Доклады Академии наук СССР
1962. Том 146, № 1

МАТЕМАТИКА

И. Н. БЕРНШТЕЙН

О МНОЖЕСТВЕ, ЗАМЕТАЕМОМ ОТРЕЗКОМ ПРЯМОЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 4 IV 1962)

Пусть $l(x)$ — прямая на плоскости x, y, проходящая через точку x оси абсцисс и образующая угол $\alpha(x) \neq 0$ с положительным направлением оси x. Обозначим через $\Delta(x)$ отрезок прямой $l(x)$ между осью абсцисс и прямой $y = 1$. Пусть прямая $l(x)$ определена для всех x из отрезка $[0, 1]$. Если $\alpha(x)$ — непрерывная функция, то отрезок $\Delta(x)$ заметает при движении точки x по отрезку $[0, 1]$ площадь, не меньшую $^1/_2$.

Как обстоит дело, если $\alpha(x)$ разрывна?

В этой заметке будет показано, что существует такая измеримая функция $\alpha(x)$, что $\Delta(x)$ заметает нулевую площадь. При этом функцию $\alpha(x)$ можно построить так, чтобы конец отрезка $\Delta(x)$, движущийся по прямой $y = 1$, пробегал отрезок $0 \leqslant x \leqslant 1$, попадая в каждую точку ровно один раз.

Пусть дан параллелограмм π. Фиксируем две его противоположные стороны (будем называть их основаниями).

Назовем a-системой конечную систему параллелограммов, расположенных в π, такую, что две противоположные стороны каждого параллелограмма лежат на основаниях π, причем основания π полностью покрываются этими сторонами, а стороны различных параллелограммов, лежащие на основании π, могут пересекаться только в своих концах. Теоретико-множественную сумму параллелограммов данной a-системы A будем обозначать через $|A|$.

Пусть в некотором фиксированном параллелограмме π задана a-система A, состоящая из параллелограммов $\pi_1, \ldots, \pi_n$, и пусть в каждом параллелограмме π_i $(i = 1, \ldots, n)$ задана a-система A_i (причем в качестве оснований π_i взяты стороны, лежащие на основаниях π). Тогда все параллелограммы всех систем A_i $(i = 1, \ldots, n)$ образуют a-систему $\widetilde{A}$ в π. Будем говорить, что $\widetilde{A}$ вложена в A. Если $\widetilde{A}$ вложена в $\widetilde{A}$, то, очевидно, $|\widetilde{A}| \subset |A|$ и $\operatorname{mes}|\widetilde{A}| \leqslant \operatorname{mes}|A|$.

Возьмем последовательность a-систем $A^1, A^2, \ldots, A^n, \ldots$ в π такую, что A^n вложена в A^{n-1} $(n = 2, 3, \ldots)$. Тогда $|A^1|, |A^2|, \ldots, |A^n|, \ldots$ — непустые замкнутые множества, причем $|A^{n-1}| \supset |A^n|$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Значит, их пересечение $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} |A^n|$ — непустое замкнутое множество и

$$\operatorname{mes} B = \lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} |A^n|.$$

Такие множества (пересечения последовательностей вложенных a-систем) будем коротко называть b-множествами.

Из определения b-множества вытекает, что для любого b-множества B и для любого $\varepsilon > 0$ можно найти a-систему A такую, что $|A| \supset B$ и $\operatorname{mes}|A| < \operatorname{mes} B + \varepsilon$.

Пусть $\inf \operatorname{mes} B = \beta$, где нижняя грань берется по всем b-множествам $B \subset \pi$. Докажем, что нижняя грань достигается: существует b-множество $B_0 \subset \pi$, мера которого равна β.

Пусть в параллелограмме π задана a-система A и пусть параллелограмм π' получается из π аффинным преобразованием α. При преобразовании α a-система A перейдет в некоторую a-систему A' в π'. Будем говорить, что A' в π' индуцирована a-системой A в π. Отметим, что отношения $\text{mes}\,|A|/\text{mes}\,\pi$ и $\text{mes}\,|A'|/\text{mes}\,\pi'$ равны между собой.

