

О l -АДИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ С МОДУЛЯРНЫМИ ФОРМАМИ ¹⁾

П. Делинь

§ А. Изогении

Определение. Категория эллиптических кривых с точностью до изогении получается из категории эллиптических кривых при добавлении морфизмов обратных изогениям. Точнее:

а) эллиптическая кривая E определяет эллиптическую кривую с точностью до изогении, которую мы будем обозначать $E \otimes \mathbb{Q}$;

б) $\text{Hom}(E \otimes \mathbb{Q}, F \otimes \mathbb{Q}) = \text{Hom}(E, F) \otimes \mathbb{Q}$.

Следовательно, любой функтор F (эллиптические кривые) $\rightarrow (\dots)$, переводящий каждую изогению в изоморфизм, продолжается однозначно до функтора на категории эллиптических кривых с точностью до изогении.

Обозначения: $T_l(E) = \varprojlim E_n$ (если число l взаимно просто с характеристикой p поля определения k кривой E , то $T_l(E)$ является свободным модулем ранга 2 над кольцом $\mathbb{Z}_l$ целых l -адических чисел):

$$V_l(E) = T_l(E) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$$

(имеет смысл для эллиптической кривой с точностью до изогении).

$$\hat{T}_{p'}(E) = \varprojlim_{(p, n) = 1} E_n,$$

$$\hat{V}_{p'}(E) = \hat{T}_{p'}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

(является $A^{f, p'}$ $\prod_{l \neq p, \infty} \mathbb{Q}_l$ -модулем ранга два, имеющим смысл для эллиптической кривой, определенной с точностью до изогении).

$$\mathbb{Z}_l(1) = \varprojlim \mu_{l^{n'}},$$

$$\mathbb{Q}_l(1) = \mathbb{Z}_l(1) \otimes \mathbb{Q}_l,$$

$$(1) : \otimes \mathbb{Q}_l \text{ или } \mathbb{Z}_l.$$

Рассмотрим теперь функтор α из категории эллиптических кривых в категорию, содержащую один объект — целые числа, и морфизм которой являются умножениями на целые числа. Мы определим функтор α равенствами:

$$\begin{cases} \alpha(E) = \mathbb{Z}, \\ f: E \rightarrow F \sim \alpha(f): \alpha(E) \rightarrow \alpha(F) \text{ — умножение на } \deg f \\ (0, \text{ если } f = 0). \end{cases}$$

¹⁾ Deligne P., Sur les représentations l -adiques liées aux formes modulaires, Эти заметки присланы автором редактору перевода, апрель 1973.

Тогда

а) функтор $d(E) \otimes \mathbf{Q}$ определен на эллиптических кривых, заданных с точностью до изогении: положим $d(E \otimes \mathbf{Q}) = d(E) \otimes \mathbf{Q}$;

б) если E_0 — эллиптическая кривая с точностью до изогении, то e_n -спаривание Вейля позволяет нам определить канонический изоморфизм

$$\bigwedge^2 V_l(E_0) \simeq d(E_0) \otimes \mathbf{Q}_l(1).$$

В p : Пусть E — суперсингулярная эллиптическая кривая над полем характеристики p . Мы обозначим через $T_p(E)$ формальную группу кривой E (она является одномерной формальной группой высоты два). В этом случае существует следующий аналог функтора α :

а) для любой одномерной формальной группы высоты два обозначим через $d_p(F)$ одномерный модуль над кольцом $\mathbf{Z}_p$, состоящий из таких морфизмов $F \xrightarrow{u} F^*$ (F^* — это двойственная по Картье группа), что $u = -u$;

б) если $\tilde{F}/S$ — деформация формальной группы F над полным локальным кольцом S и $T_p(\tilde{F})$ — соответствующая локальная система на $S \otimes \mathbf{Z}_p \mathbf{Q}_p$, то

$$\bigwedge^2 T_p(\tilde{F}) \simeq d_p(F)(1);$$

в) если E — суперсингулярная эллиптическая кривая и $\hat{E}$ — соответствующая формальная группа, то $d(E) \otimes \mathbf{Z}_p = d_p(\hat{E})$.

Восстановление кривой E . Пусть E_0 — суперсингулярная эллиптическая кривая с точностью до изогении. Задание эллиптической кривой E вместе с изоморфизмом $E \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\sim} E_0$ определяет:

а) «решетку» $\hat{T}_{p'}(E)$ в $\hat{V}_{p'}(E_0)$;

б) «решетку» $d(E)$ в $d(E_0)$ (p — аспект этой решетки определен уже заданием решетки п. а):

$$d(E) \otimes \mathbf{Z}_l(1) \simeq \bigwedge^2 T_l(E) \subset \bigwedge^2 V_l(E) = d(E_0) \otimes \mathbf{Q}_l(1).$$

Лемма 1. Если E_0 — суперсингулярная кривая, то задание решеток $\hat{T}_{p'}(E) \subset \hat{V}_{p'}(E_0)$ и $d(E) \otimes \mathbf{Z}_p \subset d(E_0) \otimes \mathbf{Q}_p$ однозначно определяет пару (E, β) . (При этом для любого задания этих решеток соответствующая пара (E, β) существует.)

Причина, по которой не требуется никакой другой информации на p , заключается в том, что любая изогения степени p^l кривой E имеет вид $E \rightarrow E^{(p^l)}$.

