<u>משפט מרטי:</u> יהא $U \subset \mathbb{C}$ תחום, $\mathcal{F}$ משפחה של פונקציות גזירה מ-U ל-$\mathbb{C}$. אזי $\mathcal{F}$ נורמלית אם ורק אם לכל $K \subset U$ קומפקטית קיים חסם M_K כך שלכל $f \in \mathcal{F}$, מתקיים $f^\sharp\big|_K \leq M_K$.

<u>הוכחה:</u> בכיוון הקל, נניח בשלילה שקיים $K \subset U$ עבורו אין חסם M_K, כלומר קיימת סדרת פונקציות $f_n \in \mathcal{F}$ וסדרת נקודות $z_n \in K$ עבורן $f_n^\sharp(z_n) \to \infty$. על ידי מעבר לתת סדרה ניתן להניח ש-$K \ni z_0 \leftarrow z_n$. נראה שלסדרה זו אין ת"ס שמתכנסת במ"ש על K לפונקציה או לאינסוף, ולכן $\mathcal{F}$ לא נורמלית. ואכן, אם אחרי מעבר לתת-סדרה f_n מתכנסת במ"ש ל-f, אז גם $f_n(z_n) \to f(z_0)$ ו-$f_n'(z_n) \to f'(z_0)$ ולכן נקבל $f_n^\sharp(z_n) \to f^\sharp(z_0)$ (מתוך הנוסחה $g^\sharp(z) = \frac{2|g'(z)|}{1+|g(z)|^2}$). אולם אז $\infty = \lim_{f_n^\sharp(z_n)} = f^\sharp(z_0)$, בסתירה לגזירות f. אם מאידך $f_n \to \infty$ במ"ש על K, החל ממקום מסויים בפרט $|f_n| > 1$ בכל K ונקבל ש-$1/f_n \to 0$ במ"ש, ולכן כמקודם $(1/f_n)^\sharp(z_n) \to 0^\sharp(z_0) = 0$. מצד שני מתקיים תמיד $(1/f_n)^\sharp = f_n^\sharp$, וזה בסתירה לכך ש-$f_n^\sharp(z_n) \to \infty$.

כהכנה לכיוון השני של המשפט, נתאר אפיון שימושי להתכנסות במ"ש. נגדיר לכל קבוצה $A \subset \mathbb{C}$ ופונקציה $f : A \to \mathbb{C}$, $||f||_A \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{|f(z)| : z \in A\}$. בבירור מתקיים ש-$f_n \to 0$ במ"ש ב-A אם ורק אם $||f_n||_A \to 0$, ובאופן כללי יותר $f_n \to g$ במ"ש ב-A אם ורק אם $||f_n - g||_A \to 0$. בסימון הזה קל לראות את הטענה הבאה, המכלילה קריטריון התכנסות מוכר עבור מספרים ממשיים או מרכובים:

<u>טענה:</u> תהא f_n סדרת פונקציות רציפות על A המקיימת

(1) לכל ת"ס של f_n ישנה ת"ס המתכנסת במ"ש ב-A.
(2) אם ת"ס של f_n מתכנסת במ"ש ב-A לפונקציה g, אז $g \equiv 0$.

אזי $f_n \to 0$ במ"ש ב-A.

<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה ש-f_n לא מתכנס ל-0 במ"ש, כלומר לא מתקיים$||f_n||_A \to 0$, כלומר קיים $C > 0$ ות"ס f_{n_k} עם $||f_{n_k}||_A > C$ לכל k. לפי (1) יש ל-f_{n_k} ת"ס מתכנסת במ"ש, ואז לפי (2) הגבול במ"ש הוא 0, אך זו כמובן סתירה. $\square$

נעזר גם בלמה הבאה, שמנצלת את החסימות של $f^\sharp$:

<u>למה:</u> יהא U תחום, $M > 0$, $V \subset U$ פתוחה וקמורה עם $\overline{V} \subset U$ ו-$\operatorname{diam}(V) \leq \frac{1}{2M}$. תהנא f_n סדרת פונקציות גזירות ב-U עם $||f_n^\sharp||_V \leq M$ לכל n. אזי:

(1) לכל n, אם $||f_n||_V > 2$, אז $|f_n(z)| > 1$ לכל $z \in V$.
(2) אם קיימות $z_n \in V$ עם $V \ni z_0 \leftarrow z_n$ ו-$f_n(z_n) \to \infty$ אז $f_n \to \infty$ במ"ש ב-$\overline{V}$.

<u>הוכחה:</u> <u>(1)</u> נסמן $f = f_n$. תהא $z_0 \in V$ עם $|f(z_0)| > 2$. נניח בשלילה שלא מתקיים $|f(z)| > 1$ ב-V, ואז ניתן להגדיר $r = \min\{|w-z_0| : w \in V, |f(w)| \leq 1\}$, כלומר קיים $w_0 \in V$ עם $r = |w_0-z_0| \leq \operatorname{diam}(V) < \frac{1}{2M}$, $|f(w_0)| = 1$, וכן בקבוצה הקמורה $V' = V \cap B(z_0, r)$ מתקיים $|f| > 1$, וכן $f^\sharp < M$. אזי הפונקציה $g = \frac{1}{f}$ מוגדרת וגזירה ב-V', מקיימת $g^\sharp = f^\sharp < M$ ו-$|g| < 1$, ולכן גם $|g'| < g^\sharp < M$, וכן $|g(z_0)| < \frac{1}{2}$. ניקח סדרה $w_m \in V'$ עם $w_n \to w_0$ (לאורך $[z_0, w_0)$). מתקיים $\lim |g(w_m)| = \lim \frac{1}{|f(w_m)|} = \frac{1}{|f(w_0)|} = 1$ אך מצד שני

$$|g(w_m)| - |g(z_0)| \leq |g(w_m) - g(z_0)| \leq M|w_m - z_0| < Mr$$

לכל m, כלומר $|g(w_m)| < |g(z_0)| + rM < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, ולכן גם $1 = \lim |g(w_m)| \leq |g(z_0)| + rM < 1$, בסתירה. $\square$

<u>(2)</u> מההנחה ש-$f_n(z_n) \to \infty$, נקבל שלכל n גדול דיו מתקיים $|f_n(z_n)| > 2$, ואז מ-(1) נקבל ש-$|f_n| > 1$ בכל V, כלומר $|f_n| \geq 1$ ב-$\overline{V}$. לכן $g_n = \frac{1}{f_n}$ מוגדרת ב-$\overline{V}$ ומקיימת $0 < |g_n| \leq 1$ וכן $g_n^\sharp = f_n^\sharp \leq M$ ולכן $|g_n'| \leq M$. לכן (מאי-שיוויון לוקאלי גלובאלי) לכל n כנ"ל ולכל $z, w \in V$ מתקיים $|g_n(z) - g_n(w)| \leq M|z - w|$ ב-V ולכן גם ב-$\overline{V}$. בפרט, g_n מקיימות את תנאי משפט ארצלה-אסקולי, ובפרט לכל ת"ס שלהם יש תת-סדרה מתכנסת במ"ש, שהוא התנאי הראשון בטענה. העובדה ש-$f_n \to \infty$ במ"ש שקולה לכך ש-$g_n \to 0$ במ"ש, ולכן נותר לנו רק להוכיח את התנאי השני בטענה, כלומר שאם g_{n_k} ת"ס שמתכנסת במ"ש ל-g ב-$\overline{V}$ אז $g \equiv 0$. ואכן, נקבל $g_{n_k}(z_{n_k}) = \frac{1}{f_{n_k}(z_{n_k})} \to 0$, ומצד שני $z_{n_k} \to z_0$ ולכן $g_{n_k}(z_{n_k}) \to g(z_0)$, כלומר $g(z_0) = 0$. אך כאמור $g_{n_k} \neq 0$ בכל $\overline{V}$, ולכן מהורוויץ נקבל כי $g \equiv 0$ ב-V ולכן גם ב-$\overline{V}$, כנדרש. $\square$

