ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

ECONOMICS AND MATHEMATICAL METHODS

Том II, вып. 5

СЕНТЯБРЬ — ОКТЯБРЬ

Адрес редакции: Москва, Г-19, Волхонка, 14. Тел. Б 8-49-54

ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1966 том II, вып. 5

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ

И. Н. БЕРНШТЕЙН, С. А. ПАНОВ

(Москва)

Применение на автомобильном транспорте методов оптимального программирования позволило поставить на качественно новую ступень решение ряда задач: в частности, одну из основных задач оперативного планирования перевозок грузов автомобильным транспортом — задачу увязки потоков грузов в маршруты.

При перевозках массовых грузов в условиях крупных городов применение ранее предложенных методов оказалось весьма трудоемким и приближенным, так как не учитывались дополнительные ограничения таких параметров, как число ездок с грузом в одном обороте маршрута (b), ограничение нижней границы величины коэффициента использования пробега, продолжительность пребывания автомобиля в наряде, под погрузкой и разгрузкой.

В настоящей статье предлагается метод решения задачи маршрутизации, учитывающий ограничения этих параметров. Изложение сущности метода сопровождается числовым примером. Исходным документом служит матрица расстояний c_{ij} между пунктами погрузки i и пунктами разгрузки j (см. табл. 1); в ней указаны и объемы грузов Q_{ij}, перевозимые из i-х в j-е пункты. Справа основной матрицы указаны расстояния S_{jh} между пунктами j и автохозяйствами h (возврат), внизу — расстояния S_{hi}' между автохозяйствами h и пунктами i (подача).

Метод состоит из последовательного выполнения двух этапов: I) составления комбинаций маршрутов; II) оптимизации комбинаций маршрутов.

На первом этапе производится следующее.

а) Определяются оценочные нулевые коэффициенты по формуле $c_{ij}' = [\min\limits_{h}(S'_{hi} + S_{jh}) - c_{ij}]$.

б) Формируются возможные комбинации маршрутов для $b = 2$, затем $b = 3$ и т. д. При этом задаются следующие исходные величины: $T_{\text{н}}$ — время работы автомобиля в наряде (час.); $t_{\text{пр}}$ — время простоя автомобиля под одной разгрузкой и погрузкой (час.); $V_{\text{техн}}$ — техническая скорость автомобиля (*км/час*); $\bar{\beta}_0$ — заданная нижняя граница коэффициента использования пробега (без учета нулевых пробегов); $\beta_0 (\beta_0 \leqslant \bar{\beta}_0)$ — заданная нижняя граница коэффициента использования пробега (с учетом нулевых пробегов). Величины Q_{ij} формируют комбинации маршрутов, если соблюдается условие

$$\frac{L_{\text{гр}}}{L_{\text{гр}} + L_{\text{пор}}} = \bar{\beta} \geqslant \bar{\beta}_0, \qquad (1)$$

где $L_{\text{гр}}$ — пробег с грузом за один оборот на полученной комбинации маршрута; $L_{\text{пор}}$ — порожний пробег за один оборот на полученной комбинации маршрута (при $b \geqslant 3$ выбирается $\min L_{\text{пор}}$, так как становятся возможными различные варианты прохождения маршрута); $\bar{\beta}$ — величина коэффициента использования пробега на маршруте, связывающем Q_{ij}. Выполнение условия (1) отсекает область заведомо недопустимых комбинаций маршрутов, что значительно уменьшает время вычислений.

Таблица 1

$j \backslash i$		I	II	III	IV	Автохозяйства № 1	Автохозяйства № 2
1		210 $\boxed{10}$	$\boxed{8}$	$\boxed{12}$	$\boxed{6}$	5	7
2		70 $\boxed{11}$	$\boxed{7}$	$\boxed{5}$	$\boxed{9}$	12	6
3		$\boxed{7}$	$\boxed{12}$	130 $\boxed{11}$	$\boxed{8}$	3	12
4		$\boxed{5}$	$\boxed{9}$	210 $\boxed{12}$	$\boxed{7}$	6	7
5		$\boxed{7}$	250 $\boxed{10}$	$\boxed{8}$	$\boxed{7}$	2	5
6		$\boxed{8}$	$\boxed{13}$	$\boxed{12}$	150 $\boxed{11}$	9	7
Автохозяйства	№ 1	5	11	8	5		
Автохозяйства	№ 2	6	9	10	5		

в) Полученные комбинации маршрутов привязываются к автохозяйствам по минимальному значению оценочных нулевых коэффициентов: $c'' = \min\limits_{i,j} (c'_{ij})$.

