

Diplomarbeit

Sphärische Einbettungen von
 $SL(n)/SL(n - 1)$

GIULIANO GAGLIARDI

Tübingen, den 14. Dezember 2011

betreut von Prof. Dr. Victor Batyrev an der
Eberhard-Karls-Universität Tübingen

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst zu haben und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Tübingen, den 14. Dezember 2011
Ort, Datum

_____ Giuliano Gagliardi

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Symboltabelle	3
1 Algebraische Gruppen	5
1.1 Grundlagen	5
1.2 Gruppenwirkungen	6
1.3 Reduktive Gruppen und Boreluntergruppen	8
1.4 Der homogene Raum $SL(n)/SL(n-1)$, $n \geq 3$	9
2 Sphärische Varietäten	15
2.1 Grundlagen	15
2.2 Diskrete Valuationen und der Vektorraum V	16
2.3 Klassifikation der Einbettungen	20
2.4 Illustrationen	22
3 Quotienten und torische Varietäten	27
3.1 Quotienten	27
3.2 Torische Varietäten	30
4 Konstruktion der sphärischen Einbettungen von $SL(n)/SL(n-1)$	35
4.1 Transformation des gefärbten Fächers	36
4.2 Der gute Quotient	39
4.3 Die invarianten Primdivisoren	43
4.4 Die Bahnen	45
5 Beispiele	47

Einleitung

Möchte man eine Klasse von Objekten genauer verstehen, so kann ein entscheidender Fortschritt darin liegen, eine Äquivalenz zu einer anderen Klasse von Objekten zu finden, die sich leichter studieren lässt. Ein berühmtes Beispiel ist die Korrespondenz zwischen den Zwischenkörpern einer Körpererweiterung und den Untergruppen ihrer Galoisgruppe.

Auch in der algebraischen Geometrie gibt es ein bekanntes Beispiel: Eine irreduzible Varietät X mit $(\mathbb{C}^*)^n \subseteq X$ offen und auf ganz X fortgesetzter $(\mathbb{C}^*)^n$ -Wirkung heißt *torisch*. Eine bijektive Korrespondenz besteht nun zwischen den Einbettungen

$$(\mathbb{C}^*)^n \subseteq X$$

mit X normal und den Fächern im Vektorraum \mathbb{R}^n , die als kombinatorische Objekte gut handhabbar sind. Eine Einführung in die Theorie der torischen Varietäten findet man zum Beispiel in [CLS11] oder [Oda85].

In dieser Arbeit wollen wir folgende allgemeinere Klasse von Varietäten betrachten: Sei G eine reductive affine algebraische Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe, sodass eine Boreluntergruppe $B \subseteq G$ eine dichte Bahn in G/H besitzt. Wir interessieren uns für Einbettungen

$$G/H \subseteq X$$

mit $G/H \subseteq X$ offen, X irreduzibel, normal, und einer fortgesetzten Gruppenwirkung von G auf X . Eine solche Varietät X nennen wir *sphärisch*. Auch zu solchen Einbettungen korrespondieren gewisse kombinatorische Objekte, nämlich die sogenannten *spitzen gefärbten Fächer*. Zuerst veröffentlicht wurde diese Theorie in [LV83]. Weitere Einführungen sind [Bri97], [Kno91] und [Pau89].

Der homogene Raum $SL(n)/SL(n-1)$ ist für $n \geq 3$ ein Beispiel für eine sphärische Varietät und wird in dieser Arbeit genauer untersucht werden. Der Spezialfall $SL(3)/SL(2)$ wurde schon in [Pau83] behandelt, jedoch unter anderen Gesichtspunkten. Unser Ziel wird es sein, gewisse Einbettungen von $SL(n)/SL(n-1)$ explizit als abgeschlossene

Einleitung

Untervarietäten von torischen Varietäten zu konstruieren, darunter insbesondere alle *einfachen* Einbettungen. Der Fächer der torischen Varietät wird dabei aus dem gefärbten Fächer der sphärischen Varietät konstruiert. Da alle Einbettungen von $SL(n)/SL(n-1)$ Verklebungen von einfachen Einbettungen sind, erhalten wir gleichzeitig einen alternativen Beweis für die Existenz der Einbettung von $SL(n)/SL(n-1)$ zu einem gegebenen spitzen gefärbten Fächer.

Das erste Kapitel dieser Arbeit enthält zunächst die Grundlagen über affine algebraische Gruppen und Gruppenwirkungen, die für das Verständnis von Kapitel zwei benötigt werden. Anschließend folgt ein Abschnitt mit ersten Aussagen über den homogenen Raum $SL(n)/SL(n-1)$.

Das zweite Kapitel enthält die Darstellung der Korrespondenz zwischen Einbettungen sphärischer homogener Räume und spitzen gefärbten Fächern. Die Theorie wird anschließend auf das Beispiel $SL(n)/SL(n-1)$ angewandt. Es wird sich unter anderem herausstellen, dass der Vektorraum, in welchem die gefärbten Fächer liegen, in diesem Fall zweidimensional ist, weshalb die Situation gut mittels einiger Skizzen illustriert werden kann.

Im dritten Kapitel werden einige Grundlagen über torische Varietäten und Quotienten kurz zusammengefasst, die im vierten Kapitel für die Konstruktion der sphärischen Einbettungen von $SL(n)/SL(n-1)$ nach der oben geschilderten Vorgehensweise benötigt werden. Im fünften Kapitel wird dann die Konstruktion auf einige Beispiele angewandt.

Symboltabelle

Die folgende Tabelle listet die Symbole auf, die in dieser Arbeit verwendet, aber nicht definiert werden.

\emptyset	die leere Menge
\mathbb{N}	die Menge der natürlichen Zahlen (enthält nicht die Null)
\mathbb{N}_0	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{Z}	die Menge der ganzen Zahlen
$V(f)$	die Menge der Punkte, wo $f = 0$ gilt
\mathbb{Q}	der Körper der rationalen Zahlen
$\mathbb{Q}_{\geq 0}$	$\{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}$
\mathbb{R}	der Körper der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
\mathbb{C}	der Körper der komplexen Zahlen
\mathbb{A}^n	der n -dimensionale komplexe affine Raum
\mathbb{P}^n	der n -dimensionale komplexe projektive Raum
R^*	die Menge der Einheiten eines kommutativen Rings R
$\text{Mat}(n, \mathbb{C})$	die Menge der $n \times n$ -Matrizen mit Koeffizienten aus \mathbb{C}
$\text{GL}(n)$	die allgemeine lineare Gruppe über \mathbb{C} , Teilmenge von $\text{Mat}(n, \mathbb{C})$
$\ker \phi$	der Kern von ϕ
$\text{im } \phi$	das Bild von ϕ
$\dim X$	die Dimension einer algebraischen Varietät X
$\text{End}(V)$	die Menge der Endomorphismen eines Vektorraums V
$\text{span}(S)$	der von S aufgespannte Vektorraum
V^*	der duale Vektorraum zu V
G_x	der Stabilisator von x
A_{ij}	die Streichungsmatrix, die durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte aus A entsteht
$A^\#$	die Adjunkte einer Matrix A
A^T	die transponierte Matrix zu A
R_f	die Lokalisierung eines kommutativen Rings R , wo das einzelne Element f invertiert wird
\sqrt{I}	das Radikalideal von I

Symboltabelle

ν_D	die von einem Primdivisor D induzierte diskrete Valuation
$\text{cone}(S)$	der von S erzeugte konvexe Kegel
$f_*\mathcal{G}$	die direkte Bildgarbe von \mathcal{G}
X^G	die G -invarianten Elemente von X
f^*	der zu einem Morphismus von Varietäten f gehörende Morphismus von Garben
$\text{Spec}(R)$	das Spektrum von R
$\mathbb{C}[X]$	der Koordinatenring von X
$\mathbb{C}(X)$	der Funktionenkörper von X
$f _X$	die Einschränkung von f auf X
$\mathcal{P}(X)$	die Potenzmenge von X

Die folgende Tabelle listet die Symbole auf, die in dieser Arbeit definiert werden.

G°	die Komponente der algebraischen Gruppe G , die das neutrale Element enthält
$\text{SL}(n)$	die spezielle lineare Gruppe über \mathbb{C} , Untergruppe von $\text{GL}(n)$
$\text{T}(n)$	die Gruppe der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen, Untergruppe von $\text{GL}(n)$
$\mathcal{X}(G)$	die Charaktergruppe von G
$\mathcal{X}^*(G)$	die Ein-Parameter-Untergruppen-Gruppe von G
$V^{(G)}$	die Menge der G -Eigenvektoren von V
χ_v	das Gewicht von v
$R(G)$	das Radikal von G
$R_u(G)$	das unipotente Radikal von G
G_u	die Teilmenge der unipotenten Elemente von G
$X_{Y,G}$	die einfache sphärische G -Untervarietät von X mit abgeschlossener Bahn Y
$\mathcal{V}(X)$	die unter einer Gruppenwirkung invarianten diskreten Valuationen von X
\mathcal{V}_X	die diskreten Valuationen einer einfachen sphärischen Varietät X , die ihren gefärbten Kegel (mit-)erzeugen
D_X	die Farben einer einfachen sphärischen Varietät X
\mathcal{C}_X	der Kegel einer einfachen sphärischen Varietät X
$\mathcal{D}_{X,Y}$	$\mathcal{D}_{X_{Y,G}}$
$\mathcal{C}_{X,Y}$	$\mathcal{C}_{X_{Y,G}}$
$\mathbf{F}(X)$	der gefärbte Fächer einer sphärischen Varietät X
$\text{fan}(F)$	der von F erzeugte Fächer
$\bar{\phi}$	der Gitterhomomorphismus zu einem torischen Morphismus ϕ

Wir betrachten in dieser Arbeit nur algebraische Varietäten über dem Körper \mathbb{C} .

1 Algebraische Gruppen

Die ersten drei Abschnitte dieses Kapitels behandeln die benötigten Grundlagen über algebraische Gruppen und folgen der Darstellung von [Hum98]. Der letzte Abschnitt ist im Wesentlichen eine Verallgemeinerung des ersten Kapitels von [Pau83].

1.1 Grundlagen

Definition 1.1.1. Eine *affine algebraische Gruppe* ist eine affine algebraische Varietät G , die so mit einer Gruppenstruktur versehen ist, dass die Verknüpfungsabbildung

$$\mu : G \times G \rightarrow G$$

und die Inversenabbildung

$$\iota : G \rightarrow G$$

zugleich Morphismen algebraischer Varietäten sind. Das neutrale Element e ist in genau einer irreduziblen Komponente von G enthalten (siehe [Hum98, 7.3]). Diese wird mit G° bezeichnet. Falls $G = G^\circ$ gilt, so heißt G *zusammenhängend*.

Beispiel 1.1.2. 1. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die allgemeine lineare Gruppe $GL(n)$ die affine offene Teilmenge $\{det \neq 0\} \subseteq Mat(n, \mathbb{C})$. Da die Inverse einer Matrix durch die Adjunktenformel gegeben ist und das Produkt zweier Matrizen als Einträge Polynome der Koeffizienten der ursprünglichen Matrizen enthält, ist $GL(n)$ eine affine algebraische Gruppe. Insbesondere ist $\mathbb{C}^* = GL(1)$ eine affine algebraische Gruppe.

2. Jede abgeschlossene Untergruppe einer affinen algebraischen Gruppe ist selbst eine affine algebraische Gruppe. Wir erhalten so beispielsweise die spezielle lineare Gruppe $SL(n) := \mathbb{V}(\det - 1) \subseteq GL(n)$ und die Gruppe der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen $T(n) \subseteq GL(n)$ als affine algebraische Gruppen.

1 Algebraische Gruppen

Definition 1.1.3. Seien G und G' affine algebraische Gruppen. Ein Morphismus von affinen algebraischen Gruppen ist ein Gruppenhomomorphismus $\phi : G \rightarrow G'$, der zugleich ein Morphismus von algebraischen Varietäten ist.

Proposition 1.1.4. Sei $\phi : G \rightarrow G'$ ein Morphismus von affinen algebraischen Gruppen. Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) $\ker \phi$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von G ,
- (ii) $\operatorname{im} \phi$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von G' ,
- (iii) $\phi(G^\circ) = \phi(G)^\circ$,
- (iv) $\dim G = \dim \ker \phi + \dim \operatorname{im} \phi$.

Beweis. [Hum98, Proposition 7.4.B] □

Definition 1.1.5. Sei G eine affine algebraische Gruppe. Ein *Charakter* von G ist ein Morphismus von algebraischen Gruppen $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$. Die Menge aller Charaktere $\mathcal{X}(G)$ mit der Verknüpfung

$$+ : \mathcal{X}(G) \times \mathcal{X}(G) \rightarrow \mathcal{X}(G),$$

die durch

$$(\chi_1 + \chi_2)(g) := \chi_1(g)\chi_2(g)$$

definiert ist, ist eine kommutative Gruppe und wird *Charaktergruppe* von G genannt (siehe [Hum98, 11.4]).

Proposition 1.1.6. Sei G eine affine algebraische Gruppe. Dann ist G isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $\operatorname{GL}(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. [Hum98, Theorem 8.6] □

1.2 Gruppenwirkungen

Definition 1.2.1. Sei G eine affine algebraische Gruppe, X eine algebraische Varietät, und

$$\phi : G \times X \rightarrow X$$

eine Gruppenwirkung, die zugleich ein Morphismus von algebraischen Varietäten ist. Dann nennen wir X eine G -Varietät. Wenn im Folgenden algebraische Gruppen auf algebraische Varietäten wirken, so sind immer Wirkungen im Sinne dieser Definition gemeint.

Proposition 1.2.2. Sei G eine affine algebraische Gruppe und X eine G -Varietät. Dann ist jede Bahn eine glatte, lokal abgeschlossene Teilmenge von X , deren Rand die Vereinigung von Bahnen echt kleinerer Dimension ist. Insbesondere sind Bahnen von minimaler Dimension abgeschlossen.

Beweis. [Hum98, Proposition 8.3] □

Bemerkung 1.2.3. Sei G eine affine algebraische Gruppe und X eine G -Varietät. Dann wirkt G auf natürliche Weise auch auf den Koordinatenring $\mathbb{C}[X]$ durch

$$(g \cdot f)(x) := f(g^{-1} \cdot x)$$

für $g \in G, f \in \mathbb{C}[X], x \in X$ und entsprechend auch auf $\mathbb{C}(X)$ und $\mathbb{C}[U]$ für G -invariante offene Teilmengen $U \subseteq X$.