В а р и а н т. Пусть F_0 — одномерная формальная группа высоты 2, заданная с точностью до изогении. Тогда для задания формальной группы F , определяющей F_0 , достаточно задать «решетку»

$$d_p(F) \subset d_p(F_0), \\ (\sim \mathbf{Z}_p) (\sim \mathbf{Q}_p).$$

§ Б. Основная локальная конструкция

Обозначим через $\overline{\mathbf{Q}}_p$ алгебраическое замыкание поля $\mathbf{Q}_p$, через $\overline{F}_p$ — алгебраическое замыкание поля F_p , рассматриваемое как поле вычетов поля $\overline{\mathbf{Q}}_p$, через k — алгебраическое замыкание поля F_p , снабженное

множеством допустимых изоморфизмов $k \simeq \mathbf{F}_p$, образующих один класс по модулю целых степеней Фробениуса. Этот класс мы будем обозначать через $\text{Isom}(k, \mathbf{F}_p)$. Далее, обозначим через V_0 2-мерное векторное пространство над полем $\mathbf{Q}_p$, через E_0 — суперсингулярную эллиптическую кривую над полем k , заданную с точностью до изогении, и через F_0 — формальную группу с точностью до изогении, соответствующую кривой E_0 .

Для того чтобы иметь возможность производить „замену структуры“, мы не будем отождествлять k с $\bar{\mathbf{F}}_p$ и V_0 с $\mathbf{Q}_p^2$.

1. Первая конструкция. Пусть

$$\sigma \in \text{Isom}(k, \bar{\mathbf{F}}_p) \text{ и } \beta \in \text{Isom}(d(E_0) \otimes \mathbf{Q}_p(1), \bigwedge^2 V_0).$$

Здесь $\mathbf{Q}_p(1)$ строится по $\bar{\mathbf{Q}}_p$:

$$\mathbf{Q}_p(1) = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \left(\varprojlim_n (\text{группа корней степени } p^n \text{ в } \bar{\mathbf{Q}}_p) \right).$$

Задание σ и β определяет пару $E_0(\sigma, \beta) = (\sigma(E_0), \sigma(\beta))$, где $\sigma(E_0)$ — это эллиптическая кривая с точностью до изогении над полем $\bar{\mathbf{F}}_p$, $\sigma(\beta)$ — это изоморфизм одномерных векторных $\mathbf{Q}_p$ -пространств:

$$d(\sigma(E_0)) \otimes \mathbf{Q}_p(1) \stackrel{\sigma}{=} d(E_0) \otimes \mathbf{Q}_p(1) \simeq \bigwedge^2 V_0.$$

Обозначим через φ подстановку Фробениуса: $\varphi: x \rightarrow x^p: k \rightarrow k$. Тогда для любой эллиптической кривой E/k кривая $\varphi(E)$ изоморфна $E^{(p)}$ и, следовательно, определена изогения Фробениуса

$$F: E \rightarrow E^{(p)}.$$

При этом диаграмма

$$\begin{array}{ccc} d(E) & \xleftrightarrow{\varphi} & d(E^{(p)}) \\ \parallel & \searrow \scriptstyle p & \parallel \\ d(E) & \xrightarrow{F} & d(E^{(p)}) \end{array}$$

коммутативна. В частности, F определяет изоморфизм $F: E_0 \xrightarrow{\varphi} E_0$ и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} d(E_0) & \xleftrightarrow{\quad} & d(\varphi(E_0)) \\ \parallel & & \downarrow \scriptstyle p \\ d(E_0) & \xrightarrow{F} & d(\varphi(E_0)) \end{array}$$

коммутативна. Следовательно, F индуцирует изоморфизм

$$F \text{ или } \sigma F: (\sigma(E_0), \sigma(p)) \xrightarrow{\sim} (\sigma\varphi(E_0), \sigma(p^{-1}\beta)). \quad (1)$$

Определение. Обозначим через D_p одномерное векторное пространство над полем $\mathbf{Q}_p$, являющееся фактором

$$\text{Isom}(k, \bar{\mathbf{F}}_p) \times \text{Isom}(d(E_0) \otimes \mathbf{Q}_p(1), \bigwedge^2 V_0)$$

по соотношению эквивалентности $(\sigma, \beta) \sim (\sigma\varphi^k, p^{-k}\beta)$ для всех $k \in \mathbf{Z}$.

Изоморфизм (1) определяет изоморфизм между парами $E_0(\sigma, \beta)$ и $E_0(\sigma', \beta')$ в случае, когда $(\sigma, \beta) \sim (\sigma', \beta')$. Так как эти изоморфизмы образуют транзитивную систему, то мы можем определить пару $(E_0(\delta), \beta(\delta))$ по $\delta \in D_p$, где $E_0(\delta)$ это (суперсингулярная) эллиптическая кривая с точностью до изогении над полем F_p , а $\beta(\delta)$ является изоморфизмом одномерных пространств: $\beta(\delta): d(E_0(\delta)) \otimes Q_p(1) \xrightarrow{\sim} \bigwedge^2 V_0$.

Замечание. 1. Следующие группы действуют на D_l (при помощи „замен структуры“):

а) группа $W(\overline{Q}_p/Q_p)$, которая действует и на $\text{Hom}(k, \overline{F}_p)$ и на $Q_p(1)$. Обозначим через $\mathcal{d}$ изоморфизм $\mathcal{d}: W(\overline{Q}_p/Q_p)^{ab} \xrightarrow{\sim} Q_p^*$, нормализованный так, что Фробениусу отвечает элемент, обратный к униформирующему параметру. Тогда $\sigma\delta = \mathcal{d}(\sigma)^{-1}\delta$.

б) группа $GL(V_0)$ с помощью действия на $\bigwedge^2 V_0$. При этом $g \cdot \delta = \deg(g)\delta$.

в) группа $\text{Aut}(E_0)$ при помощи действия на $\alpha(E_0)$.

Положим $H = \text{Aut}(E_0)$. Тогда группа H является мультипликативной группой алгебры кватернионов, разветвленной лишь в точках p и ∞ . При этом $g \cdot \delta = \text{Nrm}(g)^{-1} \cdot \delta$ (приведенная норма).

Замечание 2. Если мы зафиксируем решетку $\bigwedge \approx \mathbf{Z}_p$ в $\bigwedge^2 V_0$, то пара $(E_0, \beta)/F_p$ определяет эллиптическую кривую с точностью до p' -изогении. Под p' -изогенией мы понимаем изогению степени взаимно простой с p . (См. лемму 1 § A.)