г) Запоминаются только те комбинации маршрутов, в которых $\beta \geqslant \beta_0$ (что отвечает требованию ограничения нижней границы допустимой величины коэффициента использования пробега на полученных комбинациях маршрутов):

$$\beta = \frac{kL_{\text{гр}}}{k(L_{\text{гр}} + L_{\text{пор}}) + c''} = \frac{L_{\text{гр}}}{L_{\text{гр}} + L_{\text{пор}} + \dfrac{c''}{k}}, \tag{2}$$

$$k = \frac{T_{\text{н}} V_{\text{техн}} - c''}{L_{\text{гр}} + L_{\text{пор}} + \sum\limits_{1}^{b} t_{\text{пр}} V_{\text{техн}}}, \tag{3}$$

где k — число оборотов по маршруту (округляется до целого). Для данного примера (если задаться величинами $\bar{\beta}_0 = 0{,}55$ и $\beta_0 = 0{,}50$) получены следующие комбинации маршрутов (для $b = 2$):

1) $Q_{\mathrm{I}\cdot 1} - Q_{\mathrm{II}\cdot 5}$; $\beta_1 = 0{,}51$; $k_1 = 4$
2) $Q_{\mathrm{I}\cdot 1} - Q_{\mathrm{III}\cdot 4}$; $\beta_2 = 0{,}51$; $k_2 = 3$
3) $Q_{\mathrm{I}\cdot 1} - Q_{\mathrm{IV}\cdot 6}$; $\beta_3 = 0{,}53$; $k_3 = 4$
4) $Q_{\mathrm{I}\cdot 2} - Q_{\mathrm{II}\cdot 5}$; $\beta_4 = 0{,}54$; $k_4 = 4$
5) $Q_{\mathrm{I}\cdot 2} - Q_{\mathrm{III}\cdot 3}$; $\beta_5 = 0{,}58$; $k_5 = 4$
6) $Q_{\mathrm{I}\cdot 2} - Q_{\mathrm{III}\cdot 4}$; $\beta_6 = 0{,}60$; $k_6 = 4$
7) $Q_{\mathrm{I}\cdot 2} - Q_{\mathrm{IV}\cdot 6}$; $\beta_7 = 0{,}51$; $k_7 = 3$
8) $Q_{\mathrm{II}\cdot 5} - Q_{\mathrm{III}\cdot 4}$; $\beta_8 = 0{,}50$; $k_8 = 3$

На *втором этапе* решения данной задачи необходимо так распределить потоки грузов по полученным маршрутам, чтобы $\sum\limits_r \beta_r x_r$ была максимальна (β_r — коэффициент использования пробега на r-м маршруте, а x_r — искомый объем груза, перевозимый на r-м маршруте). Сначала опишем решение задачи для случая $b \leqslant 2$. Для решения поставленной задачи формируется квадратная и симметричная матрица (номера строк обозначим индексами p, номера столбцов t), порядок которой l равен числу ездок с грузом Q_{ij} (за исключением тех Q_{ij}, которые не попали ни в одну из комбинаций маршрутов). В примере $l = 6$. В последнем столбце и последней строке проставляются соответствующие грузы Q_p и Q_t', при этом для $p = t$ $Q_p = Q_t' = Q_{ij}$ (см. табл. 2).

Стоимостными показателями в матрице являются величины коэффициентов использования пробегов на полученных комбинациях маршрутов. Например, маршрут 1, связывающий $Q_{\mathrm{I}\cdot 1} - Q_{\mathrm{II}\cdot 5}$ при $\beta_1 = 0{,}51$, в матрице записывается следующим образом: на пересечении столбца I.1 и строки II.5 проставляется $\beta_1 = 51$ (для простоты вычислений цифра увеличивается в 100 раз и округляется до ближайшего целого числа) и на пересечении столбца II.5 и строки I.1 проставляется $\beta_1 = 51$. Аналогично заполняются остальные клетки матрицы. Для $p = t$ $\beta_{pt} = 0$ (стоимостные показатели, расположенные по диагонали, соответствуют маятниковым перевозкам), что означает нерациональность таких перевозок (не исключается возможность и простановки фактических величин β_{pt} для $p = t$). В остальных клетках матрицы $\beta_{pt} = -\infty$ (стоимости таких клеток не запоминаются в памяти ЭВМ).

