תורת הפונקציות המרוכבות 1 - גן החיות של שקילויות קונפורמיות

במסמך זה נלקט תחומים שונים במישור אשר שקולים קונפורמית ל-D, יחד עם שקילות קונפורמית מפורשת אליו או לתחום שקול אחר. (למעשה רוב השקילויות שלנו יהיו אל $\mathbb{H}$.)

(1) חצי המישור העליון $\mathbb{H} = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$. העתקת מביוס $z \mapsto -\frac{iz+1}{z+i}$ שולחת את D ל-$\mathbb{H}$ – ולהפך (היא הופכית לעצמה). ההעתקות הקונפרמיות מ-$\mathbb{H}$ לעצמו הן המביוסים $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ עם $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ו-$ad-bc > 0$. כמובן שכל חצי-מישור אחר יהיה שקול קונפורמית ל-$\mathbb{H}$ באמצעות העתקה לינארית $z \mapsto az+b$.

(2) זווית החסומה בין שתי קרניים: על ידי העתקה לינארית ניתן להניח כי חיתוך הקרניים הוא בראשית ושאחת מהקרניים היא הציר החיובי, כלומר הזווית היא $U = \{z \neq 0 : 0 < \mathrm{Arg}(z) < \alpha\}$. ההעתקה $z \mapsto z^{\frac{\tau}{2\alpha}} = e^{\frac{\tau}{2\alpha}\mathrm{Log}(z)}$ שולחת את U ל-$\mathbb{H}$.
מקרים פרטיים חשובים: זווית מהצורה $\alpha = \tau/2n$ (עבורם ההעתקה היא $z \mapsto z^n$ אנליטית בכל המישור); הזווית $\alpha = \tau$, שמתאימה למישור פחות קרן $U = \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$. על ידי העתקה לינארית, אפשר להעביר את הקרן לכל קרן אחרת.

(3) סהר: תחום החסום בין שני מעגלים C_1, C_2 הנחתכים ב-2 נקודות, או בין מעגל C וישר ℓ הנחתכים בשתי נקודות: תהא a אחת מנקודות החיתוך, ונתבונן בהעתקת מביוס $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ השולחת את a לאינסוף. אז C_i (או C ו-ℓ) נשלחים לישרים – שכן העתקות מביוס שולחות ישרים ומעגלים לישרים ומעגלים, וישרים מאופיינים בכך שהם עוברים דרך האינסוף (שהיא התמונה של a). לכן הסהר הפך לזווית (ששווה לזווית בין המעגלים או המעגל והישר, לפי נקודת החיתוך השנייה וקונפורמיות ההעתקה), ועברנו למקרה (2).

(4) פס: תחום החסום בין שני ישרים מקבילים. על ידי העתקה לינארית אפשר להעביר את הפס להיות הפס $U = \{z : 0 < \mathrm{Im}(z) < \frac{\tau}{2}\}$. ההעתקה $z \mapsto e^z$ היא שקילות קונפורמית מ-U ל-$\mathbb{H}$ (והענף $z \mapsto \mathrm{Log}(z)$ הוא השקילות בכיוון ההפוך).

(5) סהר מנוון: תחום החסום בין שני מעגלים המשיקים מבפנים. אם a נקודת ההשקה, אז ההעתקה $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ שולחת את נקודת ההשקה לאינסוף, ולכן את המעגלים לישרים מקבילים (הם לא יכולים להחתך, כי המעגלים לא נחתכים באף נקודה חוץ מ-a), שזה מקרה (4). בדומה מתקבל התחום החסום בין ישר ומעגל המשיק לו (כלומר חצי מישור פחות דיסק שנוגע בשפה).