1. **Вариант.** Рассмотрим теперь F_0 вместо E_0 . Множество D_p определим так же, как и раньше, используя $d_p(F_0)$ вместо $d(E_0) \otimes Q_p$. Теперь на пространстве D_p действуют группы $W(\overline{Q}_p/Q_p)$, $GL(V_0)$ и $\text{Aut}(F_0) \simeq H(Q_p)$ по тем же формулам, что и раньше.

Точка $\delta \in D_p$ определяет

$F_0(\sigma)$ (суперсингулярный) формальный групповой закон с точностью до изогении над $\overline{F}_p$.

$$\beta(\delta): d_p(F_0(\delta)) \otimes Q_p(1) \xrightarrow{\sim} \bigwedge^2 V_0.$$

Если зафиксировать решетку Λ в $\bigwedge^2 V_0$, то

$F(\delta)$: (суперсингулярная) формальная группа над $\overline{F}_l$,

$$\beta(\delta): d_p(F(\delta)) \otimes \mathbf{Z}_l(1) \xrightarrow{\sim} \Lambda.$$

2. Вторая конструкция. Я сейчас определяю „многообразие исчезающих циклов“ и группу исчезающих циклов. При этом для любой компактной открытой подгруппы $K^0 \subset SL(2, V_0)$ и точки $\delta \in D_p$ будет определена схема $V(K^0, \delta)$ над полем $\overline{Q}_p$. Далее, для любой открытой компактной подгруппы $K \subset GL(2, V_0)$, такой, что $K^0 = K \cap SL(2, V_0)$, и элемента $\alpha \in \det K \subset \mathbf{Z}_p^*$ будет определен изоморфизм

$$V(K^0, \delta) \xleftrightarrow{(K)} V(K^0, \alpha\delta).$$

При переменном δ схемы образуют «локальную систему» схем над D_p . $V(K_0, \delta)$ не являются схемами конечного типа, но они похожи на схемы,

обычно встречающиеся в теории исчезающих циклов. Хотя в дальнейшем нам нигде и не потребуется, мы приведем сейчас описание множества $\overline{\mathbf{Q}}_p$ -значных точек схемы $V(K_0, \delta)$:

- а) зная δ , мы знаем пару $(E_0(\delta), \beta(\delta))$ над $\overline{\mathbf{F}}_p$;
- б) точка схемы $V(K_0, \delta)$ является классом изоморфизма системы, состоящей из
- в) эллиптической кривой E с точностью до изогении над $\mathbf{Q}_p: E$,
- г) изоморфизма $\alpha: V_p(E) \xrightarrow{\sim} V^0$, заданного mod K^0 ,
- д) изоморфизма редукции кривой E с $E_0(\delta)$ $\psi: E|_{\mathbf{F}_p} = E_0(\delta)$, такого, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^2 V_p(E) & \xrightarrow{\bigwedge^2 \alpha} & \bigwedge^2 V_0 \\ \parallel & & \uparrow \beta(\delta) \\ d(E)(1) & \xrightarrow{\psi} & d(E_0(\delta))(1) \end{array}$$

коммутативна.

Если, как и раньше, K — это открытая компактная подгруппа в $GL(V_0)$, такая, что $K^0 = K \cap SL(V_0)$, то можно считать, что изоморфизм α определен mod K и при этом диаграмма коммутативна только mod $\det(K)$.

Для того чтобы построить схему $V(K, \delta)$, начнем со следующих объектов:

компактной открытой подгруппы K в $GL(V_0)$;

суперсингулярной кривой E_0 с точностью до изогении над $\overline{\mathbf{F}}_p$;

$\beta: d(E_0) \otimes \mathbf{Q}_p(1) \xrightarrow{\sim} \bigwedge^2 V_0$;

$\overline{\beta}: \beta \bmod \det(K) \subset \mathbf{Z}_p^*$ (только $\overline{\beta}$, а не β будет использоваться далее).

При конструкции мы будем также использовать следующий вспомогательный объект:

K -стабильную решетку L в V_0 .

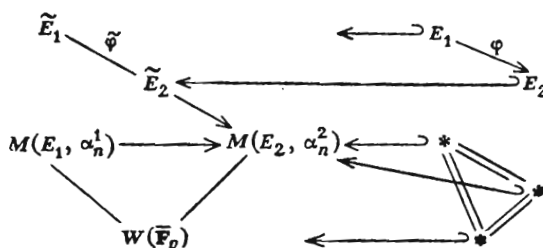
а) Решетка $\beta^{-1}(\bigwedge^2 L)(-1)$ в $d(E_0) \otimes \mathbf{Q}_p$ определяет с точностью до p' -изогении эллиптическую кривую E , такую, что $E' \otimes \mathbf{Q} \simeq E_0$.

Зафиксируем теперь эллиптическую кривую E вместе со структурой точек n -го порядка на E ($n \geq 3$, $n, p = 1$), такую, что $E \otimes \mathbf{Z}_p = E'$. (Мы потом покажем, что конструкция не зависит от выбора L , E' , E , α_n .) Обозначим через M_n схему модулей для эллиптических кривых вместе со структурой уровня n и через $e \in M_n(\overline{\mathbf{F}}_p)$ точку, соответствующую паре (E, α_n) .

б) Определение. Обозначим через $M(E, \alpha_n)$ спектр гензелизации локального кольца схемы $M_n \otimes_{\mathbf{Z}} W(\mathbf{F}_p)$ в точке e .

в) Пополнение локального кольца схемы $M(E, \alpha_n)$ изоморфно $W(\overline{\mathbf{F}}_p)[[t]]$.