Для решения поставленной задачи (для случая $b \leqslant 2$) нужно найти симметричное относительно диагонали решение транспортной задачи линейного программирования:

$$\sum_{p=1}^{l} x_{pt} = Q_t', \quad t = 1, \ldots, l, \tag{4}$$

$$\sum_{t=1}^{l} x_{pt} = Q_p, \quad p = 1, \ldots, l, \tag{5}$$

$$x_{pt} \geqslant 0, \tag{6}$$

$$Q_p = Q_t' \quad \text{для} \quad p = t, \tag{7}$$

$$\sum_{p=1}^{l} \sum_{t=1}^{l} \beta_{pt} x_{pt} = Z_{\max}, \tag{8}$$

где x_{pt} — количество груза, перевозимое на маршруте, связывающем грузы Q_p и Q_t'.

Находится обычными методами оптимальное решение этой задачи и симметризуется по формуле:

$$x_{pt}^{\text{опт}} = \frac{x_{pt} + x_{tp}}{2}.$$

Существующие алгоритмы решения транспортных задач не учитывают специфики полученной матрицы и поэтому оказываются неприемлемыми для решения данной задачи. Предлагаемый алгоритм — разновидность метода условно-оптимальных планов, учитывающего специфику полученной задачи: ее разреженность и симметричность.

Таблица 2

p	t						Груз Q_p
	I.1	I.2	II.5	III.3	III.4	IV.6	
I.1	$\boxed{0}$		60 $\boxed{51}$		$\boxed{51}$	150 $\boxed{53}$	210
I.2		$\boxed{0}$	$\boxed{54}$	70 $\boxed{58}$	$\boxed{60}$	$\boxed{51}$	70
II.5	40 $\boxed{51}$	$\boxed{54}$	$\boxed{0}$		210 $\boxed{50}$		250
III.3		70 $\boxed{58}$		60 $\boxed{0}$			130
III.4	20 $\boxed{51}$	$\boxed{60}$	190 $\boxed{50}$		$\boxed{0}$		210
IV.6	150 $\boxed{53}$	$\boxed{51}$				$\boxed{0}$	150
Груз Q_t'	210	70	250	130	210	150	

Разреженность матрицы позволяет величины β_{pt} записывать в памяти ЭВМ не в виде таблицы, а по порядку, с указанием индексов p и t, как это принято в сетевых алгоритмах. При этом, так как $\beta_{pt} = \beta_{tp}$ при $p \neq t$, то запоминается всего одна из этих величин (см. таблицу B). Решение ведется таким образом, чтобы симметрия матрицы по возможности сохранялась. При этом потенциалы u_p и u_t, возникающие при решении задачи методом условно-оптимальных планов, в процессе решения остаются симметричными, т. е. $u_p = u_t$. Поэтому в памяти ЭВМ запоминаются только значения u_p (таблица u).

В таблице $\overline{Q}$ указаны грузы Q_p, в таблице $\overline{Q}'$ — грузы Q_t' в порядке возрастания p и t. Объемы x_{pt}, получаемые в процессе решения, указаны в этих же таблицах. Это происходит следующим образом: x_{pt} расположены либо на p-м месте в таблице $\overline{Q}$ (место $\overline{Q}_p$), либо на t-м месте в таблице $\overline{Q}'$ (место $\overline{Q}_t'$). При этом, если x_{pt} находится в $\overline{Q}_p$, то он записывается так: (t, x); если же он находится в $\overline{Q}_t'$, то он записывается (p, x) (т. е. в одной ячейке записываются и величина x, и величина t или p). Если при решении на место $\overline{Q}_p$ попадает какой-либо объем x_{pt}, это означает, что к этому времени весь груз Q_p исчерпан (Q_p будет в дальнейшем означать величину остатка нераспределенного груза; чтобы отличить Q_p от x_{pt}, его записывают в $\overline{Q}_p$ так; $(0, Q_p)$). Аналогично для $\overline{Q}_t'$.