כעת נוכיח את הכיוון המעניין במשפט מרטי. תהא $\mathcal{F}$ משפחת פונקציות עם נגזרת ספירית חסומה במידה אחידה על קומפקטיות כבמשפט, ותהא $f_n \in \mathcal{F}$ סדרה. אם הסדרה מקיימת את הנחות טענת מונטל, אז מהטענה יש לה ת"ס שמתכנסת במ"ש לפונקציה, כנדרש. אחרת, משלילת ההנחות של טענת מונטל, נקבל שקיימת קבוצה קומפקטית K, כך ש-f_n אינן חסומות על K במידה אחידה. לכן אחרי מעבר לתת-סדרה, קיימות $z_n \in K$ עבורן $f_n(z_n) \to \infty$, ואחרי עוד מעבר

לתת-סדרה, ניתן להניח ש-$z_n \to z_0 \in K$. בה"כ ניתן להניח גם ש-z_0 נקודה פנימית של K: אחרת, נוסיף ל-K כדור סגור עם מרכז ב-z_0 שמוכל כולו ב-U.

יהא M_K החסם על הנגזרת הספירית ב-K, ויהא $r < \frac{1}{4M_K}$ קטן מספיק כך ש-$\overline{B}(z_0, r) \subset K$. אזי $\operatorname{diam} B(z_0, r) < \frac{1}{2M_K}$, כל $f_n^\sharp \le M_K$ ו-$f_n(z_n) \to \infty$ עם $z_n \to z_0 \in B(z_0, r)$. לכן מחלק (2) של הלמה נובע כי $f_n \to \infty$ במ"ש $\overline{B}(z_0, r)$.

כעת, נוכיח ש-f_n מתכנסת ל-∞ במ"ש על קומפקטיות בכל U. נגדיר V בתור קבוצת כל הנקודות $z \in U$ עבורן קיימת סביבה $B(z, r_z) \subset U$ בה $f_n \to \infty$ במ"ש, ונרצה להוכיח ש-$U = V$. הראנו ש-V אינה ריקה (ספציפית $z_0 \in V$), ובבירור V פתוחה מהגדרתה (לכל $z \in V$ גם $B(z, r_z) \subset V$), ולכן מהקשירות של U, מספיק להוכיח גם ש-$U \setminus V$ פתוחה.

תהא $w \in U \setminus V$, ויהא $L = \overline{B}(w, R) \subset U$ כדור קומפקטי עם מרכז ב-w שמוכל כולו ב-U. יהא $r < \min(\frac{R}{2}, \frac{1}{4M_L})$, ונראה שאז $B(w, r) \subset U \setminus V$, כנדרש. אחרת, נקבל שקיימת $z' \in B(w, r) \cap V$. בפרט מתקיים $f_n(z') \to \infty$, או $f_n(z_n) \to \infty$ עבור $z_n = z' \to z'$. היות ש-$r < \frac{R}{2}$ מתקיים $\overline{B}(z', r) \subset \overline{B}(w, R)$ ולכן $f_n^\sharp \le M_L$ בכל $\overline{B(z', r)}$, וכן $\operatorname{diam} B(z', r) = 2r < \frac{1}{2M_L}$. לכן שוב מהלמה, נקבל ש-$f_n \to \infty$ במ"ש ב-$B(z', r)$ – ובפרט גם ב-$B(w, r_w) \subset B(z', r)$, עבור $r_w = r - |z' - w| > 0$, בסתירה לכך ש-$w \notin V$. לכן $U \setminus V$ פתוחה (ולכן בעצם ריקה).