Definition 1.2.4. Sei G eine affine algebraische Gruppe. Einen \mathbb{C} -Vektorraum V mit einer linearen G -Wirkung nennen wir einen G -Modul. Falls jedes $v \in V$ in einem endlichdimensionalen G -invarianten Untervektorraum von V enthalten ist, nennen wir den G -Modul *rational*. Ein G -Modul heißt *irreduzibel*, falls kein echter Untermodul

$$0 \neq V' \subsetneq V$$

existiert.

Definition 1.2.5. Sei G eine affine algebraische Gruppe, V ein G -Modul und $v \in V \setminus \{0\}$. Falls für alle $g \in G$ ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $g \cdot v = \lambda v$ existiert, so heißt v ein G -Eigenvektor. Die Menge aller G -Eigenvektoren in V bezeichnen wir mit $V^{(G)}$. Sie heißen auch *G -semiinvariante Elemente*.

Bemerkung 1.2.6. Sei G eine affine algebraische Gruppe und V ein G -Modul. Für $v \in V^{(G)}$ definiert $g \cdot v = \chi(g)v$ einen Charakter χ von G (siehe [Hum98, 11.4]). Wir schreiben für dieses χ auch χ_v und nennen es das *Gewicht* von v .

Definition 1.2.7. Sei G eine affine algebraische Gruppe, H eine abgeschlossene Untergruppe. Dann operiert H auf G durch Rechtstranslation. Ein Morphismus

$$\pi : G \rightarrow Q$$

1 Algebraische Gruppen

heißt Quotient dieser Gruppenwirkung, falls für jeden H -invarianten Morphismus

$$\phi : G \rightarrow Y$$

genau ein Morphismus

$$\psi : Q \rightarrow Y$$

mit $\phi = \psi \circ \pi$ existiert. Der Quotient ist dann nach den üblichen Argumenten für universelle Eigenschaften eindeutig bestimmt, falls er existiert. In diesem Fall können wir deshalb von *dem* homogenen Raum $G/H := Q$ mit kanonischem Morphismus

$$\pi : G \rightarrow G/H$$

sprechen.

Proposition 1.2.8. Sei G eine affine algebraische Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe. Dann existiert der homogene Raum G/H . Falls außerdem X eine G -Varietät und $\pi : G \rightarrow X$ ein G -äquivarianter surjektiver Morphismus mit $\pi^{-1}(\pi(e)) = H$ ist, dann gilt $X \cong G/H$ und π ist der kanonische Morphismus.

Beweis. Die erste Aussage wird in [Hum98, 12.1-12.3] bewiesen. Für die zweite Aussage siehe [Hum98, 12.4]. Bemerkung: Für Körper der Charakteristik $p \neq 0$ gilt die zweite Aussage nur unter verschärften Voraussetzungen (siehe [Hum98, 12.4]). \square

1.3 Reduktive Gruppen und Boreluntergruppen

Definition 1.3.1. Sei V ein endlich-dimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum und $x \in \text{End}(V)$. Falls 1 der einzige Eigenwert von x ist, so nennen wir x *unipotent*. Falls x diagonalisierbar ist, so nennen wir x *halbeinfach*.

Proposition 1.3.2. Seien G eine affine algebraische Gruppe und $\phi : G \rightarrow \text{GL}(n)$ sowie $\psi : G \rightarrow \text{GL}(m)$ zwei injektive Morphismen algebraischer Gruppen. Sei $g \in G$. Dann ist $\phi(g)$ unipotent bzw. halbeinfach genau dann, wenn $\psi(g)$ unipotent bzw. halbeinfach ist.

Beweis. Ergibt sich direkt aus [Hum98, Theorem 15.3(c)]. \square

Definition 1.3.3. Sei G eine algebraische Gruppe und $\phi : G \rightarrow \text{GL}(n)$ ein injektiver Morphismus algebraischer Gruppen, der nach Proposition 1.1.6 immer existiert. Dann

1.4 Der homogene Raum $SL(n)/SL(n-1)$, $n \geq 3$

heißt $x \in G$ *unipotent* bzw. *halbeinfach*, falls $\phi(g)$ unipotent bzw. halbeinfach ist. Mit der vorhergehenden Proposition ist dies wohldefiniert.

Proposition 1.3.4. Sei G eine zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppe. Dann ist die Teilmenge $G_u \subseteq G$ der unipotenten Elemente eine abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe von G .

Beweis. [Hum98, 19.1] □

Definition 1.3.5. Sei G eine affine algebraische Gruppe. Dann besitzt G einen eindeutigen maximalen zusammenhängenden auflösbaren Normalteiler, der abgeschlossen ist (siehe [Hum98, 19.5]). Dieser heißt das *Radikal* von G und wird mit $R(G)$ bezeichnet. Die Untergruppe $R_u(G) \subseteq R(G)$ der unipotenten Elemente heißt *unipotenten Radikal* von G .

Definition 1.3.6. Sei G eine affine algebraische Gruppe. Wir nennen G *reduktiv*, falls G nichttrivial und zusammenhängend ist, sowie $R_u(G) = \{e\}$ gilt.

Beispiel 1.3.7. Für $n \geq 1$ ist $SL(n)$ reduktiv (siehe [Hum98, 19.5]).

Definition 1.3.8. Sei G eine affine algebraische Gruppe. Eine maximale zusammenhängende auflösbare Untergruppe, die abgeschlossen ist, heißt *Boreluntergruppe*.

Beispiel 1.3.9. Für $SL(n)$ ist die Teilmenge der oberen Dreiecksmatrizen eine Boreluntergruppe (folgt aus [Hum98, 21.2]).

Proposition 1.3.10. Sei B eine Boreluntergruppe einer affinen algebraischen Gruppe G . Dann sind alle Boreluntergruppen von G zu B konjugiert.

Beweis. [Hum98, Theorem 21.3] □

1.4 Der homogene Raum $SL(n)/SL(n-1)$, $n \geq 3$

Wir betrachten für $n \geq 3$ den Vektorraum \mathbb{C}^n mit Standardbasis $(e_i)_{i=1}^n$. Die entsprechende duale Basis des dualen Vektorraums $(\mathbb{C}^n)^*$ notieren wir $(f_i)_{i=1}^n$. Die reduktive affine algebraische Gruppe $G := SL(n)$ operiert auf natürliche Weise auf \mathbb{C}^n . Sie operiert außerdem auf $(\mathbb{C}^n)^*$ durch $(g \cdot y)(x) := y(g^{-1} \cdot x)$ für $y \in (\mathbb{C}^n)^*$, $x \in \mathbb{C}^n$. Koordinatenindizes für Vektoren aus \mathbb{C}^n oder $(\mathbb{C}^n)^*$ beziehen sich, wenn nichts anderes angegeben ist, immer auf die obigen Basen. Für die natürliche Paarung

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^* &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto y(x) \end{aligned}$$

1 Algebraische Gruppen

gilt dann

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Wir sehen außerdem, dass $g \in G$ auf einem $y \in (\mathbb{C}^n)^*$ bezüglich der dualen Standardbasis $(f_i)_{i=1}^n$ durch Multiplikation mit der Matrix $(g^{-1})^T$ operiert. Wir setzen $M := \mathbb{C}^n \oplus (\mathbb{C}^n)^*$ und $v := (e_1, f_1) \in M$. Dann operiert G auf M und wir setzen $H := G_v$ (der Stabilisator von v).

Proposition 1.4.1. Es gilt:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \in G \mid h \in \mathrm{SL}(n-1) \right\}.$$

Insbesondere ist $H \cong \mathrm{SL}(n-1)$.

Beweis. Wir zeigen nur die Notwendigkeit der Nulleinträge oben rechts. Wir nehmen an, dass ein $g \in H$ existiert, sodass oben rechts keine Nullzeile ist. Da die Zeilen von h eine Basis von \mathbb{C}^{n-1} bilden, existiert in diesem Fall ein Zeilenindex $j > 1$, sodass die Determinante der Streichungsmatrix g_{j1} nicht Null ist. Daher folgt nacheinander

$$\begin{aligned} (g^\#)_{j1}^T &\neq 0 \\ (g^{-1})_{j1}^T &\neq 0 \\ g \cdot f_1 &\neq f_1, \end{aligned}$$

was ein Widerspruch zu $g \in H$ ist. □

Wir identifizieren im Folgenden G/H und $G \cdot v$ (gemäß Proposition 1.2.8). Die Boreluntergruppe der oberen Dreiecksmatrizen von G bezeichnen wir mit B .

Proposition 1.4.2. Es gilt:

$$G \cdot v = \left\{ (x, y) \in M \mid \sum_{i=1}^n x_i y_i = 1 \right\}.$$

Beweis. Falls $g \in G$ und $(x, y) = g \cdot v$ ist, so gilt

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle x, y \rangle = \langle g \cdot e_1, g \cdot f_1 \rangle = f_1(g^{-1} \cdot g \cdot e_1) = 1.$$

1.4 Der homogene Raum $SL(n)/SL(n-1)$, $n \geq 3$

Sei nun $(x, y) \in M$ mit $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 1$. Insbesondere ist $y \neq 0$, und deshalb gibt es ein $g'' = (a_{ij}) \in G$, wo die Koordinaten von y die erste Zeile von g'' sind. Sei $g' \in G$ die Inverse von g'' und g die Matrix, die aus g' entsteht, indem die erste Spalte durch x ersetzt wird.

Wir berechnen $\det g$ durch Entwicklung nach der ersten Spalte. Es gilt:

$$\det g = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} x_i \det g_{i1} = \sum_{i=1}^n x_i (-1)^{i+1} \det g'_{i1} = \sum_{i=1}^n x_i a_{1i} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = 1.$$

Daher ist $g \in G$ und y ist auch die erste Zeile von g^{-1} . Es folgt $g \cdot v = (x, y)$. \square

Wir bezeichnen mit X_i, Y_i für $1 \leq i \leq n$ die Koordinatenfunktionen von M mit $X_i((x, y)) = x_i$ und $Y_i((x, y)) = y_i$. Der Koordinatenring der affinen Varietät $G/H = G \cdot v$ ist dann

$$\mathbb{C}[G/H] = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n] \left/ \left\langle \sum_{i=1}^n X_i Y_i - 1 \right\rangle \right.$$

Die folgende Aussage wird sicherstellen, dass G/H eine sphärische Varietät im Sinne von Kapitel 2 ist.

Proposition 1.4.3. Es ist

$$U := \{(x, y) \in G \cdot v \mid x_n \neq 0 \text{ und } y_1 \neq 0\}$$

eine offene B -Bahn in G/H .

Beweis. Sei $z_0 := (e_1 + e_n, f_1)$. Es ist klar, dass $B \cdot z_0 \subseteq U$ gilt. Sei nun

$$z := (x, y) := \left(\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ \vdots \\ x_1 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ y_{n-2} \\ \vdots \\ y_1 \\ F \end{pmatrix} \right)$$

mit $b \neq 0, t \neq 0$ und $z \in G \cdot v$. Dann ist F wegen $b \neq 0$ durch die anderen Einträge

1 Algebraische Gruppen

eindeutig festgelegt. Wir müssen zeigen, dass $g \in B$ existiert mit $g \cdot z_0 = z$. Sei dazu

$$g := \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & \frac{-y_{n-2}}{t} & \dots & \frac{-y_2}{t} & \frac{-y_1}{b} & x_{n-1} - \frac{1}{t} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & x_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & x_2 \\ \vdots & & & \ddots & \frac{t}{b} & x_1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass $g \cdot (e_1 + e_n) = x$ gilt. Um $g \cdot f_1 = y$ nachzuweisen, berechnen wir die Determinanten der Streichungsmatrizen g_{j1} für $1 \leq j \leq n-1$. Die schwierigere Berechnung von $\det g_{n1}$ braucht nicht durchgeführt zu werden, da F schon durch die anderen Einträge eindeutig festgelegt ist. \square

Bemerkung 1.4.4. Da

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[G/H] / \langle \overline{X_n} \rangle &= \left(\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n] / \left\langle \sum_{i=1}^n X_i Y_i - 1 \right\rangle \right) / \langle \overline{X_n} \rangle \\ &= \mathbb{C}[X_1, \dots, X_{n-1}, Y_1, \dots, Y_n] / \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} X_i Y_i - 1 \right\rangle \end{aligned}$$

gilt, ist $\overline{X_n} \in \mathbb{C}[G/H]$ ein Primelement. Analog gilt dies für $\overline{Y_1}$. Diese beiden Elemente sind B -Eigenvektoren von $\mathbb{C}[G/H]$ (siehe Bemerkung 1.2.3). Da U eine offene B -Bahn ist, entsprechen diese genau den B -invarianten irreduziblen abgeschlossenen Untervarietäten von Codimension 1 in G/H , also den B -invarianten Primdivisoren.

Lemma 1.4.5. Sei R ein Integritätsring, $p \in R$ ein Primelement und R_p faktoriell. Dann ist R faktoriell.

Beweis. [Eis95, Lemma 19.20] \square

1.4 Der homogene Raum $SL(n)/SL(n-1)$, $n \geq 3$

Hilfssatz 1.4.6. Sei R ein faktorieller Ring und $p \in R$ ein Primelement. Dann gilt:

$$(R_p)^* = \{cp^k \mid c \in R^*, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Beweis. Aus

$$\frac{a}{p^l} \cdot \frac{b}{p^m} = 1$$

mit $a, b \in R$ und $l, m \in \mathbb{N}$ folgt $ab = p^{l+m}$ und damit die Aussage. \square

Proposition 1.4.7. Der Ring $\mathbb{C}[G/H]$ ist faktoriell und es gilt: $\mathbb{C}[G/H]^* = \mathbb{C}^*$.

Beweis. Wir betrachten

$$\mathbb{C}[G/H]_{\overline{X_n}} = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, X_n^{-1}] \left/ \left\langle \sum_{i=1}^n X_i Y_i - 1 \right\rangle \right.$$

und sehen, dass die kanonische Abbildung

$$\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_{n-1}, X_n^{-1}] \rightarrow \mathbb{C}[G/H]_{\overline{X_n}}$$

ein Isomorphismus ist, weil in $\mathbb{C}[G/H]_{\overline{X_n}}$

$$\overline{Y_n} = \frac{1 - \sum_{i=1}^{n-1} \overline{X_i Y_i}}{\overline{X_n}}$$

gilt. Mit Lemma 1.4.5 folgt, dass $\mathbb{C}[G/H]$ faktoriell ist. Für die zweite Aussage beachten wir, dass die Inklusion $\mathbb{C}[G/H] \rightarrow \mathbb{C}[G/H]_{\overline{X_n}}$ Einheiten auf Einheiten abbildet. Also sind die Einheiten von $\mathbb{C}[G/H]$ höchstens Elemente der Form $c\overline{X_n}^k$ mit $c \in \mathbb{C}^*$ und $k \in \mathbb{Z}$. Da $\overline{X_n}$ ein Primelement in $\mathbb{C}[G/H]$ ist, folgt $k = 0$. \square

Proposition 1.4.8. Jeder B -Eigenvektor $f \in \mathbb{C}[G/H]^{(B)}$ lässt sich als Produkt $c\overline{X_n}^k \overline{Y_1}^l$ mit $k, l \in \mathbb{N}_0$ und $c \in \mathbb{C}^*$ schreiben.

