(יא)

E מרחב וקטורי טופולוגי קמור מקומית

$Z\subset E$ מרחב מטריזבילי קומפקטי קמור

עבור $f\in C(Z)$ נגדיר את <u>המעטפת העליונה</u>

$\bar{f}: Z\to\mathbb{R}$, $\bar{f}(z)=\inf\{h(z): h\geq f, h\in A\}$

כאשר A אוסף ההעתקו' האפיני' על E

(כלומר מקיימות, לכל $z_1,z_2\in Z$, $t\in\mathbb{R}$,

$h(tz_1+(1-t)z_2)=t\,h(z_1)+(1-t)h(z_2)$).

פונקציה g נקראת <u>קמורה</u> אם לכל $z_1,z_2\in Z$, $t\in[0,1]$, $g(tz_1+(1-t)z_2)\leq tg(z_1)+(1-t)g(z_2)$

ו<u>קעורה</u> אם $-g$ קמורה.

<u>למה:</u> תהי $f\in C(Z)$ ותהי $\bar{f}$ המעטפת העליונה של f.

אז: (1) $\bar{f}$ קעורה, חסומה, רציפה למחצה מלמעלה, ומדידה לפי בורל (כאשר רציפה למחצה מלמעלה

פירושו $z_n\to z_\infty \Longrightarrow \bar{f}(z_\infty)\geq\limsup_{n\to\infty}\bar{f}(z_n)$.

(2) $f\leq\bar{f}$, ואם f קעורה אז $f=\bar{f}$.

(3) עבור $f,g\in C(Z)$, $\overline{f+g}\leq\bar{f}+\bar{g}$, $|\bar{f}-\bar{g}|\leq\|f-g\|_\infty$,

ואם $g\in A$ אז $\overline{f+g}=\bar{f}+g$.

(4) אם $r\geq 0$ אז $\overline{rf}=r\bar{f}$.

ק

הוכחת (1) בהנתן $z_1,z_2\in Z$, $t\in[0,1]$, עלינו להראות

$$\bar f(tz_1+(1-t)z_2)\ge t\bar f(z_1)+(1-t)\bar f(z_2)$$

יהי $\varepsilon>0$ ויהי $h\in A$ כך ש- $h\ge f$ ו- $\bar f(z_3)\ge h(z_3)-\varepsilon$

כאשר $z_3=tz_1+(1-t)z_2$.

אז

$$\bar f(z_3)\ge h(z_3)-\varepsilon \underset{\uparrow}{=} th(z_1)+(1-t)h(z_2)-\varepsilon \ge$$

h לינארית

$$\ge t\bar f(z_1)+(1-t)\bar f(z_2)-\varepsilon$$

לוקחים $\varepsilon\to0$ ומקבלים את הדרוש. זה מראה ש-$\bar f$ קעורה.

כדי להראות ש-$\bar f$ חסומה מלמעלה, ניקח בתור h את הפונקציה הקבועה $\|f\|_\infty$. נקבל $\bar f\le\|f\|_\infty$.

ברור מההגדרה ש- $\bar f\ge f$ ולכן $\bar f$ גם חסומה מלמטה.

רציפות למחצה מלמעלה: יהי $\varepsilon>0$ ותהי (z_n) סדרה המקיימת $z_n\to z_\infty$. נבחר $h\in A$, $h\ge f$ כך ש- $\bar f(z_\infty)\ge h(z_\infty)-\varepsilon$. אז $\bar f(z_n)\le h(z_n)$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty}\bar f(z_n)\le\limsup_{n\to\infty}h(z_n)$$

$$=h(z_\infty)\le\bar f(z_\infty)+\varepsilon$$

ולוקחים $\varepsilon\to0$.

פונקציה רציפה למחצה מלמעלה מאופיינת ע"י התנאי: לכל $a\in\mathbb{R}$, $\{z:\bar f(z)<a\}$ פתוחה. כלומר $(\bar f)^{-1}((-\infty,a))$ פתוחה לכל a $\Leftarrow$ $\bar f$ בורל.

ג

(2) ברור כי $f \le \bar{f}$. נניח ש-f קעורה. נניח בשלילה $f(z_1) < \bar{f}(z_1)$ עבור $z_1 \in Z$. נסמן $K \subset Z \times \mathbb{R}$

$$K = \{(z,r) : f(z) \ge r\}$$

(התחום שמתחת לגרף של f).

מאחר ש-f רציפה, K סגורה. מאחר ש-f קעורה, K קמורה. לפי משפט האן-בנך (ניסוח גיאומטרי) יש פונקציונל לינארי L על $Z \times \mathbb{R}$ ו- $\eta \in \mathbb{R}$ כך ש- $\sup_{(z,r)\in K} L(z,r) < \eta < L(z_1, \bar{f}(z_1))$

הקבוצה $\{(z,r) : L(z,r) = \eta\} = V_0$ היא תת-מרחב אפיני של $Z \times \mathbb{R}$ המפריד בין K לבין הנקודה $(z_1, \bar{f}(z_1))$.

יש $h \in A$ כך ש- $V_0 = \{(z, h(z)) : z \in Z\}$.

אז $f \le h$, $h(z_1) = \eta < \bar{f}(z_1)$, בסתירה להגדרת $\bar{f}$.

(3) יהי $z \in Z$, $\varepsilon > 0$, ויהיו $h_1, h_2 \in A$ כך ש-

$\bar{f}(z) \ge h_1(z) - \varepsilon$, $h_1 \ge f$

$\bar{g}(z) \ge h_2(z) - \varepsilon$, $h_2 \ge g$.

אז $h_1 + h_2 \ge f + g$, ו- $(h_1+h_2)(z) \le \bar{f}(z) + \bar{g}(z) + 2\varepsilon$

לכן $\overline{f+g}(z) \le \bar{f}(z) + \bar{g}(z) + 2\varepsilon$ ומקבלים את התוצאה בלקיחת $\varepsilon \to 0$.

(3)

ברור (כמו בהוכחת [illegible] עם $h = \|F\|_\infty$) לכל $F \in C(Z)$,

$\bar{F} \le \|F\|_\infty$. לכן:

$$\bar{f} = \overline{f-g+g} \underset{\text{הסעיף הקודם}}{\le} \overline{f-g} + \bar{g}$$

$$\Leftarrow \quad \bar{f} - \bar{g} \le \overline{f-g} \le \|f-g\|_\infty$$

ובאופן דומה $\bar{g} - \bar{f} \le \|f-g\|_\infty$.

לכן $|\bar{f} - \bar{g}| \le \|f-g\|_\infty$.

כמו כן, אם $g \in A$ אז $h \in A \Leftrightarrow h+g \in A$

$h \ge f \Leftrightarrow h+g \ge f+g$

ולכן $\overline{f+g} = \bar{f} + g$ מההגדרה.

(4) ברור מההגדרה של $\bar{f}$.