В нашем примере:

Таблица B (0)

0		**51**		**51**	**53**
	0	**54**	**58**	**60**	**51**
51	**54**	**0**		**50**	
	58		**0**		
51	**60**	**50**		**0**	
53	**51**				**0**

Таблица u (0)

3	0	6	2	0	4

Таблица $\overline{Q}$ (0)

0	0	0	0	0	0
210	70	250	130	210	150

Таблица $\overline{Q}'$ (0)

0	0	0	0	0	0
210	70	250	130	210	150

Таблица B здесь для удобства дана в виде матрицы (в памяти ЭВМ она хранится в виде таблицы, а не матрицы, что позволяет более эффективно использовать оперативную память ЭВМ).

Потенциалы u всегда удовлетворяют условию $\beta_{pt} + u_p + u_t \leqslant \Gamma$, где первоначально выбирается $\Gamma = \max\limits_{p,\,t} \beta_{pt}$, а затем меняется в процессе решения (в примере $\Gamma = \beta_{2.5} = 60$). u первоначально выбирается так, чтобы в каждом столбце (а следовательно, и в каждой строке) была хотя бы одна клетка, для которой $\beta_{pt} + u_p + u_t = \Gamma$. Такие клетки мы будем называть допустимыми. Размещение объемов x_{pt} разрешается только в допустимых клетках (в таблицах B в допустимых клетках β выделены жирным шрифтом).

Если клетка (p, t) допустима, то из-за симметричности клетка (t, p) допустима, поэтому знак допустимости, так же как и величина β_{pt}, указывается один раз.

А л г о р и т м состоит из четырех частей.

Работа начального плана состоит в следующем:

I. 1. Выбираем u_p так, чтобы $u_p + u_t + \beta_{pt} \leqslant \Gamma$ (напомним, что для первой итерации $\Gamma = \max\limits_{p,\,t} \beta_{pt}$) и чтобы в каждой строке была допустимая клетка (т. е. клетка, для которой $\beta_{pt} + u_p + u_t = \Gamma$). При этом отмечаем в таблице B все допустимые клетки (в ячейках для этого отведен специальный разряд).

2. Выбираем последовательно допустимые клетки (p, t). Если $\overline{Q}_p = (0, Q_p)$ и $\overline{Q}_t' = (0, Q_t')$, то распределяем в клетку (p, t) объем $x_{pt} = \min(Q_p, Q_t')$. При этом Q_p и Q_t' (нераспределенные грузы) уменьшаются на величину x_{pt}. Один из них обратится в нуль. Возможен случай, когда оба груза обратятся в нуль, т. е. $Q_p = Q_t'$. В этом случае вычисления ведутся точно так же, как и в случае, когда $Q_t' < Q_p$.

Тот из грузов, который обратится в нуль, можно исключить из рассмотрения и на освободившееся место в таблице поставить x_{pt} (если $Q_t' \leqslant Q_p$, то x_{pt} записывается в $\overline{Q}_t'$ как (p, x); если $Q_p < Q_t'$, то x_{pt} записывается в $\overline{Q}_p - (t, x)$). После того как исчерпаны все допустимые клетки, переходим к части II. Чтобы не нарушать симметрию, вслед за каждой выбранной клеткой берем ей симметричную. Распределяем объемы по допустимым клеткам (см. табл. $\overline{Q}$ и $\overline{Q}'$ (1)—(3)).

Таблица $\overline{Q}(1)$

3	0	0	0	0	0
210	70	40	130	210	150

Таблица $\overline{Q}'(1)$

3	0	0	0	0	0
210	70	40	130	210	150

Клетки (3,1) и (1,3)

Таблица $\overline{Q}(2)$

3	0	2	0	0	0
210	30	40	130	210	150

Таблица $\overline{Q}'(2)$

3	0	2	0	0	0
210	30	40	130	210	150

Клетки (3,2) и (2,3)

Таблица $\overline{Q}(3)$

3	4	2	0	0	0
210	30	40	100	210	150

Таблица $\overline{Q}'(3)$

3	4	2	0	0	0
210	30	40	100	210	150

Клетки (4,2) и (2,4)

II. Выясняем, можно ли, не меняя u (т. е. используя те же допустимые клетки), так перераспределить объемы, чтобы уменьшилась величина нераспределенных грузов. Сначала все строки и столбцы классифицируем следующим образом.