Beweis. Sei $f \in \mathbb{C}[G/H]$ ein Eigenvektor von B und nicht in \mathbb{C}^* , also keine Einheit. Wir zeigen zunächst, dass dann $\overline{X_n} \mid f$ oder $\overline{Y_1} \mid f$ gilt. Da B irreduzibel ist, sind die Komponenten von $\mathbb{V}(f)$ alle B -invariant. Da sie alle von Codimension 1 in G/H sind gilt also entweder

$$\mathbb{V}(f) = \mathbb{V}(\overline{X_n}) \cup \mathbb{V}(\overline{Y_1})$$

1 Algebraische Gruppen

oder

$$\mathbb{V}(f) = \mathbb{V}(\overline{X_n})$$

oder

$$\mathbb{V}(f) = \mathbb{V}(\overline{Y_1}).$$

Es folgt entsprechend

$$\sqrt{\langle f \rangle} = \langle \overline{X_n} \rangle \cap \langle \overline{Y_1} \rangle = \langle \overline{X_n Y_1} \rangle$$

oder

$$\sqrt{\langle f \rangle} = \langle \overline{X_n} \rangle$$

oder

$$\sqrt{\langle f \rangle} = \langle \overline{Y_1} \rangle.$$

In jedem Fall gilt also $\overline{X_n} \mid f$ oder $\overline{Y_1} \mid f$. Da wir wieder einen B -Eigenvektor erhalten, wenn wir f durch einen B -Eigenvektor teilen, folgt, dass die Primfaktorzerlegung von f nur zu $\overline{X_n}$ oder $\overline{Y_1}$ assoziierte Primelemente enthalten kann. \square

Proposition 1.4.9. Jeder B -Eigenvektor $f \in \mathbb{C}(G/H)^{(B)}$ lässt sich als Produkt $c\overline{X_n}^k\overline{Y_1}^l$ mit $k, l \in \mathbb{Z}$ und $c \in \mathbb{C}^*$ schreiben.

Beweis. Sei $x = \frac{a}{b}$ ein B -Eigenvektor in $\mathbb{C}(G/H)$ mit $a, b \in \mathbb{C}[G/H]$ und als vollständig gekürzter Bruch dargestellt. Sei $g \in B$ beliebig. Dann ist $g \cdot x = \frac{g \cdot a}{g \cdot b}$ eine vollständig gekürzte Darstellung von $g \cdot x = \lambda x$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Es folgt, dass in $\mathbb{C}[G/H]$ sowohl $g \cdot a$ zu a als auch $g \cdot b$ zu b assoziiert ist. Wegen $\mathbb{C}[G/H]^* = \mathbb{C}^*$ folgt dann, dass a und b B -Eigenvektoren sind. Mit der vorherigen Proposition folgt die Aussage. \square

2 Sphärische Varietäten

In diesem Kapitel wird die Theorie über die Klassifikation der Einbettungen sphärischer homogener Räume vorgestellt. Sie wurde in großer Allgemeinheit in [LV83] veröffentlicht. Wir folgen der Darstellung in [Bri97]. Weitere Darstellungen findet man in [Kno91] und [Pau89]. Im dritten Abschnitt dieses Kapitels werden dann Daten, die später für die Klassifikation der Einbettungen von $SL(n)/SL(n-1)$ benötigt werden, bestimmt.

2.1 Grundlagen

Sei G eine reductive affine algebraische Gruppe und B eine Boreluntergruppe.

Definition 2.1.1. Eine irreduzible G -Varietät X heißt *sphärisch*, falls X normal ist und eine offene B -Bahn enthält.

Definition 2.1.2. Sei X eine irreduzible G -Varietät, $x \in X$ und $H \subseteq G$ der Stabilisator von x . Falls $Gx \subseteq X$ offen ist, so heißt (X, x) eine Einbettung von G/H . Wir sehen zwei Einbettungen (X, x) und (X', x') von G/H als äquivalent an, falls es einen G -äquivarianten Isomorphismus $\phi : X \rightarrow X'$ gibt, der x auf x' abbildet. Eine solche Einbettung heißt *sphärisch*, falls X sphärisch ist. Falls G/H sphärisch ist, reicht es also aus, dass X normal ist.

Bemerkung 2.1.3 ([Bri97, 2.1]). Sei X eine sphärische G -Varietät. Dann enthält X nur endlich viele G -Bahnen.

Bemerkung 2.1.4 ([Bri97, 2.2]). Sei X eine sphärische G -Varietät und Y eine G -Bahn in X . Dann ist

$$X_{Y,G} := \{x \in X \mid \overline{Gx} \supseteq Y\}$$

offen in X , G -invariant und enthält Y als einzige abgeschlossene Bahn.

2 Sphärische Varietäten

Definition 2.1.5. Eine sphärische G -Varietät heißt *einfach*, wenn sie nur eine abgeschlossene G -Bahn enthält. Eine sphärische Einbettung (X, x) von G/H heißt *einfach*, wenn X einfach ist.

Wir können also jede sphärische Einbettung (X, x) von G/H durch endlich viele einfache sphärische Einbettungen überdecken. Deshalb werden wir zuerst einfache und dann allgemeine sphärische Einbettungen betrachten. Davor führen wir im nächsten Abschnitt noch die benötigten Hilfsmittel ein.

2.2 Diskrete Valuationen und der Vektorraum V

Sei zunächst X eine normale irreduzible Varietät und G eine affine algebraische Gruppe.

Wiederholung 2.2.1. Eine *diskrete Valuation* von X ist eine Abbildung

$$\nu : \mathbb{C}(X)^* \rightarrow \mathbb{Q},$$

die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (i) $\nu(f_1 + f_2) \geq \min(\nu(f_1), \nu(f_2))$ für alle $f_1, f_2 \in \mathbb{C}(X)^*$ mit $f_1 + f_2 \in \mathbb{C}(X)^*$,
- (ii) $\nu(f_1 f_2) = \nu(f_1) + \nu(f_2)$ für alle $f_1, f_2 \in \mathbb{C}(X)^*$,
- (iii) $\nu|_{\mathbb{C}^*} = 0$.

Man kann dann zeigen, dass das Bild von ν eine diskrete Untergruppe von \mathbb{Q} ist, d. h. von der Form $a\mathbb{Z}$ für ein $a \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ ([Bri97, 3.1]). Falls X eine G -Varietät ist, so heißt ν *G -invariant*, falls $\nu(g \cdot f) = \nu(f)$ für alle $g \in G, f \in \mathbb{C}(X)^*$ gilt. Die Menge aller G -invarianten diskreten Valuationen von X bezeichnen wir mit $\mathcal{V}(X)$.

Wiederholung 2.2.2. Für einen Primdivisor D von X bezeichnen wir die diskrete Valuation, die jedem f die Ordnung der Nullstelle oder des Pols in D zuordnet mit ν_D .

Sei nun G eine reduktive affine algebraische Gruppe, B eine Boreluntergruppe und $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe, sodass G/H sphärisch ist. Die (endliche) Menge der B -invarianten Primdivisoren von G/H bezeichnen wir mit \mathcal{D} . Wir verwenden die Zuordnung

$$\chi : \mathbb{C}(G/H)^{(B)} \rightarrow \mathcal{X}(B)$$

aus Bemerkung 1.2.6 und setzen $\mathcal{X} := \text{im } \chi$ sowie $V := \text{Hom}(\mathcal{X}, \mathbb{Q})$. Nach [Hum98, 16.2 und 19.3] ist $\mathcal{X}(B)$ und daher auch \mathcal{X} eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe.

Proposition 2.2.3. Folgende Sequenz ist exakt:

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}(G/H)^{(B)} \rightarrow \mathcal{X} \rightarrow 0.$$

Beweis. [Bri97, 3.1] □

Definition 2.2.4. Jede diskrete Valuation ν von G/H definiert durch Einschränkung einen Homomorphismus $\mathbb{C}(G/H)^{(B)} \rightarrow \mathbb{Q}$, dessen Kern \mathbb{C}^* enthält, also mit Proposition 2.2.3 auch einen Homomorphismus $\rho(\nu) : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{Q}$.

Definition 2.2.5. Wir definieren die Abbildung $\tilde{\rho} : \mathcal{D} \rightarrow V$ durch $D \mapsto \rho(\nu_D)$.

Proposition 2.2.6. Die Abbildung $\rho|_{\mathcal{V}(G/H)} : \mathcal{V}(G/H) \rightarrow V$ ist injektiv.

Beweis. [Bri97, 3.1, Corollaire 3] □

Bemerkung 2.2.7. Die Abbildung ρ ist in Definition 2.2.4 nicht nur auf $\mathcal{V}(G/H)$, sondern auf allen diskreten Valuationen von G/H definiert, aber nicht notwendigerweise injektiv.

Für den Rest dieses Abschnittes behandeln wir wieder $G := SL(n)$, $H := SL(n-1)$.

Bemerkung 2.2.8. Wir bestimmen V . Aus Proposition 2.2.3 folgt mit Proposition 1.4.9, dass \mathcal{X} von $\chi(\overline{X_n})$ und $\chi(\overline{Y_1})$ erzeugt wird. Da $\overline{X_n}$ und $\overline{Y_1}$ in $\mathbb{C}[G/H]$ nicht assoziiert sind, folgt mit Proposition 2.2.3 nun, dass $(\chi(\overline{X_n}), \chi(\overline{Y_1}))$ eine Basis von \mathcal{X} ist. Die dazu duale Basis von V bezeichnen wir mit (c_1, c_2) und identifizieren damit $V \cong \mathbb{Q}^2$. Damit können wir die Abbildung $\rho : \mathcal{V}(G/H) \rightarrow V$ als

$$\rho : \mathcal{V}(G/H) \rightarrow \mathbb{Q}^2$$

interpretieren und dann gilt:

$$\nu \mapsto (\nu(\overline{X_n}), \nu(\overline{Y_1})).$$

Wir schreiben auch kurz ν_1 für $\rho(\nu)_1$ und ν_2 für $\rho(\nu)_2$.

Proposition 2.2.9. Es gilt:

$$\rho(\mathcal{V}(G/H)) \subseteq \{(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid q_1 + q_2 \leq 0\}.$$

2 Sphärische Varietäten

Beweis. Sei $\nu \in \mathcal{V}(G/H)$. Durch die Wahl geeigneter Koordinatenvertauschungen finden wir für jedes $1 \leq i \leq n$ sowohl ein $g \in G$ mit $g \cdot X_n = X_i$ als auch ein $g \in G$ mit $g \cdot Y_1 = Y_i$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\nu(\overline{X_1}) &= \nu(\overline{X_2}) = \dots = \nu(\overline{X_n}) \\ \nu(\overline{Y_1}) &= \nu(\overline{Y_2}) = \dots = \nu(\overline{Y_n}).\end{aligned}$$

Es folgt:

$$0 = \nu(1) = \nu\left(\sum_{i=1}^n \overline{X_i Y_i}\right) \geq \nu(\overline{X_1 Y_1}) = \nu_1 + \nu_2.$$

□

Für den Rest dieses Abschnittes betrachten wir $\mathbb{C}^{2n+1} \cong \mathbb{C}^n \oplus (\mathbb{C}^n)^* \oplus \mathbb{C}$. Die neue Koordinate nennen wir z mit Koordinatenfunktion Z . Wir lassen G auf \mathbb{C}^{2n+1} linear operieren, indem G auf $\mathbb{C}^n \oplus (\mathbb{C}^n)^*$ wie bisher sowie auf \mathbb{C} durch $g \cdot z := z$ operiert. Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ mit $n_1 + n_2 \leq 0$. Wir definieren $W := \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i Y_i - Z^{-n_1 - n_2}\right) \subseteq \mathbb{C}^{2n+1}$ mit Koordinatenring

$$\mathbb{C}[W] = \mathbb{C}[Z, X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n] \left/ \left\langle \sum_{i=1}^n X_i Y_i - Z^{-n_1 - n_2} \right\rangle \right.$$

Außerdem setzen wir $W_0 := \{Z \neq 0\} \subseteq W$. Da aus $\langle x, y \rangle = z^{-n_1 - n_2}$ für alle $g \in G$

$$\langle g \cdot x, g \cdot y \rangle = y(g^{-1} \cdot g \cdot x) = \langle x, y \rangle = z^{-n_1 - n_2} = (g \cdot z)^{-n_1 - n_2}$$

folgt, ist W und dann auch W_0 G -invariant.

Proposition 2.2.10. Der Homomorphismus $\Psi : \mathbb{C}[G/H] \rightarrow \mathbb{C}[W_0]$, genauer

$$\Psi : R \left/ \left\langle \sum_{i=1}^n X_i Y_i - 1 \right\rangle \right. \rightarrow R[Z, Z^{-1}] \left/ \left\langle \sum_{i=1}^n X_i Y_i - Z^{-n_1 - n_2} \right\rangle \right.$$

mit $R := \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]$, gegeben durch $\overline{X_i} \mapsto \overline{X_i Z^{n_1}}$ und $\overline{Y_i} \mapsto \overline{Y_i Z^{n_2}}$, ist wohldefiniert, injektiv und G -äquivariant. Er induziert deshalb eine G -äquivariante In-

klusion der Funktionenkörper

$$\bar{\Psi} : \mathbb{C}(G/H) \rightarrow \mathbb{C}(W_0) = \mathbb{C}(W).$$

Beweis. Die Wohldefiniertheit ergibt sich aus dem Homomorphiesatz. Für die Injektivität und die G -Äquivarianz betrachten wir den zugehörigen Morphismus $W_0 \rightarrow G/H$. Er bildet

$$(z, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \mapsto (x_1 z^{n_1}, \dots, x_n z^{n_1}, y_1 z^{n_2}, \dots, y_n z^{n_2})$$

ab und ist offenbar G -äquivariant. Er ist außerdem surjektiv (wir können $z = 1$ wählen), insbesondere dominant. Damit folgt die Aussage. \square

Proposition 2.2.11. Es existiert $\nu \in \mathcal{V}(G/H)$ mit $\nu_1 = n_1$ und $\nu_2 = n_2$.