г) Пусть $(E_1, \alpha_n^1), (E_2, \alpha_n^2)$ — две пары (эллиптическая кривая, структура уровня n на ней) и $\varphi: E_1 \rightarrow E_2$ — p -изогения. Тогда существует единственный изоморфизм $\overline{\varphi}: M(E_1, \alpha_n^1) \rightarrow M(E_2, \alpha_n^2)$, такой, что следующая диаграмма коммутативна:



В этой диаграмме мы обозначили звездочкой $\text{Spec}(\bar{F}_p)$ (точка), а $\tilde{E}_1$ и $\tilde{E}_2$ — прообразы на $M(E_1, \alpha_n^1)$ и $M(E_2, \alpha_n^2)$ универсальной кривой над M_n .

Быть может, лучше сказать, что $M(E_1, \alpha_n^1)$ является пространством параметров для универсальной деформации эллиптической кривой с точностью до p -изогении $E'/\bar{F}_p$ (универсальной по отношению к деформациям над локальными гензелевыми $W(\bar{F}_p)$ -алгебрами). Поэтому можно писать $M(E')$ вместо $M(E_1, \alpha_n^1)$ и обозначать через $\tilde{E}'$ эллиптическую кривую с точностью до p' -изогении над $M(E')$, определяемую по E_1 .

Если число n достаточно велико, то подгруппа $K \subset GL(L)$ является прообразом некоторой подгруппы $\bar{K} \subset GL(L/p^n L)$.

Обозначим через $K(\bar{F}_p)$ поле отношений кольца $W(\bar{F}_p)$ и через $\bar{L}_p$ кольцо целых в $\bar{Q}_p$. Групповая схема E'_{p^n} над $M(E')$ становится над $M(E') \otimes K(\bar{F}_p)$ конечным этальным накрытием. Следовательно, схема

$$\text{Isom}(E'_{p^n}, L/p^n L)$$

является конечным накрытием Галуа над $M(E') \otimes K(\bar{F}_p)$ с группой Галуа $GL(L/p^n L)$. Рассмотрим теперь схему

$$\text{Isom}_{M(E') \otimes \bar{Q}_p}(E'_{p^n}, L/p^n L).$$

Она является несвязным накрытием над $M(E') \otimes \bar{Q}_p$. Ее кусок можно выделить следующим способом: с помощью β можно отождествить

$$\bigwedge^2 E'_{p^n} = \alpha(E')_p \otimes \mathbb{Z}/p^n(1) \subset \bigwedge^2 L/p^n L$$

и рассмотреть только изоморфизмы с „детерминантом единица“. Аналогично можно с помощью $\bar{\beta}$ выделить связный кусок в накрытии

$$K \setminus \text{Isom}_{M(E') \otimes \bar{Q}_p}(E'_{p^n}, L/p^n L).$$

Мы обозначим построенную схему через $V_L(K, E_0, \beta)$. Ее можно также представить как фактор выделенного куска схемы $\text{Isom}_{M(E')}(E'_{p^n}, L/p^n L) \oplus_{W(\bar{F}_p)} \bar{Q}_p$ по группе $K \cap SL(L/p^n L)$.

Резюме. Схема $V_L(K, E_0, \beta)$ зависит от открытой компактной подгруппы $K \subset GL(V_0)$, эллиптической кривой E_0 над $\bar{F}_p$ с точностью до изогении, отображения $\beta: \alpha(E') \otimes Q_p(1) \xrightarrow{\sim} \bigwedge^2 V_0$ и K -инвариантной решетки L в V_0 . При этом она зависит не от самого β , а только от $\bar{\beta} = \beta \bmod \det(K)$. При $K' \subset K$ определено отображение

$$V_L(K', E_0, \beta) \rightarrow V_L(K, E', \beta).$$

Схема $V_L(K, E_0, \beta)$ не зависит от L .

Более того, система, состоящая из

$$\left\{ \begin{array}{l} V_L(K, E_0, \beta), \\ \text{эллиптической кривой с точностью до изогении } \tilde{E}'_0 \\ \text{над } V_L(K, E_0, \beta), \\ \text{унимодулярного морфизма } \alpha, \text{ заданного mod } K \\ V_p(\tilde{E}'_0) \rightarrow V_0 \text{ (получающегося из } \bar{\alpha}: \tilde{E}'_p \simeq L/p^n L \text{ или} \\ \bar{\alpha}: T_p(\tilde{E}') \simeq L \bmod K), \end{array} \right.$$

не зависит от L .

Пусть L_1 и L_2 — две K -инвариантные решетки и E_1, E_2 — соответствующие эллиптические кривые с точностью до P -изогении над $\bar{F}_p$. Мы сейчас построим изоморфизм

$$\begin{array}{ccc} K \backslash \text{Isom}_{M(E_1)} \otimes K(\bar{F}_p) \left(\begin{array}{cc} V_p(\tilde{E}_1), & V_0 \\ \cup & \cup \\ T_p(\tilde{E}_1) & L_1 \end{array} \right) & \longleftrightarrow & K \backslash \text{Isom}_{M(E_2)} \otimes K(\bar{F}_p) \left(\begin{array}{cc} V_p(\tilde{E}_2), & V_0 \\ \cup & \cup \\ T_p(\tilde{E}_2) & L_2 \end{array} \right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M(E_1) & & M(E_2) \end{array}$$

Предположим, для простоты, что $L_1 \subset L_2$. Тогда в кривой $\tilde{E}_1$ над схемой $K \backslash \text{Isom}_{M(E_1)} \dots$ определена подгруппа, изоморфная L_2/L_1 ; обозначим ее через H . Обозначим через $\bar{W}_1(K, E_0, \beta)$ нормализатор схемы $M(E_1)$ в $K \backslash \text{Isom} \dots$. Используя нормальность $\bar{W}_1$ и тот факт, что на эллиптической кривой существует лишь конечное число групповых подсхем данного порядка, можно показать, что групповая подсхема H кривой $\tilde{E}_1$ над $\bar{W}_1(K, E_0, \beta) \otimes K(\bar{F}_p)$ продолжается до групповой подсхемы кривой E_1 над $\bar{W}_1(K, E_0, \beta)$; обозначим ее тоже через H .