3. Классифицируем строки. Для каждой строки строим некоторую последовательность строк и столбцов, которая называется классифицирующей цепочкой. Пусть дана строка p. Если в $\overline{Q}_p$ лежит $(0, Q_p)$, то цепочка состоит из одного элемента — строки p. Если в $\overline{Q}_p$ лежит (t_1, Q_p), то в цепочку заносятся элементы $p_1 = p$ и t_1. Затем рассматриваем $\overline{Q}_t'$. Если в $\overline{Q}_{t_1}'$ лежит $(0, Q_{t_1}')$ — цепочка обрывается, если же лежит (p_2, Q_{t_1}'), то к цепочке присоединяем p_2 и рассматриваем $\overline{Q}_{p_2}$, и т. д., пока цепочка не оборвется (можно доказать, что она обязательно оборвется). Если цепочка оборвалась на строке (в частности, когда она состоит всего из одного элемента p), то строка p относится к классу 1, если же она обрывается на столбце, то строка относится к классу 0.

4. Классифицируем столбцы. Строим классифицирующие цепочки (аналогично п. 3). Если цепочка обрывается на столбце, то столбец относится к классу 1, если обрывается на строке,— относится к классу 0. Например, у нашей матрицы цепочки и классификации показаны в таблицах 3 и 4.

5. После классификации просматривается таблица B. Если имеется такая допустимая клетка (p_0, t_0), что p_0 и t_0 относятся к классу I, то переходим к части IV. Если такой клетки нет, переходим к части III (так как в таблице B симметричные стоимости β_{pt} и β_{tp} записаны в одной

клетке, то при просмотре надо проверять два случая — p-строка, t-столбец, и наоборот — p-столбец, t-строка). В нашем случае такой клетки нет, поэтому переходим к части III.

Таблица 3

Номер строки	Классифицирующая цепочка				Классификация
	строка	столбец	строка	столбец	
1	1	3	2	4	0
2	2	4			0
3	3	2	4		1
4	4				1
5	5				1
6	6				1

Таблица 4

Номер столбца	Классифицирующая цепочка				Классификация
	столбец	строка	столбец	строка	
1	1	3	2	4	0
2	2	4			0
3	3	2	4		1
4	4				1
5	5				1
6	6				1

III. В этой части происходит изменение потенциалов u, так как при имеющихся u (т. е. в имеющихся допустимых клетках) нельзя увеличить сумму всех распределенных объемов. При изменении u, очевидно, таблицы $\overline{Q}$ и $\overline{Q}'$, а также классификации строк и столбцов не меняются. Но при этом меняются допустимые клетки. Изменение u производится следующим образом.

6. Находим добавку Δ. Просматриваем клетки β_{pt}. Если $p \neq t$, то возможны следующие сочетания классификаций строк и столбцов (см. табл. 5).

Таблица 5

Классификация p-строки	1	1	1	1	0	1	1	0	0
» p-столбца	1	1	0	0	0	1	0	0	0
» t-строки	1	1	1	1	1	0	0	1	0
» t-столбца	1	0	1	0	1	0	0	0	0
Сумма классификаций строк и столбцов Σ	4	3		2			1		0

Если $\Sigma = 4$, то $\Delta_{pt} = \Gamma - \beta_{pt} - u_p - u_t$. Если $\Sigma = 3$, то $\Delta_{pt} = 2(\Gamma - \beta_{pt} - u_p - u_t)$. Если $\Sigma = 0$ или $\Sigma = 1$, то у клетки (p, t) знак допустимости пропадает (если он был). Если $\Sigma = 2$ — ничего не меняется.

В случае $p = t$ могут быть такие сочетания классификаций (см. табл. 6).

Таблица 6

Классификация p-строки	1	1	0
» p-столбца	1	0	0
Удвоенная сумма классификаций строки и столбца Σ	4	2	0

Если $\Sigma = 4$, то $\Delta_{pp} = \Gamma - \beta_{pp} - u_p - u_p$. Если $\Sigma = 0$, то у клетки (p, p) знак допустимости пропадает (если он был). Если $\Sigma = 2$, ничего не меняется.