Beweis. Sei $D = \mathbb{V}(\bar{Z}) \subseteq W$. Es ist \bar{Z} in $\mathbb{C}[W]$ ein Primelement (ähnlich Bemerkung 1.4.4) und der Primdivisor D ist G -invariant. Sei $\tilde{\nu}$ die von D induzierte G -invariante diskrete Valuation auf $\mathbb{C}(W)$. Dann gilt $\tilde{\nu}(\bar{Z}) = 1$, $\tilde{\nu}(\bar{X}_n) = 0$ und $\tilde{\nu}(\bar{Y}_1) = 0$, da \bar{Z} , \bar{X}_n und \bar{Y}_1 paarweise nicht assoziierte Primelemente in $\mathbb{C}[W]$ sind (weil sie paarweise verschiedene Untervarietäten von W definieren). In $\mathbb{C}(W)$ folgt dann

$$\tilde{\nu}(\bar{X}_n \bar{Z}^{n_1}) = n_1 \text{ und } \tilde{\nu}(\bar{Y}_1 \bar{Z}^{n_2}) = n_2.$$

Wenn wir $\tilde{\nu}$ mit der Inklusion $\bar{\Psi} : \mathbb{C}(G/H) \rightarrow \mathbb{C}(W)$ einschränken, erhalten wir ein $\nu \in \mathcal{V}(G/H)$ mit $\nu_1 = n_1$ und $\nu_2 = n_2$. \square

Satz 2.2.12. Es gilt:

$$\rho(\mathcal{V}(G/H)) = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid q_1 + q_2 \leq 0\}.$$

Beweis. Es ist nur noch die Inklusion „ \supseteq “ zu zeigen. Seien $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ mit $q_1 + q_2 \leq 0$. Dann existiert $m \in \mathbb{Z}$ mit $mq_1, mq_2 \in \mathbb{Z}$. Nach Proposition 2.2.11 existiert $\nu' \in \mathcal{V}(G/H)$ mit $\nu'_1 = mq_1$ und $\nu'_2 = mq_2$. Dann ist $\nu := \frac{1}{m}\nu' \in \mathcal{V}(G/H)$ und $\nu_1 = q_1$ sowie $\nu_2 = q_2$. \square

2 Sphärische Varietäten

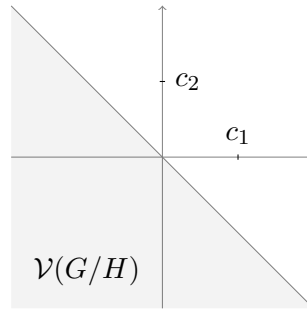


Abbildung 1: Der Vektorraum V mit $\mathcal{V}(G/H)$

2.3 Klassifikation der Einbettungen

Wir verwenden wieder die Bezeichnungen des allgemeinen Teils des vorhergehenden Abschnittes. Wenn wir in diesem Abschnitt über Einbettungen sprechen, so sind immer sphärische Einbettungen gemeint.

Definition 2.3.1 ([Bri97, 3.3]). Ein *gefärbter Kegel* ist ein Tupel $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ mit $\mathcal{C} \subseteq V$ und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$, welches die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) \mathcal{C} ist ein konvexer Kegel, erzeugt von $\rho(\mathcal{F})$ und endlich vielen Elementen aus $\mathcal{V}(G/H)$,
- (ii) das relative Innere von \mathcal{C} hat nichtleeren Durchschnitt mit $\mathcal{V}(G/H)$.

Die *Farben* sind die Elemente von \mathcal{F} . Ein gefärbter Kegel heißt *spitz*, wenn \mathcal{C} spitz ist und $0 \notin \rho(\mathcal{F})$.

Definition 2.3.2. Sei (X, x) eine einfache Einbettung von G/H mit abgeschlossener Bahn Y . Dann definieren wir:

$$\mathcal{D}_X := \{D \in \mathcal{D} \mid \text{der Abschluss von } D \text{ in } X \text{ enthält } Y\}$$

$$\mathcal{V}_X := \{\nu \in \mathcal{V}(G/H) \mid \nu \text{ wird von einem } G\text{-invarianten Primdivisor von } X \text{ induziert}\}$$

$$\mathcal{C}_X := \text{cone}(\rho(\mathcal{V}_X) \cup \tilde{\rho}(\mathcal{D}_X)).$$

Satz 2.3.3. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \{\text{Äquivalenzklassen einfacher Einbettungen von } G/H\} &\rightarrow \{\text{spitze gefärbte Kegel}\} \\ (X, x) &\mapsto (\mathcal{C}_X, \mathcal{D}_X) \end{aligned}$$

ist wohldefiniert und bijektiv.

Beweis. [Bri97, 3.3, Théorème] □

Wir kommen nun zu den allgemeinen Einbettungen.

Definition 2.3.4 ([Bri97, 3.4]). Eine *Seite* eines gefärbten Kegels $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ ist ein Tupel $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$, wo \mathcal{C}' eine Seite des Kegels \mathcal{C} ist, das relative Innere von \mathcal{C}' nichtleeren Durchschnitt mit \mathcal{V} hat und $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cap \tilde{\rho}^{-1}(\mathcal{C}')$ gilt.

Definition 2.3.5 ([Bri97, 3.4]). Sei (X, x) eine Einbettung von G/H und Y eine G -Bahn in X . Mit $(\mathcal{C}_{X,Y}, \mathcal{D}_{X,Y})$ bezeichnen wir den gefärbten Kegel der einfachen Einbettung $X_{Y,G}$.

Proposition 2.3.6. Sei (X, x) eine Einbettung von G/H und Y eine G -Bahn in X . Die Abbildung

$$\begin{aligned} \{G\text{-Bahnen in } X, \text{ deren Abschluss } Y \text{ enthält}\} &\rightarrow \{\text{Seiten von } (\mathcal{C}_{X,Y}, \mathcal{D}_{X,Y})\} \\ Z &\mapsto (\mathcal{C}_{X,Z}, \mathcal{D}_{X,Z}) \end{aligned}$$

ist wohldefiniert und bijektiv.

Beweis. [Bri97, 3.4, Proposition] □

Definition 2.3.7 ([Bri97, 3.4]). Ein *gefärbter Fächer* ist eine endliche Menge \mathbf{F} von gefärbten Kegeln, die folgende Eigenschaften erfüllt:

- (i) Jede Seite eines gefärbten Kegels aus \mathbf{F} ist in \mathbf{F} ,
- (ii) für jedes $\nu \in \mathcal{V}(G/H)$ gibt es höchstens ein $(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \in \mathbf{F}$, sodass ν im relativen Inneren von \mathcal{C} liegt.

Ein gefärbter Fächer heißt *spitz*, wenn alle enthaltenen gefärbten Kegel spitz sind.

Satz 2.3.8. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \{\text{Äquivalenzklassen von Einbettungen von } G/H\} &\rightarrow \{\text{spitze gefärbte Fächer}\} \\ (X, x) &\mapsto \mathbf{F}(X, x) \end{aligned}$$

mit $\mathbf{F}(X, x) := \{(\mathcal{C}_{X,Y}, \mathcal{D}_{X,Y}) \mid Y \text{ ist eine } G\text{-Bahn in } X\}$ ist wohldefiniert und bijektiv.

Beweis. [Bri97, 3.4, Théorème 1] □

2.4 Illustrationen

Wir betrachten nun wieder den Fall $G/H = \mathrm{SL}(n)/\mathrm{SL}(n-1)$ und illustrieren die möglichen gefärbten Kegel $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$, die den einfachen Einbettungen von G/H entsprechen. Die erste Möglichkeit ist, dass der Kegel \mathcal{C} von einem Vektor $(p, q) \in \mathcal{V}(G/H)$ und möglicherweise noch den Farben aus \mathcal{F} erzeugt wird. Für eine nichttriviale Einbettung muss immer $p < 0$ oder $q < 0$ gelten. Wir illustrieren nur $p < 0$. Die ersten 10 Abbildungen zeigen die verschiedenen Fälle. Die zweite Möglichkeit ist, dass \mathcal{C} von zwei linear unabhängigen Vektoren aus $\mathcal{V}(G/H)$ erzeugt wird. Dies zeigt die letzte Abbildung. Einige Beispiele für nicht-einfache Einbettungen werden wir im letzten Kapitel behandeln.

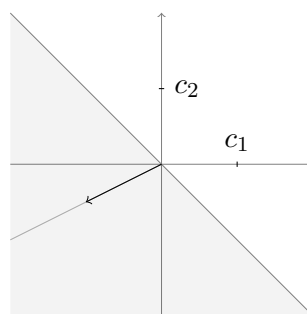


Abbildung 2: $q < 0$ und $\mathcal{C} = \emptyset$

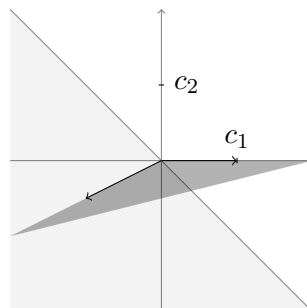


Abbildung 3: $q < 0$ und $\mathcal{C} = \{c_1\}$

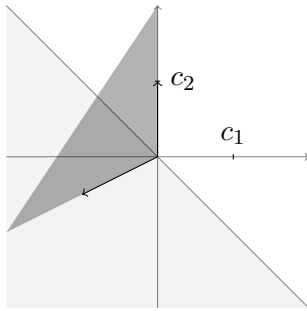


Abbildung 4: $q < 0$ und $\mathcal{C} = \{c_2\}$

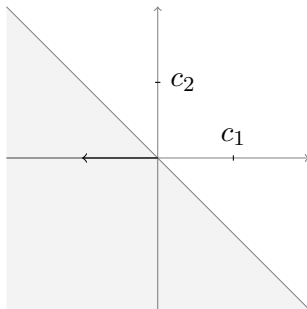


Abbildung 5: $q = 0$ und $\mathcal{C} = \emptyset$

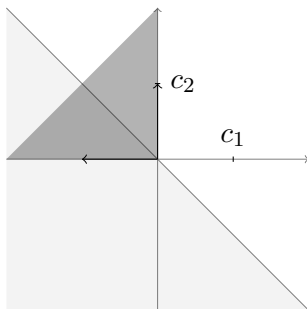


Abbildung 6: $q = 0$ und $\mathcal{C} = \{c_2\}$

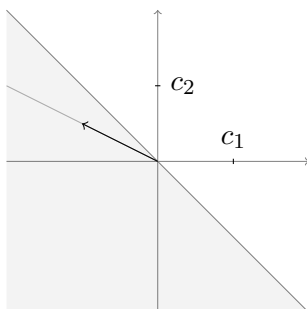


Abbildung 7: $q > 0, p + q \neq 0$ und $\mathcal{C} = \emptyset$

2 Sphärische Varietäten

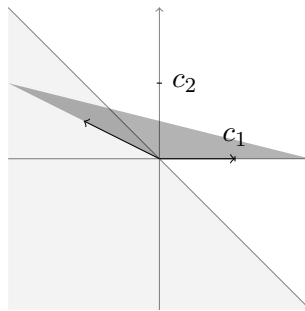


Abbildung 8: $q > 0, p + q \neq 0$ und $\mathcal{C} = \{c_1\}$

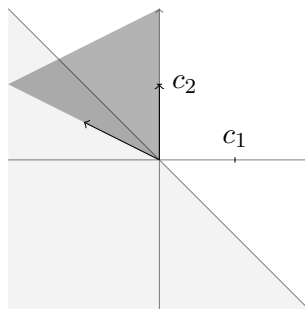


Abbildung 9: $q > 0, p + q \neq 0$ und $\mathcal{C} = \{c_2\}$

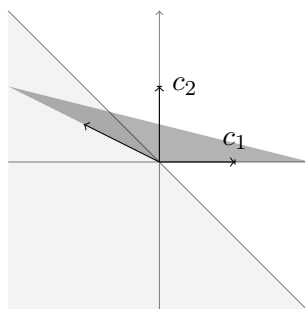


Abbildung 10: $q > 0, p + q \neq 0$ und $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$

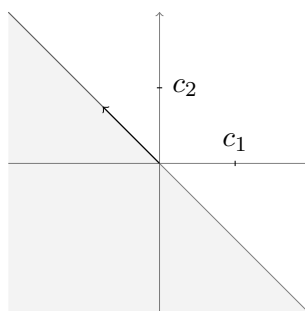


Abbildung 11: $q > 0, p + q = 0$ und $\mathcal{C} = \emptyset$

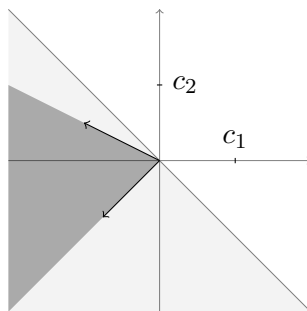


Abbildung 12: Zwei Erzeuger aus $\mathcal{V}(G/H)$, $\mathcal{C} = \emptyset$

3 Quotienten und torische Varietäten

Die letzten Hilfsmittel, die wir benötigen, um die Konstruktion im letzten Kapitel durchführen zu können, werden in diesem Kapitel vorgestellt.

3.1 Quotienten

Operiert eine affine algebraische Gruppe G auf einer Varietät X , so stellt sich die Frage, ob man einen dazugehörigen Quotienten definieren kann. Wir werden nur den Fall betrachten, wo die Gruppe G reduktiv ist. Ohne diese Voraussetzung gilt die wichtige Proposition 3.1.7 nicht.

Definition 3.1.1. Sei G eine reduktive affine algebraische Gruppe, die auf der algebraischen Varietät X operiert. Ein Morphismus von algebraischen Varietäten

$$\pi : X \rightarrow Q$$

heißt *kategorieller Quotient* dieser Gruppenwirkung, falls für jeden G -invarianten Morphismus

$$\phi : X \rightarrow Y$$

genau ein Morphismus

$$\psi : Q \rightarrow Y$$

mit $\phi = \psi \circ \pi$ existiert. Der Quotient ist nach den üblichen Argumenten für universelle Eigenschaften eindeutig bestimmt, falls er existiert. Wir schreiben dann für Q auch X/G .