Пусть a-система $\widetilde{A}$ в π вложена в a-систему A в π, причем все A_i в π_i (см. определение вложенных a-систем) индуцированы одной и той же для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ a-системой A^* в π. Введем для этого случая специальное обозначение $\widetilde{A} = A \cdot A^*$. Если $\widetilde{A} = A \cdot A^*$, то $\text{mes}\,|\widetilde{A^*}| \leqslant \text{mes}\,|A^*|$. Действительно,

$$\text{mes}\,|\widetilde{A}| \leqslant \sum_i \text{mes}\,|A_i| =$$

$$= \sum_i \text{mes}\,|A^*| \frac{\text{mes}\,\pi_i}{\text{mes}\,\pi} =$$

$$= \text{mes}\,|A^*| \sum_i \frac{\text{mes}\,\pi_i}{\text{mes}\,\pi} = \text{mes}\,|A^*|.$$

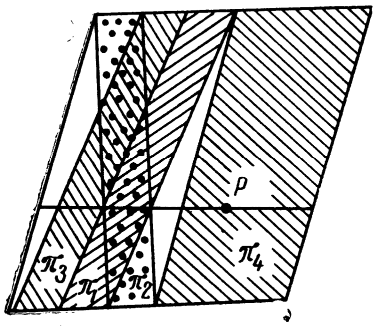

Рис. 1

Выберем теперь последовательность b-множеств $B_n \subset \pi$ так, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} \text{mes}\,B_n = \beta$. Пусть, далее, для каждого $n = 1, 2, \ldots$ a-система A_n в π такова, что $\text{mes}\,|A_n| < \text{mes}\,B_n + \frac{1}{2^n}$.

Так как для каждой a-системы A множество $|A|$ является, очевидно, b-множеством, то $\text{mes}\,|A_n| \geqslant \beta$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \text{mes}\,|A_n| = \beta$.

Построим теперь новую последовательность A-систем:

$$\widetilde{A}_1 = A_1, \quad \widetilde{A}_n = \widetilde{A}_{n-1} \cdot A_n \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

По доказанному выше $\text{mes}\,|\widetilde{A}_n| \leqslant \text{mes}\,|A_n|$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \text{mes}\,|\widetilde{A}_n| = \beta.$$

Так как $\{\widetilde{A}_n\}$ — последовательность вложенных a-систем, то $B_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} |\widetilde{A}_n|$ является b-множеством, и $\text{mes}\,B_0 = \beta$. Покажем теперь, что $\beta = 0$. Предположив противное: $\beta > 0$, мы сумеем построить b-множество B^*, мера которого меньше меры B_0, и тем самым придем к противоречию.

Итак, пусть $\beta > 0$. Тогда в B_0 найдется точка плотности P, не лежащая на основании π. Рассмотрим a-систему A^* в π, изображенную на рис. 1. A^* состоит из четырех параллелограммов π_1, π_2, π_3 и π_4. Параллелограммы π_1 и π_2 выбраны так, чтобы их боковые стороны соответственно пересекались на прямой, параллельной основанию π и проходящей через точку P. Тогда при аффинных преобразованиях переводящих π соответственно в π_1 и в π_2, образы точки P совпадут.

Пусть при аффинном преобразовании α_i, переводящем π в π_i ($i = 1, 2, 3, 4$), b-множество B_0 переходит в множество B_{0i}, и пусть $B^* = \bigcup\limits_{i=1}^{4} B_{0i}$. Множество B^* является b-множеством, и $\text{mes}\,B^* < \text{mes}\,B_0$. Полученное противоречие показывает, что $\beta = 0$.

Тем самым доказано существование замкнутого множества $B_0 \subset \pi$ меры нуль, содержащего оба основания π и такого, что вместе с каждой точкой ему принадлежит прямолинейный отрезок от одного основания до другого, содержащий эту точку. Одновременно доказано существование a-систем со сколь угодно малой площадью.

Пусть π — квадрат $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Множество B_0 не дает еще требуемой нам функции, так как отрезки, соединяющие в нем точки оснований квадрата π, не осуществляют взаимно-однозначного соответствия. Но это легко поправить.

Вспомним, что $B_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n$. Для a-системы $\widetilde{A}_n$ обозначим через N_n^1 и N_n^2 множества вершин входящих в $\widetilde{A}_n$ параллелограммов, причем N_n^1 — множество вершин, расположенных на нижнем основании π, а N_n^2— множество вершин, расположенных на верхнем основании π. Пусть $N_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n^1$ и $N_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n^2$. Каждое из множеств N_1 и N_2 счетно.

Исключим N_1 и N_2 соответственно из нижнего и верхнего оснований π и обозначим оставшиеся множества через D_1 и D_2.

Для каждой точки из D_1 существует единственный отрезок в B_0, соединяющий эту точку с некоторой точкой из D_2, и наоборот. Обозначая через $\alpha(x)$ угол наклона отрезка, соединяющего точку x из D_1 с D_2, мы замечаем, что функция $\alpha(x)$ непрерывна на D_1. Поставим точки множеств N_1 и N_2 во взаимно-однозначное соответствие каким-нибудь способом и соединим соответствующие точки отрезками. Мы получим взаимно-однозначное отображение всей нижней стороны квадрата на верхнюю. Функция $\alpha(x)$ пополнится при этом какими-то значениями на счетном множестве N_1 и будет, таким образом, измеримой.

Поступило
20 III 1962