Теперь положим $\Delta = \min\limits_{p,t} \Delta_{pt}$. Если бы какое-либо $\Delta_{pt} = 0$, это означало бы, что $\Gamma = \beta_{pt} + u_p + u_t$, т. е. (p, t) допустима, и в то же время у клетки (t, p) (или клетки (t, p)) и строка, и столбец принадлежат классу 1, что противоречит предположению (см. п. 5). Значит, $\Delta > 0$.

7. Изменяем u и Γ. Если p-е строка и столбец принадлежат классу 1, то $u_p' = \Delta + u_p$. Если только p-я строка принадлежит классу 1, а столбец — классу 0, то $u_p' = u_p + \Delta / 2$. Если p-е строка и столбец принадлежат классу 0, то $u_p' = u_p$. Кроме того, для следующей итерации заменяем $\Gamma' = \Gamma + \Delta$.

8. Легко видеть, что после изменения u_p появятся новые допустимые клетки (p, t), а именно те, для которых $\Delta = \Delta_{pt}$. В них проставляются знаки допустимости. Некоторые клетки перестают быть допустимыми, но в этих клетках знак допустимости был уже зачеркнут в п. 6.

В результате работы III части появилась допустимая клетка (p_0t_0) (может быть не одна), у которой строка p_0 и столбец t_0 принадлежат классу 1. Поэтому можно перейти к части IV. В нашем примере будет $\Delta = \Delta_{5.3} = 4$. Тогда $\Gamma' = \Gamma + \Delta = 60 + 4 = 64$.

Таблица B (1)

0		51		51	53
	0	54	58	60	51
51	54	0		50	
	58		0		
51	60	50		0	
53	51				0

Таблица u (1)

3	0	10	6	4	8

Появились допустимые (5,3) и (3,5). Ни одна из ранее существующих допустимых не пропала.

IV. Имеется допустимая клетка (p_0, t_0) такая, что строка p_0 и столбец t_0 принадлежат классу 1. Вообще говоря, не обязательно строка t_0 и столбец p_0 принадлежат классу 1, но в большинстве случаев это так. Поэтому часть IV выполняется в два приема: сначала рассматривается клетка (p_0t_0), затем (t_0p_0). При этом необходимо учитывать возможность того, что либо строка, либо столбец рассматриваемой клетки уже не принадлежат классу 1.

9. Рассматриваем клетку (p_0t_0). Составляем классифицирующие цепочки

$$p_0 = p_1,\ t_1,\ p_2,\ t_2, \dots p_k,$$
$$t_0 = t_1',\ p_1',\ t_2',\ p_2', \dots t_l'.$$

Если 1-я цепочка окончится строкой, а 2-я столбцом (т. е. p_0 и t_0 принадлежат классу 1), то переходим к п. 10. В противном случае — к п. 14.

10. *Пусть* $y = \min(x_{p_1t_1}; x_{p_2t_2}, \dots, x_{p_k0})$, где $x_{p_k0} = Q_{p_k}$, и пусть i — первый такой номер, что $y = x_{p_it_i}$. Тогда из всех $x_{p_st_s}$ вычитаем y, а ко всем $x_{p_{s+1}t_s}$ прибавляем y:

$$x'_{p_st_s} = x_{p_st_s} - y,\ x'_{p_{s+1}t_s} = x_{p_{s+1}t_s} + y.$$

При этом $x_{p_st_s}$ превратится в 0, и его место освободится. Все полученные x расписываем в таблицы следующим образом: $x'_{p_00} = y$ записываем в $\overline{Q}_{p_0}(0, y)$ на место $x_{p_1t_1}$, $x'_{p_1t_1}$ — в $\overline{Q}_{t_1}'(p_1x)$ на место $x_{p_2t_1}$, $x'_{p_2t_1}$ — в $\overline{Q}_{p_2}$ (t_1x) на место $x_{p_2t_2}$, $x'_{p_2t_2}$ — в $\overline{Q}_{t_2}'(p_2x)$ на место $x_{p_3t_2}, \dots, x'_{p_it_{i-1}}$ — в $\overline{Q}_{p_i}$ $(t_{i-1}x)$ на место $x_{p_it_i}$. $x_{p_{i\,i}}$ никуда записывать не надо.

Следующие $x'_{p_{i+1}t_{i+1}}$; $x'_{p_{i+2}t_{i+1}}$; $x'_{p_{i+2}t_{i+2}}; \dots; x'_{p_k0}$ записываем на старые места.