Definition 3.1.2 (cf. [ADHL, 2.3.1]). Sei G eine reduktive affine algebraische Gruppe, die auf der algebraischen Varietät X operiert. Ein Morphismus von algebraischen Va-

3 Quotienten und torische Varietäten

rietäten

$$\pi : X \rightarrow Q$$

heißt *guter Quotient* dieser Gruppenwirkung, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) π ist affin und G -invariant,
- (ii) $\pi^* : \mathcal{O}_Q \rightarrow (\pi_* \mathcal{O}_X)^G$ ist ein Isomorphismus.

Falls zusätzlich die Fasern von π genau die G -Bahnen sind, so heißt $\pi : X \rightarrow Q$ ein *geometrischer Quotient*.

Für die folgenden vier Propositionen operiere stets eine reductive affine algebraische Gruppe G auf einer algebraischen Varietät X und sei $\pi : X \rightarrow Q$ ein guter Quotient.

Proposition 3.1.3. Es gelten die folgenden Aussagen:

- (i) Ist $Z \subseteq X$ G -invariant und abgeschlossen, so ist $\pi(Z) \subseteq Q$ abgeschlossen,
- (ii) sind $Z, Z' \subseteq X$ G -invariant, abgeschlossen und disjunkt, so sind $\pi(Z)$ und $\pi(Z')$ disjunkt.

Beweis. [ADHL, 2.3.6] □

Proposition 3.1.4. Es ist π surjektiv und für jedes $q \in Q$ gilt:

- (i) Es gibt genau eine abgeschlossene G -Bahn $G \cdot x$ in der Faser $\pi^{-1}(q)$,
- (ii) jede Bahn $G \cdot x' \subseteq \pi^{-1}(q)$ hat $G \cdot x$ in ihrem Abschluss.

Insbesondere parametrisiert π genau die abgeschlossenen G -Bahnen in X .

Beweis. [ADHL, 2.3.7] □

Proposition 3.1.5. Es gelten die folgenden Aussagen:

- (i) Der topologische Raum Q trägt die Quotiententopologie bezüglich $\pi : X \rightarrow Q$,
- (ii) $\pi : X \rightarrow Q$ ist ein kategorieller Quotient.

Beweis. [ADHL, 2.3.8] □

Proposition 3.1.6. Es gelten die folgenden Aussagen:

- (i) Ist $U \subseteq Q$ offen, so ist die Einschränkung $\pi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$ ein guter Quotient,
- (ii) Ist $Z \subseteq X$ G -invariant und abgeschlossen, so ist die Einschränkung $\pi : Z \rightarrow \pi(Z)$ ein guter Quotient.

Beweis. [ADHL, 2.3.9] □

Wir kommen nun zu der Proposition, auf die oben verwiesen wurde.

Proposition 3.1.7. Sei G eine reduktive affine algebraische Gruppe, die auf der affinen Varietät X operiert. Dann gilt:

- (i) $\mathbb{C}[X]^G$ ist eine endlich erzeugte \mathbb{C} -Algebra,
- (ii) der von der Inklusion $\mathbb{C}[X]^G \subseteq \mathbb{C}[X]$ induzierte Morphismus $\pi : X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C}[X]^G)$ ist ein guter Quotient,
- (iii) ist $\mathbb{C}[X]$ normal, so ist auch $\mathbb{C}[X]^G$ normal.

Beweis. [CLS11, 5.0.4 und 5.0.9] □

Schließlich benötigen wir noch die folgende Aussage.

Proposition 3.1.8. Seien G, H reduktive algebraische Gruppen, die auf der Varietät X operieren. Wir nehmen weiter an, dass die beiden Wirkungen kommutieren, d. h. es gilt $g \cdot (h \cdot x) = h \cdot (g \cdot x)$ für alle $g \in G, h \in H, x \in X$. Dann gilt: Falls ein guter Quotient $\pi : X \rightarrow X/H$ existiert, dann operiert G auch auf X/H .

Beweis. Der Beweis verwendet Ideen aus [ANH01, 6.2-6.4]. Wir bezeichnen die Operation von G bzw. H auf X mit op_H bzw. op_G . Dann operiert H auf $G \times X$ durch

$$\text{id} \times \text{op}_H : G \times H \times X \rightarrow G \times X.$$

Wir zeigen nun, dass

$$\text{id} \times \pi : G \times X \rightarrow G \times X/H$$

auch ein guter Quotient ist. Es reicht die Eigenschaften eines guten Quotienten auf einer affinen offenen Überdeckung von $G \times X/H$ nachzuweisen. Daher können wir ohne Einschränkung annehmen, dass X/H affin ist. Dann ist X affin und damit auch $G \times X$. Mit Proposition 3.1.7 ist

$$\pi^* : \mathbb{C}[X/H] \cong \mathbb{C}[X]^H \rightarrow \mathbb{C}[X]$$

3 Quotienten und torische Varietäten

die Inklusion der H -invarianten Elemente. Dann ist

$$(\text{id} \times \pi)^* : \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[X]^H \rightarrow \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[X]$$

auch die Inklusion der H -invarianten Elemente. Also ist $\text{id} \times \pi : G \times X \rightarrow G \times X/H$ ein guter Quotient. Als nächstes betrachten wir den Morphismus

$$\pi \circ \text{op}_G : G \times X \rightarrow X/H.$$

Wegen der Kommutativität der beiden Gruppenwirkungen ist dieser Morphismus H -invariant. Nach der universellen Eigenschaft des kategoriellen Quotienten existiert ein entsprechender Morphismus

$$G \times X/H \rightarrow X/H.$$

Die Eigenschaften einer Gruppenwirkung rechnet man leicht nach. □

3.2 Torische Varietäten

Definition 3.2.1. Eine zu $T := (\mathbb{C}^*)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ isomorphe affine algebraische Gruppe heißt n -dimensionaler *Torus*. Eine irreduzible Varietät X heißt *torisch*, falls $T \subseteq X$ offen enthalten ist und die Wirkung von T auf sich selbst zu einer algebraischen Gruppenwirkung

$$T \times X \rightarrow X$$

fortgesetzt werden kann.

Definition 3.2.2. Sei T ein Torus. Ein Morphismus von algebraischen Gruppen

$$\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow T$$

heißt *Ein-Parameter-Untergruppe* von T . Die Menge aller Ein-Parameter-Untergruppen von T bezeichnen wir mit $\mathcal{X}^*(T)$. Durch die Verknüpfung $(\lambda_1 + \lambda_2)(r) := \lambda_1(r)\lambda_2(r)$ wird $\mathcal{X}^*(T)$ zu einer abelschen Gruppe. Für $\chi \in \mathcal{X}(T)$ und $\lambda \in \mathcal{X}^*(T)$ ist $\chi \circ \lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ein Morphismus von algebraischen Gruppen, also gegeben durch ein $z \in \mathbb{Z}$, da alle solchen Morphismen von der Form $\alpha \mapsto \alpha^z$ sind. Wir erhalten folglich eine natürliche

Paarung

$$\mathcal{X}(T) \times \mathcal{X}^*(T) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Bemerkung 3.2.3 (siehe [CLS11, 1.1]). Sei T ein Torus. Durch die Wahl eines Isomorphismus $T \cong (\mathbb{C}^*)^n = \{x \in \mathbb{C}^n \mid x_i \neq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$ erhalten wir einen Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathcal{X}(T),$$

gegeben durch

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (x \mapsto x_1^{z_1} \cdots x_n^{z_n}),$$

sowie einen Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathcal{X}^*(T),$$

gegeben durch

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (t \mapsto (t^{z_1}, \dots, t^{z_n})).$$

Für die natürliche Paarung $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ gilt dann

$$(m, n) \mapsto \sum_{i=1}^n m_i n_i.$$

Definition 3.2.4 (siehe [CLS11, 3.1.2]). Sei $N := \mathbb{Z}^n$ und $N_{\mathbb{R}} := N \otimes \mathbb{R}$. Ein *Fächer* in $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ ist eine endliche Menge \mathcal{F} von konvexen Kegeln $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$, sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) Jedes $\sigma \in \mathcal{F}$ ist ein spitzer konvexer Kegel, der von endlich vielen Elementen aus \mathbb{Z}^n erzeugt wird,
- (ii) jede Seite eines Kegels aus \mathcal{F} ist in \mathcal{F} ,
- (iii) für alle $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{F}$ ist $\sigma_1 \cap \sigma_2$ eine Seite von σ_1 und σ_2 .

Solche Fächer nennen wir *torische Fächer*, wo eine Verwechslung mit den gefärbten Fächern sphärischer Varietäten möglich ist. Ist \mathbf{F} eine Menge von Kegeln, so definieren

3 Quotienten und torische Varietäten

wir den davon erzeugen Fächer durch

$$\text{fan}(\mathbf{F}) := \{\tau \mid \tau \text{ ist Seite von } \sigma \text{ für ein } \sigma \in \mathbf{F}\}.$$

Diese Schreibweise soll *nicht* implizieren, dass $\text{fan}(\mathbf{F})$ tatsächlich ein wohldefinierter Fächer im Sinne dieser Definition ist, weil Eigenschaft (iii) nicht notwendigerweise erfüllt ist. Dies muss, falls nötig, zusätzlich nachgewiesen werden.

Bemerkung 3.2.5. Es gibt eine bijektive Korrespondenz zwischen den n -dimensionalen normalen torischen Varietäten und den Fächern in \mathbb{R}^n . Eine der Möglichkeiten zu gewissen gegebenen Fächern die entsprechende torische Varietät zu konstruieren, wird weiter unten angegeben. Die restlichen Details sind beispielsweise in [CLS11] zu finden.

Definition 3.2.6. Seien X_1, X_2 normale torische Varietäten mit $(\mathbb{C}^*)^{n_1} \subseteq X_1$ und $(\mathbb{C}^*)^{n_2} \subseteq X_2$. Ein Morphismus

$$\phi : X_1 \rightarrow X_2$$

heißt *torisch*, falls $\phi((\mathbb{C}^*)^{n_1}) \subseteq (\mathbb{C}^*)^{n_2}$ gilt und $\phi|_{(\mathbb{C}^*)^{n_1}}$ ein Gruppenhomomorphismus ist. In diesem Fall erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus

$$\bar{\phi} : \mathcal{X}^*((\mathbb{C}^*)^{n_1}) \rightarrow \mathcal{X}^*((\mathbb{C}^*)^{n_2})$$

mit $\lambda \mapsto \phi|_{(\mathbb{C}^*)^{n_1}} \circ \lambda$, also einen Gitterhomomorphismus

$$\bar{\phi} : \mathbb{Z}^{n_1} \rightarrow \mathbb{Z}^{n_2}.$$

Definition 3.2.7. Seien \mathcal{F}_1 bzw. \mathcal{F}_2 Fächer in \mathbb{R}^{n_1} bzw. \mathbb{R}^{n_2} . Ein Gitterhomomorphismus

$$\bar{\phi} : \mathbb{Z}^{n_1} \rightarrow \mathbb{Z}^{n_2}$$

heißt zu \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 *kompatibel*, falls für jedes $\sigma_1 \in \mathcal{F}_1$ ein $\sigma_2 \in \mathcal{F}_2$ mit $\bar{\phi}_{\mathbb{R}}(\sigma_1) \subseteq \sigma_2$ existiert, wobei $\bar{\phi}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ die lineare Fortsetzung von $\bar{\phi}$ ist.

Proposition 3.2.8. Seien X_1, X_2 torische Varietäten mit Fächern \mathcal{F}_1 in \mathbb{R}^{n_1} und \mathcal{F}_2 in \mathbb{R}^{n_2} . Wir definieren

$$\mathcal{T} := \{\phi : X_1 \rightarrow X_2 \mid \phi \text{ torischer Morphismus}\}$$

$$\mathcal{S} := \{\psi : \mathbb{Z}^{n_1} \rightarrow \mathbb{Z}^{n_2} \mid \psi \text{ zu } \mathcal{F}_1 \text{ und } \mathcal{F}_2 \text{ kompatibler Gitterhomomorphismus}\}.$$

Dann ist die Zuordnung

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &\rightarrow \mathcal{S} \\ \phi &\mapsto \bar{\phi} \end{aligned}$$

wohldefiniert, bijektiv und funktoriell.

Beweis. [CLS11, 3.3.4] □

Satz 3.2.9. Sei \mathcal{F} ein Fächer in \mathbb{R}^n , sodass die enthaltenen eindimensionalen Kegel $\sigma_i \in \mathcal{F}$, die jeweils von $s_i \in \mathbb{Z}^n$ erzeugt seien, $1 \leq i \leq k$, den ganzen Vektorraum \mathbb{R}^n aufspannen. Sei weiter e_1, \dots, e_k die Standardbasis von \mathbb{Z}^k und f_1, \dots, f_k die dazu duale Basis. Ist σ ein beliebiger Kegel, dann bezeichnen wir mit $\sigma(1)$ seine eindimensionalen Seiten. Wir definieren

$$G := \left\{ x \in (\mathbb{C}^*)^k \mid \prod_{i=1}^k x_i^{f_j(s_i)} = 1 \text{ für } 1 \leq j \leq n \right\}.$$

Für jedes $\sigma \in \mathcal{F}$ definieren wir das Polynom

$$X^\sigma := \prod_{\sigma_i \notin \sigma(1)} X_i,$$

bilden das Ideal

$$I := \langle X^\sigma \mid \sigma \in \mathcal{F} \rangle \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_k],$$

und setzen

$$S := \mathbb{V}(I).$$

Für jedes $\sigma \in \mathcal{F}$ definieren wir

$$\tilde{\sigma} := \text{cone}(e_i \mid \sigma_i \in \sigma(1)),$$

und weiter

$$\tilde{\mathcal{F}} := \text{fan}(\{\tilde{\sigma} \mid \sigma \in \mathcal{F}\}).$$

Dann gelten folgende Aussagen:

3 Quotienten und torische Varietäten

(i) $\tilde{\mathcal{F}}$ ist ein Fächer und $\mathbb{C}^k \setminus S$ die zugehörige torische Varietät mit Torus

$$(\mathbb{C}^*)^k \subseteq \mathbb{C}^k \setminus S,$$

wobei die Toruswirkung linear fortgesetzt wird,

(ii) $G \subseteq (\mathbb{C}^*)^k$ ist eine abgeschlossene Untergruppe und operiert daher auf $\mathbb{C}^k \setminus S$,

(iii) es gibt einen guten Quotienten

$$\pi : \mathbb{C}^k \setminus S \rightarrow (\mathbb{C}^k \setminus S)/G,$$

(iv) $(\mathbb{C}^k \setminus S)/G$ ist die torische Varietät zum Fächer \mathcal{F} ,

(v) der Morphismus π ist torisch und

$$\bar{\pi} : \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}^n$$

bildet $e_i \mapsto s_i$ ab.