Факторсхема является деформацией кривой E_2 , и, следовательно, существует отображение

$$\bar{W}_1(K, E_0, \beta) \rightarrow M(E_2).$$

Заметим теперь, что $V_p(\tilde{E}_1/H) = V_p(\tilde{E}_1)$ и что изоморфизм $\alpha, \alpha: V_p(\tilde{E}_1) \rightarrow V_0$, определенный над схемой V_1 и переводящий $Z_p(\tilde{E}_1)$ в L_1 , переводит $T_p(\tilde{E}_1/H)$ в L_2 . Определим схему $\bar{W}_2$ аналогично. Тогда существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K \backslash \text{Isom}_{M(E_1)} \otimes K(\bar{F}_p) \left(\begin{array}{cc} V_p(\tilde{E}_1), & V_0 \\ \cup & \cup \\ T_p(\tilde{E}_1), & L_1 \end{array} \right) & \dashrightarrow & K \backslash \text{Isom}_{M(E_2)} \otimes K(\bar{F}_p) \left(\begin{array}{cc} V_p(\tilde{E}_2), & V_0 \\ \cup & \cup \\ T_p(\tilde{E}_2), & L_2 \end{array} \right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{W}_1 & \dashrightarrow & \bar{W}_2 \\ \downarrow & \nearrow \tilde{E}_1/H & \downarrow \\ M(E_1) & & M(E_2) \end{array}$$

в которой пунктирные стрелки восстанавливаются однозначно. Требуемый изоморфизм построен.

Расширив поле констант до $\overline{\mathbf{Q}}_p$, мы можем, как и раньше, выделить подсхему V_1 . Таким образом, мы показали, что подсхема V_1 не зависит от L_2 . Для $\delta \in D_p$ положим

$$V(K, \delta) = V_L(K, E_0(\delta), \beta(\delta)).$$

Резюме. Схема $V(K, \delta)$ определена над $\overline{\mathbf{Q}}_p$. Она зависит от выбора открытой компактной подгруппы $K \subset GL(V_0)$ и точки $\delta \in D_p$ по модулю элементов из $\det(K) \subset \mathbf{Z}_p^*$. При уменьшении подгрупп K схемы образуют проективную систему. Над $V(K, \delta)$ определена эллиптическая кривая с точностью до изогении $\tilde{E}$ и задан изоморфизм $\text{mod } K: \alpha: V_p(\tilde{E}) \xrightarrow{\sim} V_0$. В некотором смысле кривая $\tilde{E}$ является деформацией кривой $E_0(\delta)$, например $\alpha(E_0(\delta)) = d(\tilde{E})$. Изоморфизм α совместим с $\beta(\delta)$:

$$\bigwedge^2 V_p(\tilde{E}) = \alpha(E_0(\delta)) \otimes \mathbf{Q}_p(1) \xrightarrow[\beta(\delta)]{\det \alpha} \bigwedge^2 (V_0) \pmod{\det K}.$$

На самом деле утверждение о том, что $\tilde{E}$ является деформацией кривой E_0 , можно превратить в точное утверждение, рассмотрев подходящую схему $\tilde{E}/\overline{V}(K, \delta)/\overline{\mathbf{Z}}_p$.

Вариант. Рассматривая F_0 вместо E_0 , можно построить аналог схемы $V(K, \delta)$, назовем его $\hat{V}(K, \delta)$, который является спектром полного локального кольца (вместо локального гензелевого кольца).

3. Третья конструкция. Мы будем рассматривать группу l -адических когомологий

$$H^1(V(K, \delta), \mathbf{Q}_l).$$

Эта группа является конечномерным пространством и локально постоянна, как функция от δ (так же как сама схема $V(K, \delta)$). Ясно, что для любой нормальной подгруппы $K' \subset K$ имеет место изоморфизм

$$H^1(V(K, \delta), \mathbf{Q}_l) = H^1(V(K', \delta), \mathbf{Q}_l)^{K \cap SL(V_0)/K' \cap SL(V_0)}$$

(напомним, что схема $V(K, \delta)$ зависит только от точки δ и пересечения $K \cap SL(V_0)$).

Локальным фундаментальным объектом назовем „пучок“ κ/D_p , для которого

$$\kappa_\delta = \varinjlim_k H^1(V(K, \delta), \mathbf{Q}_l).$$

Определим понятие „локально постоянных сечений пучка κ_δ/D_p “; ими являются функции $\varphi(\delta) (\delta \in D_p, \varphi(\delta) \in \kappa_\delta)$, такие, что $\varphi(\delta)$ локально лежит в $H^1(V(K, \delta), \mathbf{Q})$ и является локально постоянной функцией. Пространство локально постоянных сечений мы обозначим через $\Gamma(D_p, \kappa)$.

На локальном фундаментальном объекте действуют с „помощью замены структуры“ следующие группы:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } W(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \\ \text{б) } GL(V_0) \\ \text{в) } \text{Aut}(E_0) = H \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Их действие на } D_p \\ \text{было описано ранее.} \end{array}$$

При этом группы $W(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ и $GL(V_0)$ действуют непрерывно

Предложение. Действие группы $\text{Aut}(E_0)$ продолжается до непрерывного действия группы $H(\mathbf{Q}_p)$ на $\mathfrak{X}/D_p$.

Я не знаю удовлетворительного доказательства этого предложения. Я рассматриваю введенную ранее схему $\bar{W}$ и выражаю $\mathfrak{X}$ в терминах специального слоя стабильной модели $\bar{W}$ над некоторым разветвленным накрытием схемы $W(\bar{F}_p)$.

Для того чтобы поверить в справедливость этого предложения, можно рассуждать следующим образом. Когомологии схем $V(K, \delta)$ и $\hat{V}(K, \delta)$ канонически изоморфны, при этом группа $\text{Aut}(F_0) = H(\mathbf{Q}_p)$ действует на $V(K, \delta)$ и, следовательно, на пространстве $H^1(V(K, \delta), \mathbf{Q}_l)$. Было бы весьма удивительно, если бы это действие не было непрерывным.