מתרגיל הבית:

(6) גזרת עיגול $\{z : 0 < |z| < R, 0 < \mathrm{Arg}(z) < \alpha\}$: ההעתקה $z \mapsto z^{\pi/\alpha}$ שולחת את הגזרה לגזרת העיגול $\{z : 0 < |z| < R^{\pi/\alpha}, 0 < \mathrm{Arg}(z) < \pi\}$ – אך גזרה זו היא למעשה סהר עם זווית ישרה, החסום בין מעגל וישר (המעגל $\partial B(0, R^{\pi/\alpha})$ והציר הממשי) – זו דוגמה 3, ואפשר להמשיך אל $\mathbb{H}$ כמו משם. שימו לב גם למקרה הפרטי המתקבל עבור $\alpha = 2\pi$, שהוא למעשה $B(0,R) \setminus [0,R)$ – כדור פחות קטע.

(7) מישור בלי שתי קרניים – $\mathbb{C} \setminus ((-\infty,-1] \cup [1,\infty))$. שימו לב שחשוב כאן שמדובר בשתי קרניים שהן מאותו ישר (הציר הממשי). נבצע אינברסיה בנקודה 1, כלומר נפעיל את העתקת המביוס $z \mapsto \frac{1}{z-1}$ (מותר כי 1 לא בתחום). מכיוון שהעתקות מביוס חח"ע, כדי להבין את התחום המתקבל יש להבין כיצד ההעתקה פעלה על הקרניים החסרות $((-\infty,-1] \cup [1,\infty))$. קל לראות שהקרן $[1,\infty]$ עוברת ל-$[0,\infty]$, בעוד שהקרן $[-\infty,-1]$ עוברת לקטע $[-1/2, 0]$. התופעה החשובה שקרתה היא שהקרניים נדבקו אחת לשנייה (כי קודם הן למעשה נפגשו בנקודה באינסוף – שעברה ל-0 על ידי העתקת המביוס, ולכן עכשיו הן הודבקו ב-0). כלומר $z \mapsto \frac{1}{z-1}$ היא שקילות קונפורמית מהמישור בלי שתי קרניים ל-$\mathbb{C} \setminus [-1/2,\infty)$. אך ברגע שנזיז את התחום הזה על ידי הוספת $1/2$, אנו רואים שזה פשוט מישור בלי קרן – ממנו ניתן להגיע ל-$\mathbb{H}$ על ידי הוצאת שורש (דוגמה 2 לעיל, הגרסה המנוות בסוף).

(8) חצי מישור בלי קרן: $\mathbb{H} \setminus \{i \cdot x : x \geq 1\}$. פתרון ראשון: נעלה בריבוע, $z \mapsto z^2$. אם היינו מפעילים את ההעתקה רק על $\mathbb{H}$ היינו מקבלים מישור בלי הקרן $[0,\infty)$, אך זרקנו גם חלק מהציר המדומה. מיידי לראות שהתמונה של $\{i \cdot x : x \geq 1\}$ תחת העלאה בריבוע היא בדיוק כל השליליים הקטנים מ-$1-$, כלומר הקרן $(-\infty,-1]$: כלומר $z \mapsto z^2$ היא שקילות קונפורמית מ-$\mathbb{H} \setminus \{i \cdot x : x \geq 1\}$ ל-$\mathbb{C} \setminus ((-\infty,-1] \cup [0,\infty))$, שהוא מישור בלי שתי קרניים – ומהתחום הזה אפשר להמשיך כמו בסעיף הקודם. (זה לא בדיוק אותו התחום, אבל שיטה דומה תעבוד; או לחילופין, ההעתקה הלינארית $z \mapsto 2z+1$ שולחת אותו בדיוק לתחום של הסעיף הקודם.)

פתרון שני: אם נבצע אינברסיה $z \mapsto \frac{2}{z+i} + i$, חצי המישור העליון יישלח לכדור, $B(0,1)$, והקרן $[i, \infty i]$ תשלח לקטע $[0,i]$ – ודאו את שתי הטענות הללו! מכאן שההעתקה הזו ממפה את חצי המישור פחות קרן לכדור פחות קטע – שזה מקרה פרטי של (6), כמוזכר לעיל.