Definieren wir für $\tilde{\sigma} \in \tilde{\mathcal{F}}$ die offene Teilmenge $U_{\tilde{\sigma}} := \{\prod_{e_i \notin \tilde{\sigma}} X_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{C}^k \setminus S$, dann gilt außerdem $\pi^{-1}(\pi(U_{\tilde{\sigma}})) = U_{\tilde{\sigma}}$ und $U_{\tilde{\sigma}}$ ist affin.

Beweis. [CLS11, 5.1.1 bis 5.1.11] □

Proposition 3.2.10. Sei $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ eine Inklusion von Fächern in \mathbb{R}^n und seien X_1, X_2 die zugehörigen torischen Varietäten. Dann ist der torische Morphismus $\iota : X_1 \rightarrow X_2$, der vom Gitterhomomorphismus $id : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ induziert wird, eine offene Einbettung.

Beweis. Folgt aus [CLS11, 3.2.6]. □

4 Konstruktion der sphärischen Einbettungen von $SL(n)/SL(n-1)$

Das Ziel dieses Kapitels ist es, gewisse sphärische Einbettungen von

$$SL(n)/SL(n-1) =: G/H$$

mit $n \geq 3$ explizit zu konstruieren, darunter alle einfachen. Wir führen zunächst die Bezeichnungen $C_1 := \mathbb{V}(X_n) \subseteq G/H$ und $C_2 := \mathbb{V}(Y_1) \subseteq G/H$ für die B -invarianten Primdivisoren von G/H ein. Die Querstriche, die üblicherweise für den Übergang zur Äquivalenzklasse geschrieben werden, lassen wir in diesem Kapitel weg (wir hätten hier sonst $\mathbb{V}(\overline{X_n})$ und $\mathbb{V}(\overline{Y_1})$ schreiben müssen). Wir betrachten die Inklusion

$$G/H = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i Y_i - 1\right) \subseteq \mathbb{A}^{2n} \setminus (\mathbb{V}(X_1, \dots, X_n) \cup \mathbb{V}(Y_1, \dots, Y_n)) =: A$$

und lassen G wie bisher auf $\mathbb{A}^{2n} = \mathbb{C}^n \oplus (\mathbb{C}^n)^*$ operieren. Sei $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ die Standardbasis von \mathbb{R}^{2n} . Für die spätere Verwendung setzen wir $e := \sum_{i=1}^n e_i$, $f := \sum_{i=1}^n f_i$ und bezeichnen mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt in \mathbb{R}^{2n} . Es bezeichne

$$\mathcal{C}^{ij} := \text{cone}(\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\} \setminus \{e_i, f_j\})$$

den entsprechenden Kegel in \mathbb{R}^{2n} . Sei nun

$$\mathcal{F}_A := \text{fan}\left(\bigcup_{i,j=1}^n \{\mathcal{C}^{ij}\}\right).$$

Dann ist \mathcal{F}_A ein wohldefinierter torischer Fächer und A die entsprechende torische Varietät (siehe Satz 3.2.9), die außerdem G -invariant ist. Wir werden als nächstes geeignete Fächer \mathcal{F}_Q mit $\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{F}_Q$ konstruieren und offene Einbettungen von torischen Varietäten $A \subseteq Q$ erhalten (siehe Proposition 3.2.10). Die gesuchte sphärische Varietät wird dann eine Hyperfläche in Q sein.

4.1 Transformation des gefärbten Fächers

Gegeben sei der gefärbte Fächer \mathbf{F} einer nichttrivialen sphärischen Einbettung von G/H . Seien

$$(p_1, q_1), \dots, (p_r, q_r) \in \mathcal{V}(G/H)$$

die Erzeuger der eindimensionalen Kegel, die in \mathbf{F} vorkommen und entgegen dem Uhrzeigersinn geordnet. Wir können für alle $1 \leq a \leq r$ ohne Einschränkung $p_a, q_a \in \mathbb{Z}$ teilerfremd wählen. Sei \mathbf{T} die Menge der spitzen konvexen Kegel in \mathbb{R}^{2n} . Wir setzen nun

$$v_a := p_a e + q_a f$$

für $1 \leq a \leq r$, sowie

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_a^{ij} &:= \text{cone}(\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n, v_a\} \setminus \{e_i, f_j\}) \\ \mathcal{C}_a^{ej} &:= \text{cone}(\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n, v_a\} \setminus \{f_j\}) \\ \mathcal{C}_a^{if} &:= \text{cone}(\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n, v_a\} \setminus \{e_i\}) \\ \mathcal{C}_a^{ef} &:= \text{cone}(\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n, v_a\}) \\ \mathcal{C}_{ab}^{ij} &:= \text{cone}(\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n, v_a, v_b\} \setminus \{e_i, f_j\}) \end{aligned}$$

für $1 \leq a, b \leq r$ und $1 \leq i, j \leq n$. Wir definieren die Abbildung

$$\Phi : \mathbf{F} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{T})$$

durch

$$\begin{aligned}
 (0, \emptyset) &\mapsto \bigcup_{i,j=1}^n \{C^{ij}\} \\
 (\text{cone}((p_a, q_a), \emptyset), \emptyset) &\mapsto \bigcup_{i,j=1}^n \{C_a^{ij}\} \\
 (\text{cone}((p_a, q_a), c_1), \{C_1\}) &\mapsto \bigcup_{j=1}^n \{C_a^{ej}\} \\
 (\text{cone}((p_a, q_a), c_2), \{C_2\}) &\mapsto \bigcup_{i=1}^n \{C_a^{if}\} \\
 (\text{cone}((p_a, q_a), c_1, c_2), \{C_1, C_2\}) &\mapsto \{C_a^{ef}\} \\
 (\text{cone}((p_a, q_a), (p_{a+1}, q_{a+1})), \emptyset) &\mapsto \bigcup_{i,j=1}^n \{C_{a,a+1}^{ij}\}
 \end{aligned}$$

für $1 \leq a \leq r$. Wir sehen, dass andere gefärbte Kegel als die auf der linken Seite angegebenen nicht vorkommen können.

Proposition 4.1.1. Die Abbildung Φ ist wohldefiniert.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die Kegel auf der rechten Seite alle spitz sind. Da die gefärbten Kegel $(\text{cone}((p_a, q_a), c_1), \{C_1\})$ mit $q_a = 0$ und $(\text{cone}((p_a, q_a), c_2), \{C_2\})$ mit $p_a = 0$ nicht vorkommen können, werden alle Kegel bis auf die der Form C_a^{ef} von linear unabhängigen Vektoren erzeugt und sind daher spitz. Für C_a^{ef} muss $p_a > 0$ oder $q_a > 0$ gelten. Wir können also $\alpha, \beta > 0$ so wählen, dass

$$\alpha p_a + \beta q_a > 0$$

gilt. Ein $0 \neq v \in C_a^{ef}$ hat die Form

$$v = \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_n e_n + \delta_1 f_1 + \dots + \delta_n f_n + \epsilon v_a$$

mit $\gamma_i, \delta_i, \epsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $1 \leq i \leq n$ und mindestens ein Koeffizient ist nicht Null. Damit ist

$$\langle v, \alpha e + \beta f \rangle > 0.$$

Da dies für alle $0 \neq v \in C_a^{ef}$ gilt, ist der Kegel spitz. □

4 Konstruktion der sphärischen Einbettungen von $\mathrm{SL}(n)/\mathrm{SL}(n-1)$

Wir setzen nun

$$\mathcal{F}_Q := \mathrm{fan}\left(\bigcup \Phi(\mathbf{F})\right).$$

Es ist nicht klar, ob \mathcal{F}_Q in jedem Fall ein wohldefinierter torischer Fächer ist. Wir werden für den Rest dieses Kapitels daher *voraussetzen*, dass \mathcal{F}_Q ein wohldefinierter torischer Fächer ist. Aber zuvor geben wir noch zwei hinreichende Bedingungen dafür an.

Proposition 4.1.2. Es ist \mathcal{F}_Q ein wohldefinierter torischer Fächer, falls in \mathbf{F} keine gefärbten Kegel enthalten sind, die beide Farben enthalten.

Beweis. Da alle Kegel in $\cup\Phi(\mathbf{F})$ spitz sind, müssen wir nur noch zeigen, dass für je zwei Kegel aus $\cup\Phi(\mathbf{F})$ deren Durchschnitt eine Seite von beiden ist. Sind E_1, E_2 Mengen von Vektoren, die jeweils einen der beiden Kegel erzeugen, so reicht es ein $w \in \mathbb{R}^{2n}$ zu finden, sodass $\langle v, w \rangle > 0$ für alle $v \in E_1 \setminus E_2$, $\langle v, w \rangle < 0$ für alle $v \in E_2 \setminus E_1$ und $\langle v, w \rangle = 0$ für alle $v \in E_1 \cap E_2$ gilt. Wir werden für alle Fälle ein solches w angeben. Wir wählen also zwei Kegel $\mathcal{C}_{a_1 b_1}^{i_1 j_1}$ und $\mathcal{C}_{a_2 b_2}^{i_2 j_2}$, wobei für $\alpha = 1, 2$ gegebenenfalls auch $i_\alpha = e$ und $j_\alpha = f$ zugelassen ist sowie a_α oder b_α weggelassen werden können. Wir betrachten zunächst $\widetilde{E}_1 := \{v_{a_1}, v_{b_1}\}$ und $\widetilde{E}_2 := \{v_{a_2}, v_{b_2}\}$. Da die v_{a_α} und v_{b_α} von den entsprechenden Vektoren des Fächers in \mathbb{Q}^2 kommen, existieren $\eta, \theta \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle v, \eta e + \theta f \rangle \begin{cases} > 0 \text{ für } v \in \widetilde{E}_1 \setminus \widetilde{E}_2, \\ < 0 \text{ für } v \in \widetilde{E}_2 \setminus \widetilde{E}_1, \\ = 0 \text{ für } v \in \widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2. \end{cases}$$

Nun führen wir die Fallunterscheidung durch. Erster Fall: $i_1, i_2, j_1, j_2 \notin \{e, f\}$. Dann dann erfüllt $w := \eta e_{i_1} + \theta f_{i_1} + N(e_{i_2} - e_{i_1} + f_{j_2} - f_{j_1})$ für $N > 0$ groß genug das gewünschte. Zweiter Fall: $i_1 = e$ (dann ist $j_1 \neq f$) und $i_2, j_2 \notin \{e, f\}$. In diesem Fall kann wegen der Lage der Vektoren in \mathbb{Q}^2 immer $\eta > 0$ gewählt werden. Dann erfüllt $w := \eta e_{i_2} + \theta f_{j_2} + N(f_{j_2} - f_{j_1})$ für $N > 0$ groß genug das gewünschte. Dritter Fall: $i_1 = e$ und $i_2 = e$. Dann kann $\eta = 0$ gewählt werden und $w := \theta f_{j_1} + N(f_{j_2} - f_{j_1})$ für $N > 0$ groß genug erfüllt das gewünschte. Vierter Fall: $i_1 = e$ und $j_2 = f$. Dann können $\eta > 0$ und $\theta < 0$ gewählt werden. Dann erfüllt $w := \eta e_{i_2} + \theta f_{j_1}$ das gewünschte. Die restlichen Fälle mit $i_2 = e$ gehen analog. \square

Proposition 4.1.3. Es ist \mathcal{F}_Q ein wohldefinierter torischer Fächer, falls \mathbf{F} der gefärbte Fächer einer einfachen sphärischen Einbettung ist.

Beweis. Mit der vorhergehenden Proposition müssen wir nur noch den Fall prüfen, wo der gefärbte Kegel der einfachen sphärischen Einbettung beide Farben enthält. Dazu werden wir zeigen, dass C_a^{ij} (und damit automatisch auch C^{ij}) für $1 \leq i, j \leq n$ eine Seite von C_a^{ef} ist. Wir können ähnlich wie in der vorherigen Proposition η, θ mit $\langle v_a, \eta e + \theta f \rangle = 0$ finden und wegen der Lage von v_a können wir $\eta, \theta > 0$ wählen. Das Funktional $\langle \cdot, \eta e_i + \theta f_j \rangle$ ist dann nichtnegativ auf C_a^{ef} und genau auf $C_a^{ef} \setminus C_a^{ij}$ positiv. \square

4.2 Der gute Quotient

Nach Satz 3.2.9 erhalten wir die torische Varietät Q zum Fächer \mathcal{F}_Q als guten Quotienten

$$\pi : \mathbb{A}^{2n+r} \setminus S \rightarrow Q$$

einer Gruppenwirkung. Die Koordinatenfunktionen von \mathbb{A}^{2n+r} seien mit

$$X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_r$$

bezeichnet. Nach Satz 3.2.9 ist $2n + r$ tatsächlich die richtige Dimension, da in \mathcal{F}_Q genau $2n + r$ eindimensionale Kegel vorkommen. Auch die Gruppe ist durch die eindimensionalen Kegel festgelegt. Nach Satz 3.2.9 handelt es sich um die Untergruppe von $(\mathbb{C}^*)^{2n+r}$, die durch die Gleichungen

$$X_i Z_1^{p_1} \cdots Z_r^{p_r} = 1 \text{ und } Y_i Z_1^{q_1} \cdots Z_r^{q_r} = 1$$

für $i = 1, \dots, n$ gegeben ist. Wir können sie durch die Koordinaten Z_1, \dots, Z_r parametrisieren und erhalten, dass die Gruppe ein r -dimensionaler Torus ist. Die Wirkung können wir dann als Wirkung von $(\mathbb{C}^*)^r$ auf \mathbb{A}^{2n+r} wie folgt schreiben: Für

$$\mathbb{A}^{2n+r} = \mathbb{C}^n \oplus (\mathbb{C}^n)^* \oplus \mathbb{C}^r$$

operiert $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in (\mathbb{C}^*)^r$ linear durch

$$\begin{aligned} \lambda \cdot v &= \lambda_1^{-p_1} \cdots \lambda_r^{-p_r} v && \text{für } v \in \mathbb{C}^n, \\ \lambda \cdot v &= \lambda_1^{-q_1} \cdots \lambda_r^{-q_r} v && \text{für } v \in (\mathbb{C}^n)^*, \\ \lambda \cdot (v_1, \dots, v_r) &= (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_r v_r) && \text{für } (v_1, \dots, v_r) \in \mathbb{C}^r. \end{aligned}$$