Формулировка локального результата. Нам будет проще работать не с $\mathbf{Q}_l$ -когомологиями, а с $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -когомологиями, получаемыми тензорным умножением на $\bar{\mathbf{Q}}_l$ над $\mathbf{Q}_l$. Для сокращения обозначений мы опять обозначим через $\mathfrak{X}/D_p$ «допустимый» пучок над D_p со слоем

$$\mathfrak{X}_\delta = \lim_{\overrightarrow{K}} H^1(V(K, \delta), \mathbf{Q}_l) \otimes_{\mathbf{Q}_l} \bar{\mathbf{Q}}_l.$$

В группе $W(\bar{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, $GL(V_0)$ и $H(\mathbf{Q}_p)$ допустимо действуют на $\mathfrak{X}/D_p$. Их действие на D_p мы описали ранее. Ясно, что действия этих групп коммутируют между собой. Если $a \in \mathbf{Q}_p^*$, то действия элементов $a \in GL(V_0)$ и $a \in H(\mathbf{Q}_p)$ обратны друг другу. Если зафиксировать точку $\delta_0 \in D_p$, то сказанное ранее можно выразить следующим способом:

А) подгруппа в группе $W(\bar{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \times GL(V_0) \times H(\mathbf{Q}_p)$, состоящая из таких элементов (σ, g, h) , что $d(\sigma)^{-1} \det g \cdot \text{Nrm}(h)^{-1} = 1$ действует на $\mathfrak{X}_{\delta_0}$.

Б) подгруппа, состоящая из элементов $(1, a, a)$, действует тривиально.

Для того чтобы описать действие групп на схеме $V(K, \delta)/D_p$, удобно представлять себе точку $\lim V(K, \delta)/D_p$ как набор, состоящий из:

$$\delta \in D_p,$$

E — эллиптической кривой с точностью до изогении над $\bar{\mathbf{Q}}_p$,

отображений $\alpha: V_p(\tilde{E}) \xrightarrow{\sim} V_0$,

ψ , «отображения специализации» $\tilde{E} \xrightarrow{\psi} \delta(E_0)$,

таких, что отображения α , ψ и $\beta(\delta)$ совместимы.

Пусть $\chi: \mathbf{Q}_p^* \rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ — квазихарактер (с открытым ядром).

Обозначим через

$\Gamma(D_p, \mathfrak{X})$ пространство, состоящее из локально-постоянных сечений пучка $\mathfrak{X}/D_p$,

$\Gamma_\chi(D_p, \mathfrak{X})$ подпространство, состоящее из таких сечений, что для любого элемента $a \in \mathbf{Q}_p^*$ имеет место равенство

$$z(a) \cdot f = \chi(a) \cdot f,$$

т. е.

$$z(a) f(\delta) = \chi(a) f(a^2 \delta),$$

где $z(a)$ — это образ элемента a в центре группы $GL(V_0)$.

Теорема. (i) Пространство $\Gamma_\chi(D_p, \chi)$ является прямой суммой тензорных произведений

$$\Gamma_\chi(D_p, \chi) = \bigoplus_{\varphi \in \Phi} V_\varphi \otimes V'_\varphi \otimes W_\varphi, \text{ где}$$

(а) V_φ является допустимым неприводимым представлением группы $GL(V_0)$, центр группы $GL(V_0)$ действует по характеру χ и представление V_φ принадлежит дискретной серии (т. е. является специальным или суперкаспидальным представлением);

(б) V'_φ является допустимым неприводимым (конечномерным) представлением группы $H(\mathbb{Q}_p)$, причем ее центр действует по характеру χ^{-1} ;

(г) W_φ является двумерным (или одномерным) непрерывным $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -адическим представлением группы $W(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$. Если W_φ — двумерное представление, то группа $W(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ действует в пространстве $\bigwedge^2 W_\varphi$ по характеру χ . Если W_φ — одномерное представление, то действие $W(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ на пространстве $\bigwedge^2 (W_\varphi \oplus W_\varphi(1))$ опять-таки совпадает с χ .

(ii) V'_φ пробегает по одному разу все неприводимые представления группы $H(\mathbb{Q}_p)$ со значением на центре, равным χ^{-1} .

(iii) Представление V'_φ одномерно в том и только том случае, когда представление W_φ одномерно. При этом представление W_φ равно $\mu(\text{cl})$, если представление V'_φ задается характером $\mu(\text{Nrm})$, где cl , как и раньше, это характер $\text{cl}: W(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathbb{Q}_p^*$, осуществляющий изоморфизм теории полей классов. В этом и только этом случае V_φ является специальным представлением группы $GL(V_0)$.

(iv) Представление V_φ получается из V'_φ при помощи конструкции Вейля (подходящим образом нормализованной).

(v) Если представление V_φ соответствует квазихарактеру квадратичного расширения поля $\mathbb{Q}_p$, то (после некоторой нормализации) представление W_φ индуцировано тем же характером.

Если $p \neq 2$, то эта теорема дает нам полное описание пространства $\Gamma_\chi(D_p, \chi)$.

Замечание. Я не знаю локального доказательства этой теоремы.

Если μ — квазихарактер поля $\mathbb{Q}_p^*$ и $\delta_0 \in D_p$, то умножение на функцию $\mu(\delta\delta_0^{-1})$ на D_p индуцирует изоморфизм

$$\Gamma_\chi(D_p, \chi) \rightarrow \Gamma_{\chi\mu^{-2}}(D_p, \chi);$$

если представление $V_\varphi \otimes V'_\varphi \otimes W_\varphi$ входит в $\Gamma_\chi(D_p, \chi)$, то

$$(V_\varphi \otimes \mu^{-1} \det(g)) \otimes (V'_\varphi \otimes \mu \text{Nrm}) \otimes (W_\varphi \otimes \mu \text{cl})$$

входит в $\Gamma_{\chi\mu^{-2}}(D_p, \chi)$.