(9) פס בלי קרן: $\{z : 0 < \mathrm{Im}(z) < 2\pi\} \setminus \{x + \pi i : x \leq 0\}$. אנחנו יודעים שמהפס קל להגיע לחצי מישור (או מישור בלי קרן) על ידי העתקת האקספוננט, לכן כדאי לנסות להפעיל את האקספוננט. כאמור, התמונה של $\{z : 0 < \mathrm{Im}(z) < 2\pi\}$ תחת $z \mapsto e^z$ היא מישור בלי קרן $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. התמונה של החלק הנזרק $\{x + \pi i : x \leq 0\}$ היא כל השליליים (בגלל הארגומנט π) עם ערך מוחלט קטן מ-$e^0 = 1$ (בגלל החלק הממשי השלילי), כלומר הקטע $(-1, 0]$. בסה"כ נקבל ש-$z \mapsto e^z$ שלח את הפס-בלי-קרן ל-$\mathbb{C} \setminus [-1, \infty)$ – שהוא מישור בלי קרן. אם נרכיב על זה את $z \mapsto z + 1$, נקבל אותו בצורה המוכרת לנו מדוגמה (2).

(10) פס בלי שתי קרניים: $\{z : 0 < \mathrm{Im}(z) < 2\pi\} \setminus \{x + \pi i : |x| \geq 1\}$. שוב נפעיל אקספוננט. הפעם נקבל שהקרניים תהיינה ממופות לקטע $[-1/e, 0)$ (עבור הקרן השלילית), ולקרן $(-\infty, -e]$ (עבור הקרן החיובית), משיקולים זהים. כלומר ההעתקה מיפתה את הפס-בלי-שתי-קרניים למישור-בלי-שתי-קרניים $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -e] \cup [-1/e,))$, ואפשר להמשיך כמו ב-(7), או להפעיל העתקה לינארית שתזהה אותו איתו.

(11) המשלים של פרבולה: $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < \frac{\mathrm{Im}(z)^2}{4c^2} - c^2\}$, $c > 0$. נכתוב $w = (x + iy)$, ונתייחס ל-$y > 0$ כקבוע (כלומר, ישר אופקי בחצי-מישור העליון). נפעיל את ההעתקה $w \mapsto w^2$ ונקבל $z = w^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, כלומר $\mathrm{Re}(z) = x^2 - y^2$, $\mathrm{Im}(z) = 2xy$. אם y קבוע וידוע, אז ניתן לחלץ את x מתוך $\mathrm{Im}(z)$ ולקבל $x = \frac{\mathrm{Im}(z)}{2y}$, ואז $\mathrm{Re}(z) = x^2 - y^2 = \frac{\mathrm{Im}(z)^2}{4y^2} - y^2$. כלומר, ההעתקה שולחת את הישר $x + iy$ לפרבולה $\mathrm{Re}(z) = \frac{\mathrm{Im}(z)^2}{4y^2} - y^2$. קל לראות שאם נגדיל את y פי α, אז גם כל ה-w המתאימים יגדלו פי α וה-z יגדלו פי α^2, ונקבל פרבולה שנמתחה פי α^2 בכל אחד מהצירים – ובפרט הפרבולות הגדולות יותר יהיו משמאל לפרבולות הקטנות, כלומר, התחום $\{w = x + iy : y > c\}$ ימופה על ידי העלאה בריבוע לתחום שמשמאל לפרבולה שמתאימה ל-$x + ic$, כלומר, לתחום $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < \frac{\mathrm{Im}(z)^2}{4c^2} - c^2\}$. בכיוון ההפוך, הוצאת שורש שולחת את התחום הזה לחצי המישור $\{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(w) > c\}$, ממנו ניתן להגיע בקלות לחצי-מישור הסטנדרטי על ידי חיסור $c \cdot i$.