4 Konstruktion der sphärischen Einbettungen von $\mathrm{SL}(n)/\mathrm{SL}(n-1)$

Diesen Torus werden wir in diesem Abschnitt immer mit $(\mathbb{C}^*)^r$ bezeichnen. Wir lassen außerdem auch G auf \mathbb{A}^{2n+r} linear operieren, indem wir für $\mathbb{C}^n \oplus (\mathbb{C}^n)^*$ die Wirkung auf \mathbb{A}^{2n} übernehmen und jedes $g \in G$ auf \mathbb{C}^r als Identität operieren lassen. Da jedes $g \in G$ auf den ersten beiden direkten Summanden linear, jedes $\lambda \in (\mathbb{C}^*)^r$ auf diesen durch Multiplikation mit demselben Skalar operiert und G auf dem dritten direkten Summanden als Identität operiert, sehen wir, dass die beiden Wirkungen kommutieren. Als nächstes wollen wir S bzw. $\mathbb{A}^{2n+r} \setminus S$ bestimmen, wobei erstmals auch die Informationen der nicht-eindimensionalen Kegel in \mathcal{F}_Q eingehen werden. Wir setzen

$$V := \mathbb{A}^{2n+r} \setminus S$$

und definieren folgende Teilmengen von \mathbb{A}^{2n+r} :

$$S_X := \mathbb{V}(X_1, \dots, X_n)$$

$$S_Y := \mathbb{V}(Y_1, \dots, Y_n)$$

$$S_* := \mathbb{V}(X_1, \dots, X_n) \cup \mathbb{V}(Y_1, \dots, Y_n)$$

$$U^a := \left\{ \prod_{k \neq a} Z_k \neq 0 \right\}$$

$$U^{ab} := \left\{ \prod_{k \neq a, b} Z_k \neq 0 \right\}$$

$$U_X^a := U^a \setminus S_X$$

$$U_Y^a := U^a \setminus S_Y$$

$$U_*^a := U^a \setminus S_*$$

$$U_*^{ab} := U^{ab} \setminus S_*$$

für $1 \leq a, b \leq r$. Wir definieren schließlich die Indexmengen

$$I_2 := \{(a, b) \mid (\mathrm{cone}((p_a, q_a), (p_b, q_b)), \emptyset) \in \mathbf{F}\}$$

$$I_e := \{a \mid (\mathrm{cone}((p_a, q_a), c_1), \{C_1\}) \in \mathbf{F}\}$$

$$I_f := \{a \mid (\mathrm{cone}((p_a, q_a), c_2), \{C_2\}) \in \mathbf{F}\}$$

$$I_{ef} := \{a \mid (\mathrm{cone}((p_a, q_a), c_1, c_2), \{C_1, C_2\}) \in \mathbf{F}\}.$$

Proposition 4.2.1. Es gilt:

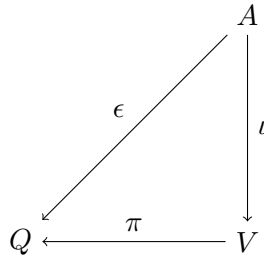
$$V = \left(\bigcup_{a=1}^r U_*^a \right) \cup \left(\bigcup_{(a,b) \in I_2} U_*^{ab} \right) \cup \left(\bigcup_{a \in I_e} U_Y^a \right) \cup \left(\bigcup_{a \in I_f} U_X^a \right) \cup \left(\bigcup_{a \in I_{ef}} U^a \right).$$

Beweis. Mit den Bezeichnungen von Satz 3.2.9 müssen wir $\mathbb{C}^k \setminus S$ bestimmen. Nach der Konstruktion von S sehen wir aber, dass wir genauso $\mathbb{C}^k \setminus S$ für jeden Kegel im Fächer einzeln bestimmen und dann die so erhaltenen offenen Teilmengen vereinigen können. Es ist sogar ausreichend, wenn mindestens die maximalen Kegel berücksichtigt worden sind. Genau dies ist hier geschehen. Unklar könnte allenfalls sein, ob ein Kegel der Form \mathcal{C}_a^{ef} tatsächlich alle jeweils von $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ und v_a erzeugten eindimensionalen Kegel als Seiten enthält. Aber dies ergibt sich aus der Kompatibilität mit den Kegeln \mathcal{C}_a^{ij} für $1 \leq i, j \leq n$. \square

Da alle Mengen, die in der obigen Proposition vorkommen, G -invariant sind, operiert G auch auf V . Nach Proposition 3.1.8 erhalten wir eine Operation von G auf Q . Sei nun $\epsilon : A \rightarrow Q$ die von $\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{F}_Q$ induzierte torische offene Einbettung. Wir definieren den G -äquivarianten torischen Morphismus

$$\iota : A \rightarrow V$$

durch $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, 1, \dots, 1)$. Wegen $\bar{\pi} \circ \bar{\iota} = \bar{\epsilon}$ ist ι wohldefiniert und wir erhalten das folgende kommutative Diagramm:



Wir betrachten nun

$$\tilde{V} := \mathbb{V} \left(\sum_{i=1}^n X_i Y_i - Z_1^{-p_1 - q_1} \dots Z_r^{-p_r - q_r} \right) \subseteq V.$$

Da \tilde{V} sowohl G - als auch $(\mathbb{C}^*)^r$ -invariant ist, erhalten wir (nach Proposition 3.1.3) eine

4 Konstruktion der sphärischen Einbettungen von $\mathrm{SL}(n)/\mathrm{SL}(n-1)$

abgeschlossene Teilmenge

$$\tilde{Q} := \pi(\tilde{V}) \subseteq Q,$$

auf der G operiert und einen guten Quotienten

$$\tilde{\pi} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{Q}$$

durch Einschränkung von π (Proposition 3.1.6).

Hilfssatz 4.2.2. Sei $f : A \rightarrow B$ eine stetige Abbildung topologischer Räume und $X \subseteq A$. Dann gilt $f(\overline{X}) \subseteq \overline{f(X)}$.

Beweis. Sei $x \notin \overline{f(X)}$. Dann gibt es eine offene Umgebung U_x von x mit $U_x \cap f(X) = \emptyset$. Es folgt $f^{-1}(U_x) \cap f^{-1}(f(X)) = \emptyset$, also $f^{-1}(U_x) \cap X = \emptyset$. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(U_x)$ offen. Falls also $f(z) = x$, so folgt $z \notin \overline{X}$, also $x \notin f(\overline{X})$. \square

Proposition 4.2.3. In Q gilt $\overline{\pi(\iota(G/H))} = \tilde{Q}$.

Beweis. Die Inklusion „ \subseteq “ ist klar, da \tilde{Q} eine abgeschlossene Teilmenge von Q ist, die $\pi(\iota(G/H))$ enthält.

Zu „ \supseteq “: $\pi^{-1}(\pi(\iota(G/H)))$ ist $(\mathbb{C}^*)^r$ -invariant und enthält

$$\mathbb{V} \left(\sum_{i=1}^n X_i Y_i - Z_1^{-p_1 - q_1} \dots Z_r^{-p_r - q_r}, Z_1 - 1, \dots, Z_r - 1 \right),$$

also folgt

$$(\mathbb{C}^*)^r \cdot \mathbb{V} \left(\sum_{i=1}^n X_i Y_i - Z_1^{-p_1 - q_1} \dots Z_r^{-p_r - q_r}, Z_1 - 1, \dots, Z_r - 1 \right) \subseteq \pi^{-1}(\pi(\iota(G/H))).$$

Eine einfache Rechnung zeigt

$$(\mathbb{C}^*)^r \cdot \mathbb{V} \left(\sum_{i=1}^n X_i Y_i - Z_1^{-p_1 - q_1} \dots Z_r^{-p_r - q_r}, Z_1 - 1, \dots, Z_r - 1 \right) = \tilde{V} \cap \{Z_1 \cdots Z_r \neq 0\}$$

und damit folgt wegen der Irreduzibilität von \tilde{V} und Hilfssatz 4.2.2

$$\tilde{Q} = \pi(\tilde{V}) = \pi(\overline{\tilde{V} \cap \{Z_1 \cdots Z_r \neq 0\}}) \subseteq \overline{\pi(\iota(G/H))}.$$

\square

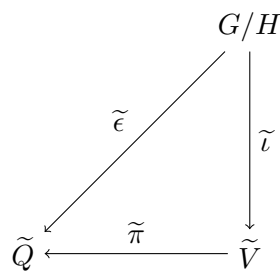
Korollar 4.2.4. Es ist \tilde{Q} eine sphärische Einbettung von G/H .

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass \tilde{V} nach Lemma 1.4.5, ähnlich Proposition 1.4.7, faktoriell ist, also insbesondere normal. Damit ist auch der gute Quotient \tilde{Q} normal (Proposition 3.1.7). Da nach der vorherigen Proposition \tilde{Q} der Abschluss von G/H in Q und außerdem G -invariant ist, folgt, dass G/H in \tilde{Q} offen ist (nach Proposition 1.2.2). \square

4.3 Die invarianten Primdivisoren

Nachdem wir im vorherigen Abschnitt \tilde{Q} als sphärische Einbettung von G/H erkannt haben, wollen wir nun zeigen, dass \mathbb{F} tatsächlich ihr gefärbter Fächer ist. Zunächst überprüfen wir die eindimensionalen Kegel, die den G -invarianten Primdivisoren entsprechen.

Bemerkung 4.3.1. Durch Einschränkung des kommutativen Diagramms oben erhalten wir das folgende kommutative Diagramm:



Es induziert $\tilde{\epsilon}$ einen G -äquivalenten Isomorphismus der Funktionenkörper

$$\tilde{\epsilon}^* : \mathbb{C}(\tilde{Q}) = \mathbb{C}(\tilde{V})^{(\mathbb{C}^*)^r} \rightarrow \mathbb{C}(G/H),$$

der folgendermaßen abbildet:

$$\begin{aligned}
 \frac{X_i}{Z_1^{-p_1} \dots Z_r^{-p_r}} &\mapsto X_i \\
 \frac{Y_i}{Z_1^{-q_1} \dots Z_r^{-q_r}} &\mapsto Y_i
 \end{aligned}$$

für $1 \leq i \leq n$.

4 Konstruktion der sphärischen Einbettungen von $SL(n)/SL(n-1)$

Proposition 4.3.2. Die G -invarianten Primdivisoren von \tilde{Q} sind genau die Teilmengen $\tilde{\pi}(\mathbb{V}(Z_i))$ für $1 \leq i \leq r$. Der Primdivisor $\tilde{\pi}(\mathbb{V}(Z_i))$ induziert die diskrete Valuation $(p_i, q_i) \in \mathcal{V}(G/H)$.

Beweis. Zunächst überdecken die Teilmengen $\tilde{\pi}(\mathbb{V}(Z_i))$ für $1 \leq i \leq r$ zusammen ganz $\tilde{Q} \setminus G/H$. Für ein $1 \leq i \leq r$ setzen wir dann $U_i := \{X_n Y_1 Z_1 \cdots Z_{i-1} Z_{i+1} \cdots Z_r \neq 0\} \subseteq V$. Mit Satz 3.2.9 gilt

$$\pi^{-1}(\pi(U_i)) = U_i$$

und U_i ist affin. Insbesondere erhalten wir einen eingeschränkten guten Quotienten

$$\pi|_{U_i} : U_i \rightarrow \pi(U_i).$$

Deshalb ist $\tilde{\pi}(U_i \cap \tilde{V}) \subseteq \tilde{Q}$ eine affine offene Teilmenge. Wenn wir

$$R := \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_r]$$

definieren, dann ist ihr Koordinatenring

$$\left(R_{X_n Y_1 Z_1 \cdots Z_{i-1} Z_{i+1} Z_r} \left/ \left\langle \sum_{i=1}^n X_i Y_i - Z_1^{-p_1 - q_1} \cdots Z_r^{-p_r - q_r} \right\rangle \right. \right)^{(\mathbb{C}^*)^r}.$$

Der Durchschnitt von $\tilde{\pi}(\mathbb{V}(Z_i))$ mit dieser offenen Teilmenge ist durch das dortige Primelement $\tau := Z_i X_n^r Y_1^s$ gegeben, wobei $r, s \in \mathbb{Z}$ so gewählt sind, dass $rp_i + sq_i = 1$ gilt (dies ist möglich, da wir oben p_i und q_i teilerfremd gewählt haben). Sei nun ν die von $\tilde{\pi}(\mathbb{V}(Z_i))$ induzierte diskrete Valuation. Es gilt $p_i + q_i < 0$, d.h. $p_i < 0$ oder $q_i < 0$. Wir nehmen $p_i < 0$ an, für $q_i < 0$ rechnen wir analog mit p und q bzw. X_n und Y_1 vertauscht. Wir sehen

$$\frac{Z_1^{-p_1} \cdots Z_r^{-p_r}}{X_n} \in (\tau^{-p_i}), \text{ aber } \frac{Z_1^{-p_1} \cdots Z_r^{-p_r}}{X_n} \notin (\tau^{-p_i+1}).$$

Ebenso ist

$$\frac{Z_1^{-p_1 - q_1} \cdots Z_r^{-p_r - q_r}}{X_n Y_1} \in (\tau^{-p_i - q_i}), \text{ aber } \frac{Z_1^{-p_1 - q_1} \cdots Z_r^{-p_r - q_r}}{X_n Y_1} \notin (\tau^{-p_i - q_i + 1}).$$

Es folgt

$$\nu\left(\frac{X_n}{Z_1^{-p_1} \cdots Z_r^{-q_r}}\right) = p_i \text{ und } \nu\left(\frac{X_n Y_1}{Z_1^{-p_1-q_1} \cdots Z_r^{-p_r-q_r}}\right) = p_i + q_i,$$

und damit auch $\nu\left(\frac{Y_1}{Z_1^{-q_1} \cdots Z_r^{-q_r}}\right) = q_i.$

Mit dem Isomorphismus $\mathbb{C}(\tilde{Q}) \rightarrow \mathbb{C}(G/H)$ aus Bemerkung 4.3.1 sehen wir, dass dies genau $\nu = (p_i, q_i)$ bedeutet. □

4.4 Die Bahnen

Als letztes müssen wir noch die zweidimensionalen Kegel überprüfen. Wir beginnen mit den zweidimensionalen Kegeln, die von zwei linear unabhängigen Elementen aus $\mathcal{V}(G/H)$ erzeugt werden und deshalb keine Farben enthalten.

