

בחינה לדוגמה בתורת המספרים

המורה: מיכאל בורובוי

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו פרט למחשבון

משך הבחינה: שלוש שעות

ענו על כל השאלות

1. (10 נקודות) מצאו את כל הפתרונות השלמים למשוואה $11x - 8y = 3$.

2. (15 נקודות) יהי $n \geq 2$ מספר שלם, ונניח ש- $p = 2^n + 1$ הוא מספר ראשוני. הראו ש-3 הוא שורש פרימיטיבי מודולו p .

3. (15 נקודות) מצאו את כל הראשוניים p עבורם יש פתרונות לקונגרואנציה $x^2 - 2x + 8 \equiv 0 \pmod{p}$.

4. (15 נקודות) יהי p מספר ראשוני אי-זוגי. הראו ש- $\gcd(p!, (p-1)! - 1) = 1$.

5. (15 נקודות) מצאו את כל נקודות הרציונליות על ההיפרבולה $x^2 - 7y^2 = 1$.

6. (15 נקודות) הוכיחו את משפט פרמה: כל מספר ראשוני מהצורה $4k + 1$ אפשר לכתוב כ- $p = x^2 + y^2$ כאשר x ו- y מספרים שלמים.

7. (15 נקודות) הוכיחו (בלי להשתמש במשפט דיריכלה) שיש אינסוף ראשוניים מהצורה $6k + 5$ כאשר k שלם.

בהצלחה!