11. Делаем аналогичные операции со 2-й цепочкой: $z = \min(x_{p_1't_1'}; x_{p_2't_2'}; \dots; x_{0t_l'})$, где $x_{0t_l} = Q'_{t_l'}$ и пусть j — первый такой номер, что $z = x_{p_i't_i'}$. Тогда

$$x'_{p_s't_s'} = x_{p_s't_s'} - z;\ x'_{p_s't'_{s-1}} = x_{p_s't'_{s-1}} + z.$$

$x'_{0t_0} = z$ записываем в $\overline{Q}_{t_0}'(0, z)$ на место $x_{p_1't_1'}$; $x'_{p_1't_1'}$ — в $\overline{Q}_{p_1}(t_1', x)$ на место $x_{p_1't_2'}$ и т. д. $x_{p_j't_j'}$ никуда не записываем. $x_{p_j't_{j+1}'}$; $x_{p_{j+1}'t_{j+1}'}; \dots;$ x_{0t} записываем на прежние места.

12. В п. 10 и 11 мы перераспределили $x_{p_it_i}$ так, что их сумма не изменилась, но зато в $\overline{Q}_{p_0}$ — $(0, y)$ и в $\overline{Q}'_{t_0}$ — $(0, z)$, т. е. имеются нераспределенные остатки Q_{p_0} и Q'_{t_0}. Значит, аналогично тому, как это делалось в части I, распределяем в клетку (p_0t_0) объем $x_{p_0t_0} = \min(Q_{p_0}; Q'_{t_0})$. При этом Q_{p_0} и Q'_{t_0} уменьшается на ту же величину и один из них обращается в нуль и исключается из рассмотрения. Итак, если $Q'_{t_0} \leqslant Q_p$, то $x_{p_0t_0}$ ставится в $\overline{Q}'_{t_0}$ — (p_0z), если же $Q_p < Q'_{t_0}$, то $x_{p_0t_0}$ ставится в $\overline{Q}_{p_0}$ — (t_0y). Таким образом, уменьшается суммарная величина нераспределенного объема.

13. Если весь груз нами уже распределен, то x_{pt} составляет оптимальное решение. Если распределен не весь груз, решение продолжаем (п. 14).

14. Если случай (t_0, p_0) уже рассматривался (см. начало части IV), то переходим к части II. Если же он не рассматривался, то заменяем (p_0t_0) на $(p_0't_0')$, где $p_0' = t_0$ и $t_0' = p_0$, и переходим к п. 9.

Примечание. Возможно, придется записывать в таблицы $\overline{Q}$ и $\overline{Q}'$ x_{pt} или Q_p, равные нулю (это может быть в п. 12, когда $Q_p = Q_t'$, а также в пп. 10 или 11, когда min достигается в нескольких клетках). Это не вносит никаких особенностей в изложенный алгоритм, поэтому изменений в последовательном выполнении операций не происходит.

Далее на примере показана работа алгоритма. Допустимая клетка (p_0t_0) — (5,3). Составляем цепочки: 1) 5; 2) 3, 2, 4. Первая цепочка не меняется, так как в строке 5 уже имеется остаток. Вторая цепочка $x_{23} = 40$; $x_{04} = 100$; $y = 40$; $j = 1$; $x_{24} = 30$; $x_{23}' = 0$; $x_{04}' = 60$; $x_{24}' = 70$; $x_{03} = 40$.

Таблица $\overline{Q}$ (4)

3	4	2	0	0	0
210	70	40	100	210	150

Таблица $\overline{Q}'$ (4)

3	4	0	0	0	0
210	30	40	60	210	150

Уменьшаем величину нераспределенных объемов (см. таблицы $\overline{Q}$, $\overline{Q}'$ (5)).

Таблица $\overline{Q}$ (5)

3	4	2	0	0	0
210	70	40	100	170	150

Таблица $\overline{Q}'$ (5)

3	4	5	0	0	0
210	30	40	60	210	150

Аналогичные преобразования проделаем для клетки (3,5).

Таблица $\overline{Q}$ (6)

3	4	5	0	0	0
210	70	40	60	170	150

Таблица $\overline{Q}'$ (6)

3	4	5	0	0	0
210	70	40	60	170	150

Классифицируем строки

1	0	0	1	1	1

и столбцы

1	0	0	1	1	1

(6, 1) — допустимая клетка, так как 6-я строка и 1-й столбец лежат в классе 1.