Proposition 4.4.1. Für $1 \leq i, i+1 \leq r$ gilt:

$$\tilde{\pi}(\mathbb{V}(Z_i)) \cap \tilde{\pi}(\mathbb{V}(Z_{i+1})) \neq \emptyset \Leftrightarrow (\text{cone}((p_i, q_i), (p_{i+1}, q_{i+1})), \emptyset) \in \mathbf{F}.$$

Beweis. Da $\tilde{\pi}$ ein guter Quotient ist, gilt $\tilde{\pi}(\mathbb{V}(Z_i)) \cap \tilde{\pi}(\mathbb{V}(Z_{i+1})) = \tilde{\pi}(\mathbb{V}(Z_i) \cap \mathbb{V}(Z_{i+1}))$. Mit Proposition 4.2.1 sehen wir, dass $\emptyset \neq \mathbb{V}(Z_i) \cap \mathbb{V}(Z_{i+1}) \subseteq \tilde{V}$ genau dann gilt, wenn $(\text{cone}((p_i, q_i), (p_{i+1}, q_{i+1})), \emptyset) \in \mathbf{F}$. □

Als letztes behandeln wir die zweidimensionalen Kegel mit Farben.

Proposition 4.4.2. Es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(\mathbb{V}(X_n)) &= \overline{C_1} \subseteq \tilde{Q} \\ \tilde{\pi}(\mathbb{V}(Y_1)) &= \overline{C_2} \subseteq \tilde{Q}. \end{aligned}$$

Beweis. Da $\mathbb{V}(X_n) \subseteq \tilde{V}$ irreduzibel ist, folgt mit Hilfssatz 4.2.2

$$\tilde{\pi}(\mathbb{V}(X_n)) = \tilde{\pi}\left(\overline{\{Z_1 \cdots Z_r \neq 0\} \cap \mathbb{V}(X_n)}\right) \subseteq \overline{\tilde{\pi}(\{Z_1 \cdots Z_r \neq 0\} \cap \mathbb{V}(X_n))} = \overline{C_1}.$$

Mit Proposition 3.1.3 ist $\tilde{\pi}(\mathbb{V}(X_n))$ abgeschlossen, also gilt

$$\overline{C_1} = \overline{\tilde{\pi}(\{Z_1 \cdots Z_r \neq 0\} \cap \mathbb{V}(X_n))} \subseteq \overline{\tilde{\pi}(\mathbb{V}(X_n))} = \tilde{\pi}(\mathbb{V}(X_n)).$$

4 Konstruktion der sphärischen Einbettungen von $SL(n)/SL(n-1)$

Die zweite Gleichung geht analog. \square

Proposition 4.4.3. Sei $M \subseteq \mathbb{A}^{2n+r}$ eine G -invariante Teilmenge. Dann gilt:

$$M \subseteq \mathbb{V}(X_n) \Rightarrow M \subseteq \mathbb{V}(X_1, \dots, X_n)$$

$$M \subseteq \mathbb{V}(Y_1) \Rightarrow M \subseteq \mathbb{V}(Y_1, \dots, Y_n).$$

Beweis. Sei $M \not\subseteq \mathbb{V}(X_1, \dots, X_n)$ und G -invariant. Dann existiert ein $v \in M$ mit $X_i(v) \neq 0$ für ein $1 \leq i \leq n$. Also gibt es eine geeignete Koordinatenvertauschung $g \in G$ mit $g \cdot v \notin \mathbb{V}(X_n)$. Also ist $M \not\subseteq \mathbb{V}(X_n)$. Die zweite Implikation geht analog. \square

Proposition 4.4.4. Für $1 \leq i \leq r$ gelten folgende Aussagen:

- (i) $\tilde{\pi}(\mathbb{V}(Z_i))$ enthält eine nichtleere G -invariante Teilmenge, die in $\overline{C_1} \subseteq Q$ liegt genau dann, wenn $(\text{cone}((p_i, q_i), c_1), \{C_1\}) \in \mathbf{F}$ oder $(\text{cone}((p_i, q_i), c_1, c_2), \{C_1, C_2\}) \in \mathbf{F}$,
- (ii) $\tilde{\pi}(\mathbb{V}(Z_i))$ enthält eine nichtleere G -invariante Teilmenge, die in $\overline{C_2} \subseteq Q$ liegt genau dann, wenn $(\text{cone}((p_i, q_i), c_2), \{C_2\}) \in \mathbf{F}$ oder $(\text{cone}((p_i, q_i), c_1, c_2), \{C_1, C_2\}) \in \mathbf{F}$,
- (iii) $\tilde{\pi}(\mathbb{V}(Z_i))$ enthält eine nichtleere G -invariante Teilmenge, die in $\overline{C_1} \cap \overline{C_2}$ liegt genau dann, wenn $(\text{cone}((p_i, q_i), c_1, c_2), \{C_1, C_2\}) \in \mathbf{F}$.

Beweis. Wir beweisen alle drei Aussagen gleichzeitig. Für (i) setzen wir $O := \mathbb{V}(Z_i) \cap \mathbb{V}(X_1, \dots, X_n)$, für (ii) setzen wir $O := \mathbb{V}(Z_i) \cap \mathbb{V}(Y_1, \dots, Y_n)$ und für (iii) setzen wir $O := \mathbb{V}(Z_i) \cap \mathbb{V}(X_1, \dots, X_n) \cap \mathbb{V}(Y_1, \dots, Y_n)$ mit jeweils $O \subseteq \tilde{V}$. Existiert nun eine nichtleere G -invariante Teilmenge mit einer der Eigenschaften, dann liegt sie nach Proposition 4.4.2 und Proposition 4.4.3 in $\tilde{\pi}(O)$. Also ist O nichtleer, was nach Proposition 4.2.1 die Existenz einer der angegebenen gefärbten Kegel erzwingt. Existiert andererseits einer der angegebenen Kegel, dann ist O nach Proposition 4.2.1 nichtleer und $\tilde{\pi}(O)$ ist die gesuchte nichtleere G -invariante Teilmenge. \square

Insgesamt haben wir also unser gewünschtes Ergebnis erhalten.

Satz 4.4.5. Es ist \tilde{Q} eine sphärische Einbettung von G/H und \mathbf{F} ihr gefärbter Fächer.

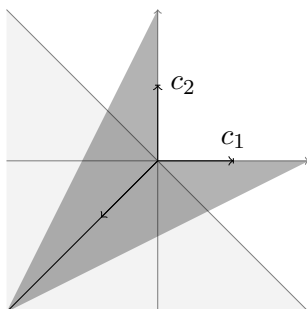
5 Beispiele

Wir verwenden die Resultate aus dem letzten Kapitel, um noch einige Beispiele für nicht-einfache sphärische Einbettungen von $SL(n)/SL(n-1)$ anzugeben.

Beispiel 5.0.6. Wir betrachten den gefärbten Fächer

$$\mathbf{F} := \{(\text{cone}((-1, -1), c_1), \{C_1\}), (\text{cone}((-1, -1), c_2), \{C_2\}), (\text{cone}((-1, -1)), \emptyset), (0, \emptyset)\}.$$

Er ist in folgender Skizze illustriert:



Dieser gefärbte Fächer erfüllt die Voraussetzung von Proposition 4.1.2. Der torische Fächer \mathcal{F}_Q , der mit der Konstruktion von Kapitel 4 aus diesem gefärbten Fächer entsteht, ist im Fächer $\widehat{\mathcal{F}}_Q$ der torischen Varietät \mathbb{P}^{2n} enthalten, den wir durch die Adjunktion von $\text{cone}(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ zu \mathcal{F}_Q erhalten (siehe beispielsweise [CLS11, Example 3.1.10]). Aber die Konstruktion von Kapitel 4 können wir genauso mit $\widehat{\mathcal{F}}_Q$ statt \mathcal{F}_Q durchführen, weil \widetilde{V} unverändert bleibt. Daher erhalten wir die sphärische Einbettung \widetilde{Q} von $SL(n)/SL(n-1)$ als Hyperfläche in \mathbb{P}^{2n} , die durch die homogene Gleichung

$$\sum_{i=1}^n X_i Y_i - Z_1^2 = 0$$

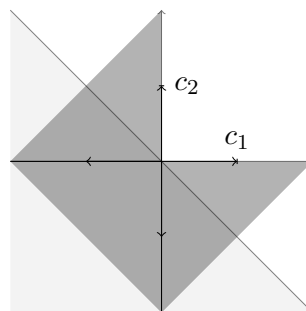
gegeben ist.

5 Beispiele

Beispiel 5.0.7. Wir betrachten den gefärbten Fächer

$$\mathbf{F} := \{(\text{cone}((-1, 0), c_2), \{C_2\}), \\ (\text{cone}((0, -1), c_1), \{C_1\}), \\ (\text{cone}((-1, 0), (0, -1)), \emptyset), \\ (\text{cone}((0, -1)), \emptyset), \\ (\text{cone}((-1, 0)), \emptyset), \\ (0, \emptyset)\}.$$

Er ist in folgender Skizze illustriert:



Dieser gefärbte Fächer erfüllt die Voraussetzung von Proposition 4.1.2. Der torische Fächer \mathcal{F}_Q , der mit der Konstruktion von Kapitel 4 aus diesem gefärbten Fächer entsteht, ist im Fächer $\widehat{\mathcal{F}}_Q$ der torischen Varietät $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ enthalten, den wir durch die Adjunktion von $\text{cone}(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ zu \mathcal{F}_Q erhalten (siehe beispielsweise [CLS11, Example 3.1.12]). Aber die Konstruktion von Kapitel 4 können wir genauso mit $\widehat{\mathcal{F}}_Q$ statt \mathcal{F}_Q durchführen, weil \widetilde{V} unverändert bleibt. Daher erhalten wir die sphärische Einbettung \widetilde{Q} von $SL(n)/SL(n-1)$ als Quadrik

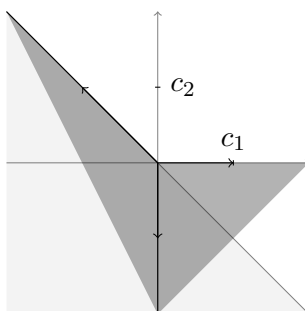
$$\sum_{i=1}^n X_i Y_i - Z_1 Z_2 = 0$$

in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$.

Beispiel 5.0.8. Wir betrachten den gefärbten Fächer

$$\mathbf{F} := \{(\text{cone}((-1, 1), (0, -1)), \emptyset), \\ (\text{cone}((0, -1), c_1), \{C_1\}), \\ (\text{cone}((-1, 1)), \emptyset), \\ (\text{cone}((0, -1)), \emptyset), \\ (0, \emptyset)\}.$$

Er ist in folgender Skizze illustriert:



In diesem Fall gilt mit der Konstruktion von Kapitel 4

$$V = \mathbb{A}^{2n+2} \setminus (\mathbb{V}(X_1, \dots, X_n, Z_1) \cup \mathbb{V}(Y_1, \dots, Y_n)).$$

Weil die Gleichung von \tilde{V} hier $\sum_{i=1}^n X_i Y_i - Z_2 = 0$ lautet, können wir die Variable Z_2 eliminieren und erhalten

$$\tilde{V} \cong \mathbb{A}^{2n+1} \setminus (\mathbb{V}(X_1, \dots, X_n, Z_1) \cup \mathbb{V}(Y_1, \dots, Y_n)).$$

Der Torus $(\mathbb{C}^*)^2$ operiert auf \tilde{V} durch

$$(\lambda_1, \lambda_2) \cdot (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1) = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_1 x_n, \lambda_1^{-1} \lambda_2 y_1, \dots, \lambda_1^{-1} \lambda_2 y_n, \lambda_1 z_1).$$

Nach Vorschalten von $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto (\lambda_1, \lambda_1 \lambda_2)$, was ein Automorphismus von $(\mathbb{C}^*)^2$ ist, operiert der Torus $(\mathbb{C}^*)^2$ auf \tilde{V} durch

$$(\lambda_1, \lambda_2) \cdot (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1) = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_1 x_n, \lambda_2 y_1, \dots, \lambda_2 y_n, \lambda_1 z_1)$$

5 Beispiele

und es folgt

$$\tilde{Q} \cong \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}.$$

Literaturverzeichnis

- [ADHL] ARZHANTSEV, I., U. DERENTHAL, J. HAUSEN und A. LAFACE: *Cox Rings*. <http://www.mathematik.uni-tuebingen.de/~hausen/CoxRings/download.php?name=coxrings.pdf>.
- [ANH01] A'CAMPO-NEUEN, A. und J. HAUSEN: *Toric Prevarieties and Subtorus Actions*. *Geometriae Dedicata*, 87:35–64, 2001.
- [BH08] BATYREV, V. und F. HADDAD: *On the Geometry of $SL(2)$ -equivariant Flips*. *Moscow Mathematical Journal*, 8(4):621–645, 2008.
- [Bri97] BRION, M.: *Variétés sphériques*. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/spheriques.ps>, 1997.
- [CLS11] COX, D., J. LITTLE und H. SCHENCK: *Toric Varieties*, Band 124 der Reihe *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2011.
- [Eis95] EISENBUD, D.: *Commutative Algebra*, Band 150 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1995.
- [Had10] HADDAD, F.: *Spherical Quasihomogeneous $SL(2)$ -Varieties*. Doktorarbeit, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, 2010.
- [Hum98] HUMPHREYS, J.: *Linear Algebraic Groups*, Band 21 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 5. Auflage, 1998.
- [Kno91] KNOP, F.: *The Luna-Vust Theory of Spherical Embeddings*. In: *Proceedings of the Hyderabad Conference on Algebraic Groups (Hyderabad, 1989)*, Seiten 225–249, Manoj Prakashan, Madras, 1991.
- [LV83] LUNA, D. und TH. VUST: *Plongements d'espaces homogènes*. *Comment. Math. Helv.*, 58:186–245, 1983.
- [Oda85] ODA, T.: *Convex Bodies and Algebraic Geometry*, Band 15 der Reihe *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge*. Springer-Verlag, 1985.

Literaturverzeichnis

- [Pau83] PAUER, F.: *Plongements normaux de l'espace homogène $SL(3)/SL(2)$* . In: *Comptes Rendus du 108e Congrès national des Sociétés savantes, Section des Sciences, Fascicule III, C.T.H.S.*, Seiten 87–104, Paris, 1983.
- [Pau89] PAUER, F.: *Normale Einbettungen von sphärischen homogenen Räumen*. In: *DMV Seminar 13*, Seiten 145–156, Basel-Boston-Berlin, 1989.