of the theory of Anosov systems

(2) דרך נוספת ומעט מלאכותית לבדוק את ההוכחה מובאת כאן.

נגדיר כמו בהרצאה, עבור α,β,γ ועבור $x\in X$, את "הקופסא הקואורדינטית"

$$B=B_{\alpha,\beta,\gamma,x}=\{v_\sigma a_\tau u_s x : |\sigma|\le\alpha,\ |\tau|\le\beta,\ |s|\le\gamma\}$$

כפי שראינו בהרצאה $a_t B_{\alpha,\beta,\gamma,x}=B_{e^{-2t}\alpha,\beta,e^{2t}\gamma,a_t x}$.

<u>אזהרה חשובה</u>: הקופסא B היא אוסף של קטעים אורכים וקבועים זה לצד זה

$s\mapsto v_\sigma a_\tau u_s x$

אך בגלל ש-G לא קומוטטיבית, קווים אלה <u>אינם בהכרח</u> <u>מסלולים של U</u>, כלומר אינם מהצורה $s\mapsto u_s y$ עבור איזשהו y. אבל הקו האמצעי, $\sigma=\tau=0$ הוא הקו $s\mapsto u_s x$ והוא כן חלק ממסלול של U.

<u>הוכחת טענה 1</u> בהינתן $f\in C_c(X)$, מאחר של-f תומך קומפקטי, בהינתן $\varepsilon>0$ יש $\delta_1>0$ כך שאם $x\in X$, $|\sigma|<\delta_1$, $|\tau|<\delta_1$ אז $|f(x)-f(v_\sigma a_\tau x)|<\varepsilon/2$.

לפי הנתון, $a_{-t_n}x_0\to x_\infty$.

נבחר $0<\delta<\delta_1$ כך שהקופסא $B=B_{\delta,\delta,\delta,x_\infty}$ היא <u>משוכנת</u>, כלומר ההעתקה

$[-\delta,\delta]^3\to X$, $(\sigma,\tau,s)\mapsto v_\sigma a_\tau u_s x_\infty$

היא חח"ע, חלקה, והומיאומורפיזם על התמונה שלה. התמונה היא כמובן B.

מאחר ש-$a_{-t_n}x_0\to x_\infty$ ובגלל הרציפות, יש N כך שלכל $n>N$, $m_X(B\triangle B_{\delta,\delta,\delta,a_{-t_n}x_0})<\frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}$

(3)

נסמן $x_n = a_{-t_n} x_0$, $x'_\infty = a_{t_n} x_\infty$, $S_n = Se^{2t_n}$

$B_0 = B_{\delta,\delta,S,x_n}$, $B' = a_{t_n} B$, $B'_0 = a_{t_n} B_0$.

עבור $n \ge N$ מתקיים $m_X(B \Delta B_0) < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}$

ומאחר שפעולת A שומרת על המידה, $m_X(B' \Delta B'_0) < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}$.

מתקיים $B' = B_{\delta e^{-2t_n},\delta,S_n,x'_\infty}$, $B'_0 = B_{\delta e^{-2t_n},\delta,S_n,x_0}$.

ומבחירת δ, S לכל $-S_n \le s \le S_n$ ולכל $|z| \le \delta$, $|\sigma| \le \delta e^{-2t_n}$

מתקיים $|f(u_s x_0) - f(v_\sigma a_z u_s x_0)| < \varepsilon/2$

ולכן $$\left| \frac{1}{2S_n}\int_{-S_n}^{S_n} f(u_s x_0)\,ds - \frac{1}{2S_n}\int_{-S_n}^{S_n} f(v_\sigma a_z u_s x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (i)$$

את הצמצום של מידת האר ל- B'_0 אפשר לרשום בדרך הבאה: לכל R קבוצת בורל,

$$m_X(B'_0 \cap R) = \int_Q \frac{1}{2S_n}\int_{-S_n}^{S_n} 1_R(p^- u_s x_0)\,ds\,dm_{P^-}(p) \qquad (ii)$$

כאשר $Q = \{v_\sigma a_z : |z| \le \delta, |\sigma| \le e^{-2t_n}\delta\}$, ו- m_{P^-} מידת האר שמאלית על P^-. הפירוק הזה של מידת האר הוא נכון בדרך כלל, להוכחה מפורטת אפשר להסתכל על

Einsiedler & Ward, Ergodic Theory with a view toward number theory, Lemma 11.31.

נזכר מ-(i) ומ-(ii) ש-

$$\left| \frac{1}{m_G(B_0')} \int_{B_0'} f\, dm_X - \frac{1}{2S_n} \int_{-S_n}^{S_n} f(u_s x_0)\, ds \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

בגלל בחירת N מתקיים

$$\left| \frac{1}{m_G(B_0')} \int_{B_0'} f\, dm_X - \frac{1}{m_G(B')} \int_{B'} f\, dm_X \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ולכן

$$\text{(iii)} \quad \left| \frac{1}{m_G(B')} \int_{B'} f\, dm_X - \frac{1}{2S_n} \int_{-S_n}^{S_n} f(u_s x_0)\, ds \right| < \varepsilon$$

עתה נזכור כי $B' = a_{t_n} B$ ומערכנו:

$$\frac{1}{m_G(B')} \int_{B'} f\, dm_X = \frac{1}{\int_X f_1\, dm_X} \langle a_{t_n} f_1, f \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \int$$

כאשר $f_1 = \mathbb{1}_B$.

(iii) מתקיים לכל n ולכן קיים גבול מקומי

אם הוא נגדיר את $S_n = S_n'$