§ В. Глобальная теория

Обозначим через

K открытую компактную подгруппу в $GL(2, \mathbf{A}^f)$;

$X^\pm$ верхнюю и нижнюю полуплоскости Пуанкаре (объединение)

$$X^\pm = \text{Isom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{Z}^2 \otimes \mathbf{R}, \mathbf{C})/\mathbf{C}^* \subset \text{Hom}(\mathbf{Z}^2, \mathbf{C})/\mathbf{C}^*;$$

$(GL(2, \mathbf{R}))$ действует справа на $\mathbf{Z}^2 \otimes \mathbf{R}$ благодаря действию на $\mathbf{Z}^2 \otimes \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$;

$$M_K^0(\mathbf{C}) = K \setminus X^\pm \times GL(2, \mathbf{A}^f) GL(2, \mathbf{Q});$$

k — целое число ($k \geq 0$);

μ — представление sim^k (дуальное к обычному представлению группы $GL(2, \mathbf{Q})$);

${}^0F_\mu^{\mathbf{Q}}$ — соответствующая локальная система на $M_K^0(\mathbf{C})$;

$M_K(\mathbf{C})$ — компактификация Сатаке многообразия $M_K^0(\mathbf{C})$;

$j: M_K^0(\mathbf{C}) \rightarrow M_K(\mathbf{C})$; $F_\mu^{\mathbf{Q}}$ пучок $j_* {}^0F_\mu^{\mathbf{Q}}$ на $M_K(\mathbf{C})$;

$$\chi^{\mathbf{Q}}(\mu) = \varinjlim_K H^1(M_K(\mathbf{C}), F_\mu^{\mathbf{Q}})$$

(допустимое представление группы $GL(2, \mathbf{A}^f)$, определенное над $\mathbf{Q}$).

$$\chi^{\mathbf{C}}(\mu) = \chi(\mu) \otimes \mathbf{C}; \quad \chi(\mu)^{\mathbf{Q}_l} = \chi(\mu) \otimes \mathbf{Q}_l; \quad F_\mu^{\mathbf{Q}_l} = F_\mu \otimes \mathbf{Q}_l.$$

Имеет место разложение

$$\chi^{\mathbf{C}}(\mu) = \chi^{k+1,0} \oplus \chi^{0,k+1} \text{ пространства } \chi^{\mathbf{C}}$$

в сумму двух его комплексно сопряженных подпространств. Представление группы $GL(2, \mathbf{A}^f)$ в пространстве $\chi^{k+1,0}$ определено над $\mathbf{Q}$ и, следовательно, изоморфно представлению, комплексно сопряженному к представлению в пространстве $\chi^{0,k+1}$. Пространство $\chi^{k+1,0}$ соответствует пространству голоморфных модулярных каспидальных форм веса $k+2$ (заметим, что $k+2 \geq 2$!). Как известно, существует такое допустимое представление дискретной серии D_{k+2} группы $GL(2, \mathbf{R})$, что

$$\chi^{k+1,0} = \text{Hom}_{GL(2, \mathbf{R})}(D_{k+2}, L_0(GL(2, \mathbf{A})/GL(2, \mathbf{Q}))).$$

Далее, схемы $\{M_K(\mathbf{C})\}$ естественно определены над $\mathbf{Q}$ (вместе с $GL(2, \mathbf{A}^f)$ действием $M_K \cong M_{gKg^{-1}}$ и $F^{\mathbf{Q}_l}$ является l -адическим пучком, определенным над $\mathbf{Q}$. Следовательно, на пространстве $\chi^{\mathbf{Q}_l}(\mu)$ действует группа $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, коммутируя с действием группы $GL(2, \mathbf{A}^f)$, происходящим из „замены“ структур. Расширив поле скаляров с $\mathbf{Q}_l$ до $\overline{\mathbf{Q}}_l$, мы сможем записать разложение

$$\chi^{\mathbf{Q}_l}(\mu) = \bigoplus_{f \in F} \left(\bigotimes_p V_{f,p} \right) \otimes W_f,$$

где $V_{f,p}$ — неприводимое допустимое представление группы $GL(2, \mathbf{Q}_p)$ и W_f — двумерное представление группы $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ (мы обозначили через F пространство неприводимых представлений группы $GL(2, \mathbf{A})$, лежащих в $L_0(GL(2, \mathbf{A})/GL(2, \mathbf{Q}))$).

Из результатов Эйхлера — Шимуры — Куга — Делинья — Ихары — Пятецкого-Шапиро — Ленглендса следует, что в случае, когда $V_{f,p}$ является представлением основной серии, ограничение представления W_f на подгруппу $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ (подгруппы разложения) является прямой суммой двух соответствующих характеров группы $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$. Если

$V_{f,p}$ — специальное представление, то ограничение $W_f| \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ является соответствующим специальным представлением l -адическим представлением группы $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$.

Я сейчас докажу утверждение

(А) Если $V_{f,p}$ — суперкаспидальное представление, то ограничение $W_f| \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ является неприводимым двумерным представлением и, в обозначениях теоремы из § В, если $V_{f,p} \sim V_\varphi$, то $W_f \sim W_\varphi$.

(Следовательно, задание представления $V_{f,p}$ определяет с помощью локального правила представление $W_{f,p} = W_f| \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ и это правило совпадает с обычным (с точностью до нормализации), если представление $V_{f,p}$ получается с помощью конструкции Вейля из квазихарактера квадратичного расширения.)

Наше доказательство использует теорию исчезающих циклов, для того чтобы доказать, что построенное ниже пространство является фактором пространства $\kappa(\mu) \otimes \mathbf{Q}_l$ (это утверждение является точным, только если $k \neq 0$. Мы здесь не будем обращать внимание на случай $k = 0$ и на феномен, связанный со специальным представлением).