Строим цепочки: 1) 6 (первая цепочка без изменений); 2) 1, 3, 5.

$$x_{31} = 210;\ x_{05} = 170;\ y = 170;\ \gamma = 2;\ x_{35} = 40;$$
$$x_{31}' = 40;\ x_{05} = 0;\ x_{01} = 170;\ x_{35}' = 210.$$

Таблица $\overline{Q}$ (7)

3	4	1	0	0	0
210	70	40	60	170	150

Таблица $\overline{Q}'$ (7)

0	4	5	0	3	0
170	70	40	60	210	150

Таблица $\overline{Q}$ (8)

3	4	1	0	0	1
210	70	40	60	170	150

Таблица $\overline{Q}'$ (8)

0	4	5	0	3	0
20	70	40	60	210	150

Проделав то же для клетки (1, 6), получим (см. таблицы $\overline{Q}$, $\overline{Q}'$ (9)):

Таблица $\overline{Q}$ (9)

0	4	1	0	3	1
20	70	40	60	210	150

Таблица $\overline{Q}'$ (9)

0	4	1	0	3	1
20	70	40	60	210	150

Классифицируем строки

1	0	0	1	1	0

и столбцы

1	0	0	1	1	0

.

Переходим к вычислению добавки. $\Delta = 6$. Новые допустимые (1, 5) и (5, 1). $\Gamma = 70$. Перестали быть допустимыми (3, 2) и (2, 3). Вычислим u (см. таблицу u (2)).

Таблица u(2)

9	0	10	12	10	8

Составляем цепочку для (5,1): 1) 5, 3, 1; 2) 1.

Таблица $\overline{Q}$ (10)

3	4	1	0	0	1
60	70	40	60	0	150

Таблица $\overline{Q}'$ (10)

5	4	5	0	3	1
20	70	190	60	210	150

5-й столбец лежит в классе 0, поэтому для клетки (1, 5) 2-я цепочка оканчивается строкой (см. п. 14). Классифицируем строки и столбцы

1	0	1	1	1	1

0	0	0	1	0	0

.

Вычисляем добавку. $\Delta = 46$; $\Gamma = 116$.

Вычисляем u (см. таблицу u (3)). Появилась новая допустимая клетка (4, 4), но перестали быть допустимыми клетки (2, 5), (5, 2).

Строим цепочки для клетки (4, 4): 1) 4; 2) 4.

Таблица B (2)

0		51		51	53
	0	54	58	60	51
51	54	0		50	
	58		0		
51	60	50		0	
53	51				0

Таблица u (3)

32	0	33	58	33	31

Таблица $\overline{Q}$ (11)

3	4	1	0	0	1
60	70	40	0	0	150

Таблица $\overline{Q}'$ (11)

5	4	5	4	3	1
20	70	190	60	210	150

Получено оптимальное решение, так как весь объем распределен. Перенесем решение из таблиц $\overline{Q}$ и $\overline{Q}'$ (11) в табл. 2.

По данному алгоритму авторами была составлена программа на БЭСМ-2, по которой проводилось оперативное планирование перевозок нерудных материалов в Главмосавтотрансе.

Для общего случая, т. е. когда число ездок с грузом в одном обороте маршрута принимает любое приемлемое для практики значение, реализация второго этапа, т. е. оптимизация l комбинаций маршрутов, достигается решением общей задачи линейного программирования, математическая формулировка которой такова: нужно найти такие объемы x_l на каждом маршруте, чтобы

$$\sum_{l=1}^{N} a_{pl} x_l = Q_p, \tag{9}$$

где N — число полученных комбинаций маршрутов;

$$a_{pl} \begin{cases} 1, & \text{когда } l\text{-й маршрут проходит через } p\text{-й груз,} \\ 0, & \text{когда } l\text{-й маршрут не проходит через } p\text{-й груз,} \end{cases}$$

$$x_l \geqslant 0 \tag{10}$$

и достигалось оптимальное значение целевой функции

$$\sum_{l=1}^{N} \beta_l b_l x_l = Z \max. \tag{11}$$

Поступила в редакцию
13 V 1965