Мы сейчас будем пользоваться обозначениями, введенными в § Б, за исключением того, что мы положим $V_0 = \mathbf{Q}_p^2$. Рассмотрим множество

$$\text{Isom}(V_{p'}(E_0), (\mathbf{A}^{f,p'})^2) \times D_p$$

и правое действие группы H на нем (с помощью композиции на первом сомножителе и с помощью действия обратного к введенному ранее на D_p). Рассмотрим следующую эквивариантную локальную систему на этом пространстве:

$$\text{Sim}^k(V_l(E_0)^*) \otimes \varinjlim_{\vec{K}} V(K, \delta)$$

(на втором сомножителе надо рассматривать правое действие; для этого мы будем действовать операторами, обратными к введенным ранее). На этом пространстве + локальная система действует группа

$$GL(2, \mathbf{A}^f)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{пространство: композиция на первом сомножителе;} \\ \quad \text{определенное ранее действие на } D_p, \\ \text{\textit{I}-система: тривиально на первом сомножителе; опре-} \\ \quad \text{деленное ранее действие на втором.} \end{array} \right.$$

Рассмотрим теперь представление группы $GL(2, \mathbf{A}^f)$ в пространстве

$$H^0 \left(\begin{array}{c} \text{локальная система } \text{Sim}^k(V_l(E_0)^*) \otimes \varinjlim_{\vec{K}} V(K, \delta) \\ \text{на} \\ \text{Isom}(V_{p'}(E_0), \mathbf{A}^{f,p'}) \times D_p \end{array} \right) / H$$

На этом пространстве действует также группа $W(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ с помощью действия на $V(K, \delta)/D_p$.

Теперь мы свяжем представление в пространстве H^0 со спектром в $H(\mathbf{A})/H(\mathbf{Q})$ и в $\Gamma(D_p, \kappa)$.

Для простоты расширим поле скаляров с $\mathbf{Q}_l$ до $\mathbf{C}$ (для того чтобы не потерять при этом действия группы Галуа, я должен был бы проверить, что она действует непрерывно относительно дискретной топо-

логии в $\mathbf{Q}_l$, что не очень трудно сделать). Зафиксируем теперь изоморфизм

$V_{p'}(E_0) \simeq A^{f'^2}$ и, следовательно,

$$H(\mathbf{Q}_l) \simeq GL(2, \mathbf{Q}_l) \quad (l \neq p).$$

Тогда

$$H^0 = \{\text{функции } H(A^{f,p}) \rightarrow \text{Sim}^k(*) \otimes \Gamma(D_p, \chi),$$

такие, что $f(x\gamma) = f(x)\gamma\}$, $\gamma \in H(\mathbf{Q}) =$

$$= \{\text{функции } H(\mathbf{A}) \rightarrow \text{Sim}^k(*) \otimes \Gamma(D_p, \chi),$$

такие, что

$$f(x\gamma) = f(x), \quad f(g_\infty g_p x) = g_\infty g_p f(x) \} = \bigoplus_{(\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^*)^\wedge} \{ \quad \}_\chi =$$

$$= \bigoplus_{(\chi_\infty = \dots)} \text{Hom}_{H(\mathbf{R}) \times H(\mathbf{Q}_p)} (\text{Sim}^k(*) \otimes_{\chi_p} \Gamma_{-1}(D_p, \chi)^\vee, L_0^\chi(H(\mathbf{A})/H(\mathbf{Q}))).$$

Полученный результат можно выразить так: в пространстве $L^0(H(\mathbf{A})/H(\mathbf{Q}))$ надо выбрать те элементы, которые меняются по данному неприводимому (конечномерному) представлению группы $\mathbf{H}(\mathbf{R})$. Полученное представление группы $H(\mathbf{A}^f)$ можно записать следующим образом:

$$\bigoplus_{f_0 \in F_0} (\bigotimes_p V_{f_0, p}).$$

Можно показать, что следующее представление входит в $\chi(\mu)$:

$$\bigoplus_{f_0 \in F} (\bigotimes_{l \neq p} V_{f_0, l}) \otimes \bigoplus_{V_\varphi \sim V_{f_0, p}} (V_\varphi \otimes W_\varphi)!$$

Используя теперь результаты § 16 книжки Жак — Ленглендса и тот факт, что суперкаспидальное представление не может встретиться вне $\chi(\mu)$ (этот факт вытекает из результатов Пятецкого-Шапиро или Ленглендса + теория исчезающих циклов), мы получаем утверждения (I), (α), (β), (II), (III) теоремы и двумерность в (I)γ.

Кроме того, мы получаем утверждение (A). Проводя изложенные построения для случая L -функций, связанной с характерами Гекке мнимого квадратичного поля (и используя замечание в п. В), мы получаем утверждение (v). Для доказательства той части утверждения (I)γ в характеристике 2, которая не содержится в (v), требуются совсем другие идеи, которые я не буду здесь приводить.

Следствие 1. Пусть E — эллиптическая кривая над $\mathbf{Q}$, которая входит прямым слагаемым (с точностью до изогении) в якобиан модулярной кривой и соответствует новой форме ω_E . Тогда, за исключением, быть может, степеней числа 2, кондукторы E и ω_E совпадают. В 2 мы получаем только, что $2 \mid f_E \Leftrightarrow 2 \mid f_{\omega_E}$.

Следствие 2. (Кассельман — Морита.) Пусть H — это кватернионная алгебра над $\mathbf{Q}$, расщепимая в ∞ , p — простое число, в котором алгебра H разветвлена, Θ — порядок в H и $M = X/\Theta^*$ (где $X \oplus$ — это верхняя полуплоскость Пуанкаре). Тогда неприводимые компоненты редукции $M \bmod p$ рациональны. (Кривая M может быть определена над циклотомическим полем, не разветвленным в p .)